

УДК 531.36

© 2005 г. А. А. Зобова, А. В. Карапетян

**ПОСТРОЕНИЕ БИФУРКАЦИОННЫХ ДИАГРАММ
ПУАНКАРЕ – ЧЕТАЕВА И СМЕЙЛА
ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ С СИММЕТРИЕЙ**

Обсуждаются проблема существования линейных по обобщенным скоростям (импульсам, квазискоростям) первых интегралов консервативных неголономных систем Чаплыгина с симметрией и методы исследования существования, устойчивости и ветвления стационарных движений таких систем. Эти методы основаны на классических методах Рауса–Сальвадори, Пуанкаре–Четаева и Смейла, но не требуют, в отличие от последних, знания явного вида линейных интегралов. Общие положения иллюстрируются на примере задачи о движении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Показано, как в этом случае можно численно построить диаграмму Пуанкаре–Четаева – поверхность в пространстве обобщенных координат и постоянных линейных первых интегралов, отвечающую движениям, при которых скорости нециклических координат равны нулю, а скорости циклических координат постоянны, и диаграмму Смейла – поверхность в пространстве постоянных линейных первых интегралов и интеграла энергии, отвечающую указанным движениям.

Неголономные системы с симметрией всегда допускают стационарные движения, но, как правило, не допускают линейных интегралов. Поэтому вопрос о существовании таких интегралов требует особого обсуждения [1]. Более того, даже в случаях, когда линейные интегралы существуют, их явные выражения, как правило, неизвестны [2, 3], и применение классических методов качественного анализа также требует специального обсуждения [4–6].

1. Консервативные неголономные системы с симметрией. Рассмотрим консервативную неголономную систему с n степенями свободы. Пусть $q^1, \dots, q^n, z^1, \dots, z^v$ – обобщенные координаты системы, скорости которых стеснены v неинтегрируемыми соотношениями

$$\dot{z}^\mu = b_r^\mu(q) \dot{q}^r \tag{1.1}$$

Здесь и далее $\mu = 1, \dots, v$; $r, s, p = 1, \dots, n$; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование в соответствующих пределах. Пусть $T = T(q, \dot{q}, \dot{z})$ – кинетическая энергия системы (положительно определенная квадратичная форма обобщенных скоростей \dot{q}, \dot{z}), $V = V(q)$ – потенциальная энергия. При сделанных предположениях (b_r^μ, T и V не зависят от обобщенных координат z , скорости которых стоят в левых частях уравнений связей (1.1)) рассматриваемая система представляет собой систему Чаплыгина, и ее уравнения движения в форме Чаплыгина

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_*}{\partial \dot{q}^r} = \frac{\partial T_*}{\partial q^r} - \frac{\partial V}{\partial q^r} + \omega_{rsp} \dot{q}^s \dot{q}^p \tag{1.2}$$

можно рассматривать независимо от уравнений неголономных связей. Здесь

$$T_* = T(q, \dot{q}, z)_{(1.1)} = T_*(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a_{rs}(q) \dot{q}^r \dot{q}^s > 0 \quad \forall \dot{q} \neq 0$$

$$\omega_{rsp} = \left(\frac{\partial b_r^\mu}{\partial q^s} - \frac{\partial b_s^\mu}{\partial q^r} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^p} \left(\frac{\partial T}{\partial z^\mu} \right)_{(1.1)} = \omega_{rsp}(q) \equiv -\omega_{srp}(q)$$

Введем обозначения

$$\omega_{r(sp)} = \omega_{rsp} + \omega_{rps}, \quad \omega_{(rsp)} = \omega_{rsp} + \omega_{psr}$$

Обозначим координаты q^i через x^i ($i = 1, \dots, k$), а координаты q^α – через y^α ($\alpha = k + 1, \dots, n$) и предположим, что уравнения Чаплыгина инвариантны относительно $(n - k)$ -параметрической группы преобразований $x \rightarrow x, y \rightarrow y + \varphi$ ($\varphi \in R^{n-k}$). Это означает, что координаты y – циклические, в том смысле, что

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial y^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \omega_{rsp}}{\partial y^\alpha} = 0 \tag{1.3}$$

При этом уравнения (1.2) принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_*}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial T_*}{\partial x^i} - \frac{\partial V}{\partial x^i} + \omega_{ijh} \dot{x}^j \dot{x}^h + \omega_{i(j\alpha)} \dot{x}^j \dot{y}^\alpha + \omega_{i\alpha\beta} \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_*}{\partial \dot{y}^\alpha} = \omega_{\alpha ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + \omega_{\alpha(i\beta)} \dot{x}^i \dot{y}^\beta + \omega_{\alpha\beta\gamma} \dot{y}^\beta \dot{y}^\gamma \tag{1.5}$$

Здесь и далее $i, j, h = 1, \dots, k; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = k + 1, \dots, n$.

Очевидно, уравнения (1.4), (1.5) всегда допускают интеграл энергии

$$H = T_* + V = \frac{1}{2} a_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j + a_{i\alpha}(x) \dot{x}^i \dot{y}^\alpha + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(x) \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta + V(x) = c_0 = \text{const} \tag{1.6}$$

но, вообще говоря, не допускают циклических интегралов вида $\partial T_*/\partial \dot{y}^\alpha = \text{const}$ (ср. с [1]).

2. Линейные интегралы неголономных систем Чаплыгина. Выясним, при каких условиях уравнения (1.4), (1.5) допускают линейные по обобщенным скоростям интегралы вида

$$I_a = c_a^\beta(x) \frac{\partial T_*}{\partial \dot{y}^\beta} \equiv c_a^\beta (a_{\beta j} \dot{x}^j + a_{\beta\gamma} \dot{y}^\gamma) = c_a = \text{const} \tag{2.1}$$

удовлетворяющие условию

$$\det(c_a^\beta) \neq 0 \tag{2.2}$$

(здесь и далее $a, b = 1, \dots, n - k$). Дифференцируя I_a по времени и учитывая уравнения (1.5), имеем

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{\partial c_a^\beta}{\partial x^i} \dot{x}^i (a_{\beta j} \dot{x}^j + a_{\beta\gamma} \dot{y}^\gamma) + c_a^\beta (\omega_{\beta ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + \omega_{\beta(i\gamma)} \dot{x}^i \dot{y}^\gamma + \omega_{\beta\gamma\delta} \dot{y}^\gamma \dot{y}^\delta)$$

Таким образом, функции $I_a(x, \dot{x}, \dot{y})$ представляют собой линейные по \dot{x}, \dot{y} первые интегралы, если и только если

$$\frac{\partial c_a^\beta}{\partial x^i} a_{\beta\gamma} + c_a^\beta \omega_{\beta(i\gamma)} \equiv 0, \quad \frac{\partial c_a^\beta}{\partial x^i} a_{\beta j} + \frac{\partial c_a^\beta}{\partial x^j} a_{\beta i} + c_a^\beta \omega_{\beta(ij)} \equiv 0, \quad c_a^\beta \omega_{\beta(\gamma\delta)} \equiv 0 \quad (2.3)$$

Из первой совокупности соотношений (2.3) следуют тождества

$$\frac{\partial c_a^\beta}{\partial x^i} \equiv a^{\beta\gamma} \omega_{\delta(i\gamma)} c_a^\delta \quad (\|a^{\beta\gamma}\| = \|a_{\beta\gamma}\|^{-1}) \quad (2.4)$$

представляющие собой систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций $c_a^\beta(x)$. Эта система вполне интегрируема при условиях

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (a^{\beta\gamma} \omega_{(i\alpha\gamma)}) - \frac{\partial}{\partial x^i} (a^{\beta\gamma} \omega_{(j\alpha\gamma)}) + a^{\beta\gamma} a^{\delta\epsilon} (\omega_{(i\delta\gamma)} \omega_{(j\alpha\epsilon)} - \omega_{(j\delta\gamma)} \omega_{(i\alpha\epsilon)}) \equiv 0$$

которые можно представить в виде

$$\frac{\partial \omega_{(i\alpha\beta)}}{\partial x^j} + a^{\gamma\delta} \omega_{(j\alpha\gamma)} \left(\frac{\partial a_{\beta\delta}}{\partial x^i} + \omega_{(i\delta\beta)} \right) \equiv \frac{\partial \omega_{(j\alpha\beta)}}{\partial x^i} + a^{\gamma\delta} \omega_{(i\alpha\gamma)} \left(\frac{\partial a_{\beta\delta}}{\partial x^j} + \omega_{(j\delta\beta)} \right) \quad (2.5)$$

Итак, при условиях (2.5) существуют функции $c_a^\beta(x)$, удовлетворяющие соотношениям (2.4) и (2.2), учитывая которые приведем последние две совокупности условий (2.3) к виду

$$\omega_{\alpha(ij)} + a^{\gamma\beta} (a_{\beta j} \omega_{(i\alpha\gamma)} + a_{\beta i} \omega_{(j\alpha\gamma)}) \equiv 0, \quad \omega_{\beta(\gamma\delta)} \equiv 0 \quad (2.6)$$

Таким образом, уравнения (1.4), (1.5) всегда имеют интеграл энергии (1.6), а также (при условиях (1.3), (2.5), (2.6)) линейные интегралы (2.1) с неизвестными, вообще говоря, коэффициентами $c_a^\beta(x)$, удовлетворяющими системе линейных уравнений в частных производных (2.4) и условию (2.2). Заметим, что условия (2.5) заведомо выполнены при $k = 1$, а последняя совокупность условий (2.6) – при $n - k = 1$.

3. Эффективный потенциал консервативной неголономной системы Чаплыгина. Найдем минимум полной механической энергии системы (1.6) по обобщенным скоростям \dot{x}, \dot{y} на фиксированных уровнях линейных интегралов (2.1) (эффективный потенциал). Для этого введем функцию $F = H - \lambda^a (I_a - c_a)$, где λ^a – неопределенные множители Лагранжа, и выпишем условия ее стационарности по $\dot{x}, \dot{y}, \lambda$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = a_{ij} \dot{x}^j + a_{i\beta} (\dot{y}^\beta - c_a^\beta \lambda^a) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^\alpha} = a_{\alpha j} \dot{x}^j + a_{\alpha\beta} (\dot{y}^\beta - c_a^\beta \lambda^a) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda^a} = c_a - c_a^\beta (a_{\beta j} \dot{x}^j + a_{\beta\gamma} \dot{y}^\gamma) = 0 \quad (3.2)$$

Из уравнений (3.1) следуют соотношения $\dot{x}^i = 0, \dot{y}^\alpha = c_b^\alpha \lambda^b$, подставляя которые в уравнения (3.2), находим

$$\lambda^a = a^{\gamma\delta} c_\gamma^a c_\delta^b c_b \quad (\|c_\gamma^a\| = \|c_a^\gamma\|^{-1}) \quad (3.3)$$

Таким образом, минимум функции H по \dot{x} , \dot{y} на линейном многообразии (2.1) достигается при

$$\dot{x}^i = 0, \quad \dot{y}^\alpha = a^{\alpha\beta}(x)c_\beta^a(x)c_a \quad (3.4)$$

и равняется

$$V_c = V(x) + \frac{1}{2}a^{\alpha\beta}(x)c_\alpha^a(x)c_\beta^b(x)c_a c_b \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) задает эффективный потенциал $V_c(x)$ рассматриваемой системы. Однако его явный вид, вообще говоря, не известен, поскольку не известны явные выражения функций $c_\alpha^a(x)$, удовлетворяющих уравнениям (2.4) и условию (2.2) и заведомо существующих при условиях (1.3), (2.5), (2.6).

4. Стационарные движения неголономных систем Чаплыгина с симметрией. Согласно общей теории Рауса для систем с симметрией [7–16] критическим точкам x_0 эффективного потенциала $V_c(x)$ соответствуют стационарные движения (СД) вида

$$x^i = x_0^i(c), \quad \dot{y}^\alpha = \dot{y}_0^\alpha(c) = a^{\alpha\beta}(x_0(c))c_\beta^a(x_0(c))c_a \quad (4.1)$$

причем точкам минимума – устойчивые СД. При этом семейства $x_0(c)$ определяются из уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial(a^{\alpha\beta} c_\alpha^a c_\beta^b)}{\partial x^i} c_a c_b = 0 \quad (4.2)$$

и задают в пространстве $R^{n-k} \times R^k(c; x)$ бифуркационную диаграмму Пуанкаре – Четаева. Вычислив затем $V_c(x_0(c)) = f(c)$, можно построить бифуркационную диаграмму Смейла, определяемую в пространстве $R^{n-k} \times R(c; c_0)$ соотношениями $c_0 = f(c)$. Поверхности $c_0 = f(c)$ делят пространство постоянных первых интегралов (1.6), (2.1) рассматриваемой системы на области, различающиеся топологическим типом областей возможности движения, определяемых неравенством $V_c(x) \leq c_0$. Однако в общем случае явные формулы $x = x_0(c)$ и $c_0 = f(c)$, определяющие диаграммы Пуанкаре–Четаева и Смейла, получить невозможно, поскольку, как уже отмечалось, невозможно выписать явное выражение эффективного потенциала.

Заметим, что СД рассматриваемой системы в явном виде можно найти по крайней мере двумя другими способами [13]. Во-первых, СД можно представить в виде

$$x^i = x_0^i(\omega), \quad \dot{y}^\alpha = \dot{y}_0^\alpha = \omega^\alpha \quad (4.3)$$

При этом семейства $x_0(\omega)$ определяются из уравнений (см. [13])

$$\frac{\partial V}{\partial x^i} + \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^i} + \omega_{\alpha\beta} \right) \omega^\alpha \omega^\beta = 0 \quad (4.4)$$

Во-вторых, СД системы можно представить в виде

$$x^i = x_0^i(p), \quad \partial T_*/\partial \dot{y}^\alpha = p_\alpha \quad (4.5)$$

При этом семейства $x_0(p)$ определяются из уравнений (см. [13])

$$\frac{\partial V}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial x^i} + \omega_{\gamma\delta} a^{\gamma\alpha} a^{\delta\beta} \right) p_\alpha p_\beta = 0 \quad (4.6)$$

Более того, выбирая в качестве параметров семейства СД величины ω_α или p_α , можно в явном виде получить условия минимума эффективного потенциала в его критической точке x_0 и тем самым условия устойчивости соответствующего СД. Действительно, вторая вариация эффективного потенциала имеет вид

$$\delta^2 V_c(x_0) = \frac{1}{2} v_{ij} \xi^i \xi^j \quad (\xi^i = x^i - x_0^i)$$

причем ее коэффициенты явным образом выражаются через параметры ω

$$v_{ij} = \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} + \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x^j} \right) + a^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial x^i} + \omega_{i(\alpha\gamma)} \right) \left(\frac{\partial a_{\beta\delta}}{\partial x^j} + \omega_{(j\delta\beta)} \right) \right] \right\}_{x=x_0(\omega)} \omega^\alpha \omega^\beta$$

Аналогично (см. [13]) можно выписать явные выражения коэффициентов v_{ij} через параметры p .

Однако ни параметры ω (скорости циклических координат), ни параметры p (импульсы, соответствующие циклическим координатам) не существенны по Четаеву [10], так как сохраняют начальные значения только на СД, поэтому соотношения (4.3)–(4.6) непригодны для построения бифуркационных диаграмм Пуанкаре – Четаева и Смейла и возникает проблема разработки алгоритмов построения таких диаграмм на основе соотношений (4.1), (4.2), в которые входят функции $c(x)$, неизвестные в явном виде, но удовлетворяющие вполне определенной системе линейных уравнений в частных производных. Ниже эта проблема решается для конкретной неголономной системы Чаплыгина – тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

5. Уравнения движения тела вращения на шероховатой плоскости. Рассмотрим качение без скольжения тяжелого абсолютно твердого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости, предполагая, что центр тяжести тела G лежит на его оси симметрии $G\zeta$. Пусть M – точка касания тела с плоскостью.

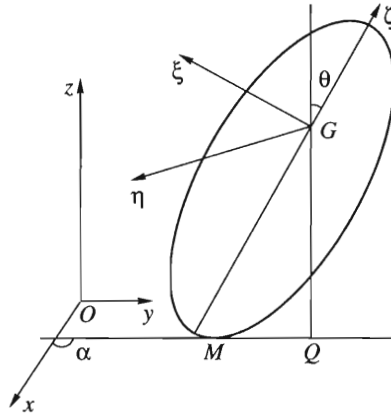
Введем неподвижную систему координат $Ox\zeta$: точка O принадлежит опорной плоскости Oxy , ось Oz направлена вертикально вверх. Обозначим через θ угол между осью симметрии тела и вертикалью, через β – угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо фиксированной меридианной плоскостью, а через α – угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ и осью Ox . Положение тела будет вполне определено углами α , β , θ и координатами x и y точки M . Введем также систему координат $G\xi\eta\zeta$, подвижную как в теле, так и в абсолютном пространстве, следующим образом: $G\zeta$ – ось симметрии тела, ось $G\xi$ все время лежит в плоскости вертикального меридиана $M\zeta$, а ось $G\eta$ перпендикулярна ей (фиг. 1). Пусть векторы скорости центра масс G , угловой скорости тела и угловой скорости трехгранника $G\xi\eta\zeta$ задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами v_ξ , v_η , v_ζ ; p , q , r и Ω_ξ , Ω_η , Ω_ζ соответственно. Пусть m – масса тела, A_1 – его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 – момент инерции относительно оси симметрии.

Заметим [2, 3], что расстояние GQ от центра тяжести до плоскости Oxy будет функцией угла θ , т.е. $GQ = f(\theta)$. Координаты ξ , η , ζ точки M касания тела и плоскости в системе координат $G\xi\eta\zeta$ также будут функциями только угла θ , причем $\eta = 0$, а

$$\xi = -f(\theta) \sin \theta - f'(\theta) \cos \theta, \quad \zeta = -f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta \quad (5.1)$$

Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, $\Omega_\xi = p$, $\Omega_\eta = q$. Плоскость $G\xi\zeta$ будет все время вертикальной, поэтому $\Omega_\zeta - \Omega_\xi \operatorname{ctg} \theta = 0$. Поскольку скольжения нет,

$$v_\xi + q\zeta = 0, \quad v_\eta + r\xi - p\zeta = 0, \quad v_\zeta - q\xi = 0$$



Фиг. 1

Запишем закон изменения импульса и закон изменения кинетического момента в проекциях на оси подвижной системы координат. Исключая затем компоненты скорости центра масс и компоненты реакции опорной плоскости с помощью уравнений связей, получим три дифференциальных уравнения относительно p, q, r :

$$[A_1 + m(\xi^2 + \zeta^2)] \frac{dq}{dt} = mgf'(\theta) + (A_3 r - A_1 p \operatorname{ctg} \theta) p - mp(\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi)(p\zeta - r\xi) - mq \left(\xi \frac{d\xi}{dt} + \zeta \frac{d\zeta}{dt} \right) \quad (5.2)$$

$$A_1 \frac{dp}{dt} + A_3 \xi \frac{dr}{dt} = (A_1 p \operatorname{ctg} \theta - A_3 r) q$$

$$\frac{d}{dt}(p\zeta - r\xi) - \frac{A_3}{m\xi} \frac{dr}{dt} = (\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi) pq$$

Здесь ξ и ζ – функции угла θ , определяемые равенствами (5.1). Добавив к уравнениям (5.2) очевидное соотношение

$$q = -d\theta/dt \quad (5.3)$$

получим замкнутую систему четырех дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени p, q, r, θ .

Полученная система уравнений допускает интеграл энергии $H = \text{const}$. Воспользовавшись теоремой Кёнига и условиями отсутствия скольжения, его можно написать в виде

$$H = \frac{1}{2} A_1 p^2 + \frac{1}{2} (A_1 + m(\xi^2 + \zeta^2)) q^2 + \frac{1}{2} A_3 r^2 + \frac{1}{2} m(p\zeta - r\xi)^2 + mgf(\theta) = \text{const} \quad (5.4)$$

Кроме того [2], эти уравнения допускают два линейных интеграла $K_1 = k_1 = \text{const}$, $K_2 = k_2 = \text{const}$ вида

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(\theta) \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Здесь $\Phi(\theta)$ – фундаментальная матрица следующей системы уравнений (штрих, как и выше, означает производную по θ):

$$\omega'(\theta) = \mathbf{A}(\theta)\omega(\theta) \quad (5.6)$$

$$\mathbf{A}(\theta) = \left\| \begin{array}{cc} -\operatorname{ctg}(\theta) - \frac{A_3 m \zeta (\xi + \zeta')}{\Delta} & \frac{A_3 (A_3 + m \xi^2 + m \xi' \zeta')}{\Delta} \\ \frac{A_1 m \xi (\xi + \zeta')}{\Delta} & \frac{m \xi (A_3 \zeta - A_1 \xi')}{\Delta} \end{array} \right\|, \quad \Delta = A_1 A_3 + A_1 m \xi^2 + A_3 m \zeta^2$$

6. Стационарные движения тела. Для исследования вопросов существования и устойчивости СД тела будем применять теорию Рауса. Согласно этой теории, критическим точкам интеграла энергии при фиксированных значениях постоянных других интегралов отвечают СД тела. Построим эффективный потенциал – минимум квадратичного по p, q, r интеграла энергии (5.4) на фиксированных уровнях линейных первых интегралов (5.5)

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{k}}(\theta) &= \min_{p, q, r} H \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}} = H \Big|_{q=0, \omega=\Phi(\theta)\mathbf{k}} = \\ &= \frac{1}{2} A_1 p^2 + \frac{1}{2} A_3 r^2 + \frac{1}{2} m (p \zeta - r \xi)^2 + m g f(\theta), \quad \mathbf{k} = \left\| \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь ξ, ζ, f – известные функции переменной θ , а p и r – функции переменной θ и постоянных k_1 и k_2 , неизвестные в явном виде: функции $p(\theta, k_1, k_2)$ и $r(\theta, k_1, k_2)$ – общее решение системы (5.6). Стационарные движения соответствуют решениям уравнения

$$W'_{\mathbf{k}}(\theta) = 0 \quad (6.2)$$

и имеют вид

$$\theta = \theta_0(k_1, k_2), \quad \omega = \Phi(\theta_0(k_1, k_2))\mathbf{k}, \quad q = 0 \quad (6.3)$$

Дифференцируя функцию (6.1) по θ и используя уравнения (5.6), представим уравнение (6.2) в виде

$$F(k_1, k_2, \theta) = W'_{\mathbf{k}}(\theta) = -\left(A_1 - \frac{m \zeta f}{\cos \theta}\right) \operatorname{ctg} \theta p^2 + \left(A_3 - \frac{m \xi f}{\sin \theta}\right) r p + m g f' = 0 \quad (6.4)$$

Для дальнейшего исследования СД тела можно численно построить диаграмму Пуанкаре–Четаева – поверхность в пространстве (k_1, k_2, θ) , задаваемую неявно уравнением (6.4), а также диаграмму Смейла – поверхность в пространстве констант первых интегралов (k_1, k_2, h) , соответствующую СД. Для построения этих диаграмм был разработан алгоритм [6], не требующий знания явного вида функций $p(\theta, k_1, k_2)$ и $r(\theta, k_1, k_2)$.

7. Задача о движении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости. В качестве примера рассмотрим движение однородного эллипсоида вращения, поверхность которого задается уравнением

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{\lambda^2 a^2} = 1 \quad (7.1)$$

причем $\lambda < 1$, т.е. эллипсоид сжат в направлении оси $G\zeta$. Тогда расстояние $GQ = f(\theta)$ от центра тяжести до плоскости Oxy определяется соотношением

$$f(\theta) = a \sqrt{\sin^2 \theta + \lambda^2 \cos^2 \theta} \quad (7.2)$$

а координаты точки касания, согласно выражениям (5.1), будут иметь вид

$$\xi = -\frac{a \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \lambda^2 \cos^2 \theta}}, \quad \zeta = -\frac{a \lambda^2 \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \lambda^2 \cos^2 \theta}} \quad (7.3)$$

Обозначим плотность эллипсоида через ρ , тогда для его массы, экваториального (A_1) и осевого (A_3) моментов инерции получим

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho \lambda a^3, \quad A_1 = \frac{4}{15} \pi \rho \lambda (1 + \lambda^2) a^5, \quad A_3 = \frac{8}{15} \pi \rho \lambda a^5 \quad (7.4)$$

Система уравнений (5.6) после подстановки в нее выражений (7.2), (7.3), (7.4) примет вид

$$\begin{aligned} \tau'(\theta) &= (-\operatorname{ctg}(\theta) - 10\Lambda\lambda^2(1 - \lambda^2)\cos\theta\sin^3\theta)\tau + \\ &+ 2\Lambda[(7 - 9\lambda^2 + 2\lambda^4)\cos^4\theta + (-14 + 9\lambda^2 + 5\lambda^4)\cos^2\theta + 7]n \\ n'(\theta) &= 5\Lambda(1 - \lambda^4)\sin^4\theta\tau + 5\Lambda\lambda^2(1 - \lambda^2)\sin\theta\cos\theta(1 - 2\cos^2\theta)n \\ \Lambda &= [(7 - 2\lambda^2 - 17\lambda^4 + 12\lambda^6)\cos^4\theta + (-14 - 5\lambda^2 + 19\lambda^4)\cos^2\theta + 7 + 7\lambda^2]^{-1} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь вместо размерных компонент угловой скорости p и r введены безразмерные τ и n следующим образом:

$$\tau = p\sqrt{A_1/(mga)}, \quad n = r\sqrt{A_1/(mga)}$$

Запишем также интеграл энергии (5.4), эффективный потенциал (6.1) и его производную (6.4) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{H} = \frac{H}{mga} &= \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{A_1}(\xi^2 + \zeta^2)\right)\left(q\sqrt{\frac{A_1}{mga}}\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2A_1}n^2 + \frac{1}{2A_1}m(\tau\xi - n\xi)^2 + \frac{f(\theta)}{a} = \text{const} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\tilde{W}_k(\theta) = \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{2A_1}n^2 + \frac{1}{2A_1}m(\tau\xi - n\xi)^2 + \frac{f(\theta)}{a} \quad (7.7)$$

$$\bar{F} = \frac{F(k_1, k_2, \theta)}{mga} = -K\operatorname{ctg}\theta\tau^2 + L\tau n + \frac{f'(\theta)}{a} = 0 \quad (7.8)$$

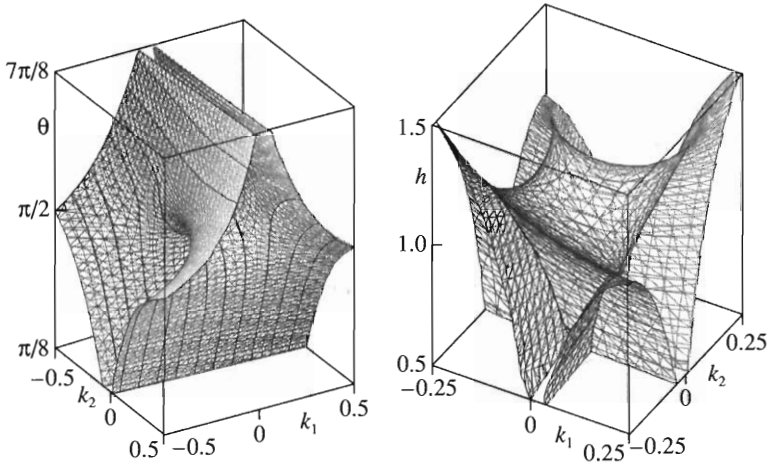
$$K = 1 - \frac{m\xi f'(\theta)}{A_1 \cos \theta} = \frac{1 + 6\lambda^2}{1 + \lambda^2}, \quad L = \frac{A_3}{A_1} - \frac{m\xi f'(\theta)}{A_1 \sin \theta} = \frac{7}{1 + \lambda^2}$$

Явный вид решений системы (7.5) не известен, однако с помощью программного пакета MAPLE 7 численно были построены два независимых решения

$$S_i = \begin{Bmatrix} \tau_i \\ n_i \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2$$

этой системы (для значения параметра $\lambda = 1/5$) со следующими начальными условиями:

$$S_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = S_1^0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{Bmatrix}, \quad S_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = S_2^0 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0.8 \end{Bmatrix}; \quad S_i^0 = \begin{Bmatrix} \tau_i^0 \\ n_i^0 \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$



Фиг. 2

Тогда произвольное решение системы (5.2) является их линейной комбинацией

$$S = \begin{pmatrix} \tau \\ n \end{pmatrix} = k_1 S_1 + k_2 S_2$$

В предположении, что k_1 и k_2 – константы линейных интегралов системы (7.5), были численно построены диаграммы Пуанкаре – Четаева и Смейла (они изображены на фиг. 2 слева и справа соответственно). Далее проводится анализ этих диаграмм.

8. Анализ диаграмм.

Выбор начальных условий. Диаграммы $F(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \theta) = 0$ и $F(k_1, k_2, \theta) = 0$, построенные при выборе разных начальных условий, линейной заменой $\tilde{k}_1 = ak_1 + bk_2, \tilde{k}_2 = ck_1 + dk_2$ переводятся одна в другую.

Симметрии. Прежде всего заметим (см. выражения (7.6), (7.8)), что левые части уравнений диаграмм Пуанкаре–Четаева и Смейла – суммы форм второй и нулевой степени по τ, n , которые в свою очередь представляют собой линейную комбинацию k_1, k_2 , поэтому поверхности инвариантны относительно замены

$$(k_1, k_2, \theta) \rightarrow (-k_1, -k_2, \theta)$$

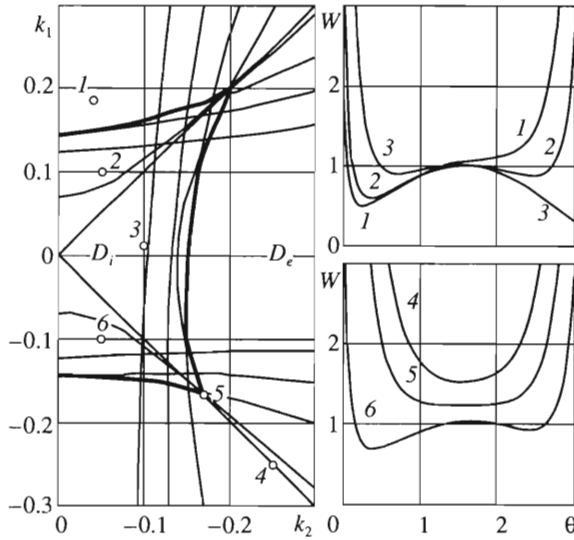
т.е. обладают осевой симметрией относительно прямой $k_1 = 0, k_2 = 0$.

Вместе с тем поверхность тела симметрична относительно плоскости $G\eta\xi$, проходящей через центр масс и перпендикулярной оси симметрии, поэтому система уравнений (7.5), интеграл энергии (7.6) и эффективный потенциал (7.7) не изменяются при замене

$$(\theta, \tau, q, n) \rightarrow (\theta' = \pi - \theta, \tau' = \tau, q' = -q, n' = -n)$$

Тогда, обозначая компоненты фундаментальной матрицы следующим образом:

$$\Phi\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \phi_1(\theta) & \phi_2(\theta) \\ \psi_1(\theta) & \psi_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \Phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = E$$



Фиг. 3

получим

$$\Phi\left(\pi - \theta, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} \phi_1(\theta) & \phi_2(\theta) \\ -\psi_1(\theta) & \psi_2(\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_1(\theta) & -\phi_2(\theta) \\ \psi_1(\theta) & \psi_2(\theta) \end{vmatrix}$$

Рассмотрим некоторое СД (k_1, k_2, θ_0) . На нем для компонент угловой скорости τ, n имеем

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} \tau \\ n \end{vmatrix} = \Phi\left(\theta_0, \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{T}_0 \mathbf{k}; \quad \mathbf{T}_0 = \begin{vmatrix} \tau_1^0 & \tau_2^0 \\ n_1^0 & n_2^0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \end{vmatrix}$$

Этому СД на диаграмме Пуанкаре соответствует некоторое другое СД $(\pi - \theta_0, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$, причем

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{vmatrix} \tilde{\tau} \\ \tilde{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau \\ -n \end{vmatrix} = \Phi\left(\pi - \theta_0, \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{T}_0 \tilde{\mathbf{k}}, \quad \tilde{\mathbf{k}} = \begin{vmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \end{vmatrix}$$

Найдем отсюда зависимость между \mathbf{k} и $\tilde{\mathbf{k}}$. Имеем

$$\Phi\left(\pi - \theta_0, \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{T}_0 \tilde{\mathbf{k}} = \begin{vmatrix} \tau \\ -n \end{vmatrix} = \chi \mathbf{S}; \quad \chi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Таким образом,

$$\mathbf{k} = (\mathbf{T}_0)^{-1} \chi \mathbf{T}_0 \tilde{\mathbf{k}} \tag{8.1}$$

Сечения диаграммы Пуанкаре – Четаева. Рассмотрим линии уровня диаграммы Пуанкаре – ее сечения плоскостями $\theta = \text{const}$ (проекции некоторых сечений на часть плоскости констант линейных интегралов $k_1 \in [-0.3, 0.3]$, $k_2 \in [-0.3, 0]$ изображены на фиг. 3 слева). Как видно из выражения (7.8), каждое сечение – кривая второго по-

рядка. Найдем ее линейные инварианты, воспользовавшись уравнением (7.8) и тем, что при фиксированном θ замена $(\tau, n) \rightarrow (k_1, k_2)$ линейна. Имеем

$$\delta = \begin{vmatrix} -K \operatorname{ctg} \theta & L/2 \\ L/2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{L^2}{4} = -\frac{7}{1 + \lambda^2} < 0 \quad (8.2)$$

$$\Delta = \frac{f'(\theta)}{a} \delta = -\frac{f'(\theta)}{a} \frac{7}{1 + \lambda^2}; \quad \Delta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

поэтому сечение диаграммы – либо гипербола (при $\theta \neq \pi/2$), либо пара пересекающихся прямых (при $\theta = \pi/2$). В последнем случае одна из прямых соответствует движению тела, при котором оно равномерно катится по прямой, при этом ось симметрии тела горизонтальна, а центр масс тела движется с произвольной постоянной скоростью, а другая – движению тела, при котором оно вращается с произвольной постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной прямой, при этом центр масс тела неподвижен.

Устойчивость стационарных движений при $\theta = \pi/2$. Производная эффективного потенциала (7.8) при $\theta = \pi/2$ имеет вид

$$\tilde{F}'(\theta = \pi/2) = -\delta \tau n = -\delta (k_1 \tau_1^0 + k_2 \tau_2^0) (k_1 n_1^0 + k_2 n_2^0)$$

(величина δ определена первым равенством (8.2)). Уравнения

$$\tau = k_1 \tau_1^0 + k_2 \tau_2^0 = 0 \quad (8.3)$$

$$n = k_1 n_1^0 + k_2 n_2^0 = 0 \quad (8.4)$$

являются уравнениями прямых сечения поверхности $\tilde{F} = 0$ плоскостью $\theta = \pi/2$. СД будет устойчиво, если

$$W_k''(\theta) > 0$$

Вычислим вторую производную эффективного потенциала (7.7) в силу системы (7.5)

$$\tilde{W}_k''(\theta) = \tilde{F}'' = K \sin^{-2} \theta \tau^2 - 2K \operatorname{ctg} \theta \tau \tau' + L \tau' n + L \tau n' + f''(\theta)/a$$

СД (8.3), соответствующие $\tau = 0$, устойчивы при

$$\tilde{F}'' = \frac{14}{(1 + \lambda^2)^2} n^2 + \lambda^2 - 1 > 0$$

а движения (8.4) ($n = 0$) – при

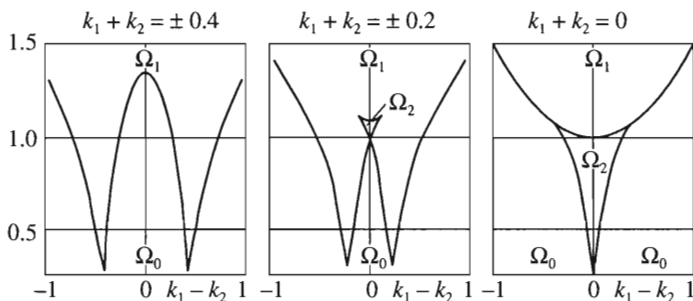
$$\tilde{F}'' = \frac{6 + \lambda^2}{1 + \lambda^2} \tau^2 + \lambda^2 - 1 > 0$$

Эти результаты согласуются с результатами исследования устойчивости СД тела вращения, полученными ранее [4]. При $\lambda = 1/5$ и начальных условиях (7.9) смена устойчивости происходит при значениях

$$k_1 = k_2 \approx 0.17, \quad k_1 = k_2 \approx -0.17, \quad k_1 = -k_2 \approx 0.21, \quad k_1 = -k_2 \approx -0.21$$

которые соответствуют вершинам криволинейного четырехугольника на фиг. 3.

Эффективный потенциал. Плоскость констант (k_1, k_2) можно разделить на две области (ее часть $\{k_1 \in [-0.3, 0.3], k_2 \in [-0.3, 0]\}$ показана на фиг. 3 слева, область $\{k_2 > 0\}$



Фиг. 4

центрально симметрична указанной). Вне криволинейного четырехугольника (область D_e) при каждой паре констант линейных интегралов существует лишь одно СД, которому соответствует минимум эффективного потенциала, следовательно, оно устойчиво. Внутри криволинейного четырехугольника (область D_i) каждой паре (k_1, k_2) соответствуют уже три СД, два из которых устойчивы, а одно нет. Эта область симметрична относительно точки O и инвариантна относительно линейного преобразования (8.1). На фиг. 3 приведены графики эффективного потенциала, соответствующие некоторым парам постоянных: $k_1 = 0.185, k_2 = -0.04$ (кривая 1); $k_1 = 0.1, k_2 = -0.05$ (кривая 2); $k_1 = 0.01, k_2 = -0.1$ (кривая 3); $k_1 = -0.25, k_2 = -0.25$ (кривая 4); $k_1 = -0.17, k_2 = -0.17$ (кривая 5); $k_1 = -0.1, k_2 = -0.05$ (кривая 6).

Диаграмма Смейла. Сечения диаграммы Смейла (см. правую часть фиг. 2) плоскостями $k_1 + k_2 = \text{const}$ показаны на фиг. 4. Поверхность диаграммы разделяет пространство констант первых интегралов на три области. В области Ω_1 множество возможности изменения угла θ – отрезок, в области Ω_2 – два отрезка, в области Ω_0 – пустое множество.

В заключение отметим, что предложенная методика позволяет построить бифуркационные диаграммы и тем самым дать качественное описание динамики для любого выпуклого тела вращения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00398) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-2000.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сумбатов А.С. Интегралы, линейные относительно скоростей. Обобщения теоремы Якоби. // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1979. Т. 4. С. 3–57.
2. Чаплыгин С.А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Тр. отд. физ. наук Моск. об-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 9. № 1. С. 10–16.
3. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
4. Миндлин И.М., Пожарицкий Г.К. Об устойчивости стационарных движений тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 742–745.
5. Карпетян А.В., Кулешов А.С. Методы исследования устойчивости и бифуркации стационарных движений консервативных неголономных систем. // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию А.Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 429–464.

6. Зобова А.А. Построение диаграмм Пуанкаре – Четаева и Смейла в задаче о движении тела вращения на шероховатой плоскости // Мобильные роботы и мехатронные системы. М.: Изд-во МГУ, 2004. С. 107–118.
7. Routh E.J. A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. L.: MacMillan and Co., 1877. 108 p.
8. Salvadori L. Un'osservazione su di un criterio di stabilità del Routh // Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli. 1953. V. 20. P. 269–272.
9. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. V. 7. P. 259–380.
10. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
11. Smale S. Topology and mechanics // Invent. Math. 1970. V. 10. № 4. P. 305–331; V. 11. № 1. P. 45–64.
12. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
13. Карпетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
14. Modern Methods of Analytical Mechanics and their Applications / Eds V.V. Romyantsev, A.V. Karapetyan. Wien; New York: Springer, 1998. 344 p.
15. Karapetyan A.V. Invariant sets of mechanical systems // Math. and Computer Modeling. 2002. V. 36. № 6. P. 643–661.
16. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.

Москва
e-mail: azobova@mail.ru

Поступила в редакцию
20.II.2004