

УДК 62-50

© 2005 г. С. В. Волков

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

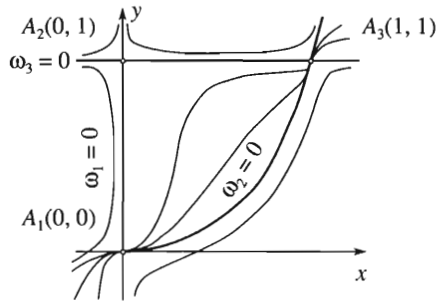
Решается задача синтеза управления движением точки на плоскости. Уравнения программы (цели) управления составляются в виде системы дифференциальных уравнений, имеющей в области допустимых положений управляемой точки заданную совокупность особых траекторий и заданную топологическую структуру разбиения на траектории. Эти уравнения дают векторное поле скоростей программных движений точки и используются для нахождения соответствующих им управляющих сил.

1. Введение. При решении задач механики управляемого тела главная операция – формирование цели управления, что предполагает составление системы уравнений (как конечных, так и дифференциальных) механических связей, реализация которых обеспечивает требуемые свойства движения данного тела. Эти уравнения используются для получения управляющих сил путём решения соответствующей обратной задачи динамики [1]. Развитие методов решения обратных задач динамики сопровождалось увеличением числа и разнообразия требуемых свойств движения. В классических задачах для материальной точки такие свойства состояли в существовании заданной траектории точки либо в принадлежности траектории к некоторому семейству кривых (задачи Ньютона, Кеплера, Бертрана, Мещерского, Жуковского [2, 3]), а для механической системы – в существовании заданных частных интегралов уравнений движения (задачи Ермакова, Сулова, Горячева, Чаплыгина [2, 3]). Более полно свойства движений описываются дифференциальными уравнениями. С их помощью формализуются сведения как об отдельных траекториях и образованных ими многообразиях, так и о характере их устойчивости, областях притяжения и других свойствах. Методы составления систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную совокупность особых интегральных многообразий и заданные свойства разбиения пространства переменных на траектории [4–7]¹, служат математической основой современного подхода к решению обратных задач динамики в самых общих постановках [8–10]. В данной работе для синтеза управления движением материальной точки использован метод [11] построения систем уравнений вида

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \quad (1.1)$$

класса $C_1(\Omega)$, которые имеют заданные траектории $\Gamma_i: \omega_i(x, y) = 0$ ($i = 1, \dots, n$), среди которых могут быть незамкнутые кривые, предельные циклы, простые (фокусы, узлы, седла) и сложные состояния равновесия, и имеют заданную структуру разбиения на траектории области Ω плоскости (x, y) . Суть метода состоит в сведении решения этой задачи к построению, во-первых, двух ортогональных векторных полей направлений сравнения, соответствующих совокупности заданных траекторий искомой системы уравнений (1.1), а во-вторых, двух функций, представляющих собой скалярные

¹ См. также: Волков С.В. Построение динамических систем по заданным свойствам поведения решений. Дис. ... к-та. физ.-мат. наук 01.02.01. Москва, 1981. 172 с.



Фиг. 1

произведения вектора правых частей искомой системы уравнений (1.1) на векторы этих полей направлений сравнения и соответствующих заданной топологической структуре разбиения на траектории области Ω . Теоретическую основу этих построений составляют фундаментальные положения качественной теории систем уравнений вида (1.1) класса C_1 [12, 13], модификации метода Еругина [14], метод Фроммера исследования особых точек обыкновенного дифференциального уравнения [15].

2. Постановка задачи. Требуется найти силу, под действием которой движение материальной точки M массы m в некоторой области Ω обладает следующими свойствами.

Свойство А. Точка переходит из начального положения $A_1(0, 0)$ (фиг. 1) в конечное положение $A_3(1, 1)$, не покидая области Ω , ограниченной кривыми

$$\omega_1 \equiv x = 0, \quad \omega_2 \equiv y - x^3 = 0, \quad \omega_3 \equiv y - 1 = 0 \quad (2.1)$$

Свойство Б. Точка имеет нулевые скорости в начальном и конечном положениях, в которых ее траектория касается кривой $\omega_2 = 0$ (фиг. 1).

Прообразом такой точки может служить, в частности, центр масс схвата манипуляционного робота или какого-либо из его узлов.

3. Решение задачи. Начнем с составления программы движения точки M в виде системы кинематических уравнений (1.1), которой соответствует топологическая структура разбиения области Ω на траектории, представленная графически на фиг. 1. В связи с этим выполним описанные ниже действия.

3.1. Построение векторов направлений сравнения. Векторы \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ вспомогательных полей направлений сравнения используются как векторы локального базиса, в котором задается направление вектора правых частей искомой системы (1.1). Эти векторы, соответствующие данной совокупности кривых $\{\Gamma_i: \omega_i = 0 \mid i = 1, 2, 3\}$, наделяются следующими свойствами:

$$(\mathbf{n} \cdot \text{grad} \omega_i)|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \mathbf{n} \neq 0 \text{ и } n_y \geq 0 \text{ в области } \Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$\boldsymbol{\tau}_x = n_y, \quad \boldsymbol{\tau}_y = -n_x$$

где A_1, A_2, A_3 – точки равновесия системы (1.1).

Для построения таких векторов \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ используем векторы [11]

$$\mathbf{n}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{n}_2 = (-3x^2, 1), \quad \mathbf{n}_3 = (0, 1) \quad (3.1)$$

соответствующие кривым (2.1), и векторы

$$\mathbf{m}_1 = (-xy, x^2), \quad \mathbf{m}_2 = (-x(y-1), x^2), \quad \mathbf{m}_3 = (-(x-1)(y-1), (x-1)^2) \quad (3.2)$$

соответствующие состояниям равновесия A_1, A_2, A_3 . Всюду далее индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3, если не оговорено иное.

Положим

$$\mathbf{n} = \sum_i \lambda_i \mathbf{n}_i \prod_{j, j \neq i} \omega_j^{\alpha_{ij}} + \sum_k \mu_k \mathbf{m}_k \prod_i \omega_i^{\beta_{ki}} \quad (3.3)$$

где произвольные неотрицательные множители $\lambda_i(x, y)$, $\mu_k(x, y)$ и произвольные натуральные числа α_{ij} , β_{ki} выбираются так, что выполнены следующие условия.

1°. В достаточно малой окрестности точки A_k главным в выражении (3.3) является слагаемое $\mu_k \mathbf{m}_k \prod_i \omega_i^{\beta_{ki}}$ (обеспечивающее существование только нужных исключительных направлений состояния равновесия A_k векторного поля \mathbf{n}), а вблизи кривой Γ_i главным является соответствующее слагаемое $\lambda_i \mathbf{n}_i \prod_{j, j \neq i} \omega_j^{\alpha_{ij}}$ (позволяющее обеспечить требуемый тип сепаратрисы Γ_i).

2°. В достаточно малой окрестности кривой Γ_i главным в (3.3) является соответствующее этой кривой слагаемое $\lambda_i \mathbf{n}_i \prod_{j, j \neq i} \omega_j^{\alpha_{ij}}$.

Используя обозначение $\deg_A f(x, y)$ для наименьшей степени слагаемых в разложении функции f в ряд по степеням $x - a$ и $y - b$ в точке $A(a, b)$, определим числа $\psi_{ik} = \deg_{A_k} (\partial \omega_i / \partial y)$ для $i \in I_{A_k} = \{i: \omega_i(A_k) = 0\}$ и заметим, что если λ_i , μ_k , α_{ij} и β_{ki} удовлетворяют неравенствам

$$\deg_{A_k}(\lambda_i) + \sum_j \alpha_{ij} \deg_{A_k}(\omega_j) + \psi_{ik} > \beta_k + \deg_{A_k}(\mu_k) + 2$$

$$\deg_{A_k}(\mu_m) + \sum_j \beta_{mj} \deg_{A_k}(\omega_j) > \beta_k + 2$$

то условия 1° и 2° выполняются.

3.2. *Аналитическое задание структуры фазового портрета.* Для представления свойств A и B в математической форме воспользуемся скалярными произведениями вектора $\mathbf{P} = (X, Y)$ правых частей искомой системы уравнений (1.1) и векторов \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$

$$F_1 = n_x X + n_y Y, \quad F_2 = \tau_x X + \tau_y Y \quad (3.4)$$

Функции F_1 и F_2 , соответствующие заданной совокупности особых траекторий (2.1) и заданной топологической структуре разбиения на траектории области Ω (фиг. 1), составим в виде следующих произведений:

$$F_1 = \xi_1 \prod_i \omega_i^{\alpha_i}, \quad F_2 = \xi_2 \prod_j \bar{\omega}_j^{\bar{\alpha}_j} \quad (3.5)$$

где α_i , $\bar{\alpha}_j$ – произвольные натуральные числа; $\xi_1 = \xi_1(x, y)$, $\xi_2 = \xi_2(x, y)$, $\bar{\omega}_j = \bar{\omega}_j(x, y)$ – произвольные функции координат x и y , удовлетворяющие условию

$$F_1^2 + F_2^2 \neq 0 \text{ в области } \Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \quad (3.6)$$

Выбор функций ξ_1 , ξ_2 и $\bar{\omega}_j$ выполняется в два этапа. На первом этапе устанавливается строение этих функций в окрестности каждого из состояний равновесия A_k . При этом используются теоремы [11], которые содержат алгоритмы построения этих множителей и условия, достаточные для обеспечения заданной локальной топологической структуры искомой системы уравнений в заданном состоянии равновесия. Основу

доказательства этих теорем составляет метод Фроммера исследования особых точек дифференциальных уравнений [15]. Полученные таким образом функции ξ_1 , ξ_2 и $\bar{\omega}_j$ используются на втором этапе при составлении окончательных выражений функций F_1 и F_2 , которым соответствует система уравнений

$$\dot{x} = (F_1 n_x + F_2 n_y)/(n_x^2 + n_y^2), \quad \dot{y} = (F_1 n_y - F_2 n_x)/(n_x^2 + n_y^2) \quad (3.7)$$

с заданной топологической структурой разбиения на траектории области Ω .

Этап 1. Построение F -функций состояний равновесия.

Окрестность точки $A_1(0, 0)$. Кривая $\omega_1 = 0$ является сепаратрисой гиперболического типа состояния равновесия A_1 , а нормальные области исключительного направления $y = 0$ точки A_1 – нормальными областями смешанного типа (фиг. 1). На основании теорем 5 и 11 из [11] положим

$$F_1 = \xi_{11} \omega_1 \omega_2^2 \omega_{v11}, \quad F_2 = \xi_{21} \bar{\omega}_1 \omega_{v21} (x^4 + y^2), \quad \xi_{11}, \xi_{21} > 0 \quad (3.8)$$

где

$$\bar{\omega}_1 = x + y, \quad \omega_{v11} = x + \zeta_1 y^{\eta_1}, \quad \omega_{v21} = x + \zeta_2 y^{\eta_2}, \quad \eta_1 = \eta_2 = 3$$

а значения ζ_1 и ζ_2 находятся из условия отсутствия нулей функции

$$\xi_{1k} (v + \zeta_1) (b_1 - c_1 v^3) + \xi_{2k} (v + \zeta_2) (3b_1 - 2c_1 v^3)$$

Здесь и далее в разд. 3 через a_k , b_k и c_k обозначены коэффициенты главных членов в разложениях по степеням $y - y_k$ в окрестности состояния равновесия A_k вдоль направления $x - x_k = 0$ следующих выражений:

$$\sum_i \lambda_i n_{ix} \prod_{j, j \neq i} \omega_j^{\alpha_{ij}}, \quad \sum_i \lambda_i n_{iy} \prod_{j, j \neq i} \omega_j^{\alpha_{ij}}, \quad \mu_k \prod_i \omega_i^{\beta_{ki}}$$

входящих в выражения координат вектора \mathbf{n} (3.3) (подробнее см. в [11]). В частности, полагая

$$\zeta_1 = -(b_1/c_1)^{1/3}, \quad \zeta_2 = -(3b_1/(2c_1))^{1/3}$$

получим функции

$$F_1 = \xi_{11} \omega_1 \omega_2^2 [x - (b_1/c_1)^{1/3} y^3], \quad \xi_{11} > 0 \quad (3.9)$$

$$F_2 = \xi_{21} [x - y^3 (3b_1/(2c_1))^{1/3}] (x^4 + y^2) \bar{\omega}_1, \quad \xi_{21} > 0 \quad (3.10)$$

которым соответствует система уравнений (1.1), имеющая заданную локальную топологическую структуру в точке A_1 (фиг. 1).

Окрестность точки $A_2(0, 1)$. Кривые $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$ являются сепаратрисами гиперболического типа состояния равновесия A_2 (фиг. 1). В окрестности этой точки положим, основываясь на теоремах 1 и 11 из [11],

$$F_1 = \xi_{12} \omega_1 \omega_3 [x - (b_2/c_2)^{1/3} (y - 1)^3], \quad \xi_{12} < 0 \quad (3.11)$$

$$F_2 = -\xi_{22} [x - (3b_2/(2c_2))^{1/3} (y - 1)^3] \bar{\omega}_{21} \bar{\omega}_{22}, \quad \xi_{22} > 0 \quad (3.12)$$

где

$$\bar{\omega}_{21} = x + y - 1, \quad \bar{\omega}_{22} = x - y + 1$$

Этим функциям F_1 и F_2 соответствует система уравнений (1.1), которая имеет требуемую локальную топологическую структуру в точке A_2 (фиг. 1).

Окрестность точки $A_3(1, 1)$. Кривая $\omega_3 = 0$ является сепаратрисой гиперболического типа, а кривой $\omega_2 = 0$ соответствует нормальная область смешанного типа состояния равновесия A_3 (фиг. 1). На основании теорем 3, 5 и 11 [11] положим в окрестности точки A_3

$$F_1 = \xi_{13}\omega_2^2\omega_3\omega_{v31}, \quad \xi_{13} < 0 \tag{3.13}$$

$$F_2 = \xi_{23}[(x-1)^2 + (y-1)^4]\{[y-1-3(x-1)]^2 + (x-1)^4\}, \quad \xi_{23} > 0 \tag{3.14}$$

где

$$\omega_{v13} = x-1 + \zeta_1(y-1)^{\eta_1}, \quad \eta_1 = 3, \quad \zeta_1 = -a_3/c_3$$

Этим функциям F_1 и F_2 соответствует система уравнений (3.7), состояние равновесия A_3 которой имеет заданную локальную топологическую структуру (фиг. 1).

Построение вектора \mathbf{n} завершается выбором значений произвольных множителей $\lambda_i, \mu_k, \alpha_{ij}$ при учете главных членов в разложениях функций F_1 и F_2 (3.9)–(3.14) в точках A_i . В частности, положим

$$\mathbf{n} = \lambda_{10}\mathbf{n}_1L_{8,8,0}^{0,4,4} + \lambda_{20}\mathbf{n}_2L_{4,0,4}^{4,0,4} + \lambda_{30}\mathbf{n}_3L_{0,4,4}^{4,4,0} + \mu_{10}\mathbf{m}_1L_{0,2,4}^{2,2,4} + \mu_{20}\mathbf{m}_2L_{2,0,4}^{2,4,2} + \mu_{30}\mathbf{m}_3L_{2,4,0}^{4,2,2} \tag{3.15}$$

где

$$L_{p_1, p_2, p_3}^{s_1, s_2, s_3} = \omega_1^{s_1}\omega_2^{s_2}\omega_3^{s_3}r_1^{p_1}r_2^{p_2}r_3^{p_3}, \quad r_i^2 = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2$$

λ_{i0}, μ_{i0} – произвольные постоянные.

Заметим, что в окрестности точки A_1 вдоль направления $x = 0$

$$\lambda_{10}n_{1x}L_{8,8,0}^{0,4,4} = \lambda_{10}y^{12} + o(y^{12}), \quad \mu_{10}L_{0,2,4}^{0,2,4} = 4\mu_{10}x^2y^2 + o(x^2y^2)$$

Отсюда следует, что

$$b_1 = \lambda_{10}, \quad c_1 = 4\mu_{10}$$

В окрестности точки A_2 вдоль направления $x = 0$

$$\lambda_{10}n_{1x}L_{8,4,0}^{0,4,4} = \lambda_{10}(y-1)^{12} + o((y-1)^{12}), \quad \mu_{20}L_{2,0,4}^{0,4,2} = \mu_{20}(y-1)^2 + o((y-1)^2)$$

Таким образом,

$$b_2 = \lambda_{10}, \quad c_2 = \mu_{20}$$

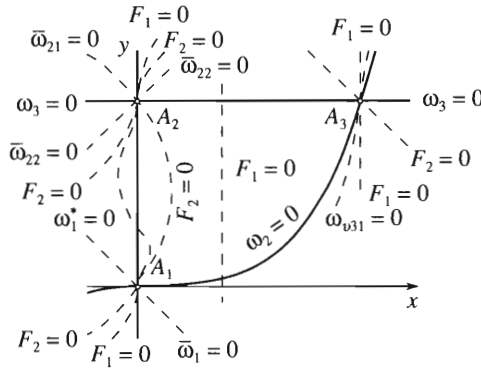
В окрестности точки A_3 вдоль направления $x-1 = 0$ в выражении (3.15)

$$n_x = 2\mu_{30}(y-1)^4 + 4(4\lambda_{10} - 3\lambda_{20})(y-1)^8 + o((y-1)^8)$$

$$n_y = 2\mu_{30}(y-1)^4 + (4\lambda_{20} + \lambda_{30})(y-1)^8 + o((y-1)^8)$$

и, следовательно,

$$a_3 = 4(4\lambda_{10} - 3\lambda_{20}), \quad b_3 = 4\lambda_{20} + \lambda_{30}, \quad c_3 = 2\mu_{30}$$



Фиг. 2

Полагая для определенности

$$\lambda_{10} = \lambda_{20} = \lambda_{30} = 2, \quad \mu_{10} = 1/4, \quad \mu_{20} = 1, \quad \mu_{30} = 1/2 \quad (3.16)$$

получим

$$b_1 = b_2 = 2, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 1, \quad a_3 = 8, \quad b_3 = 10$$

После подстановки этих значений в соотношения (3.9)–(3.14) найдем функции F_1 и F_2 , соответствующие заданным локальным топологическим структурам состояний равновесия A_i :

$$\begin{aligned}
 A_1: & \begin{cases} F_1 = \xi_{11} \omega_1 \omega_2^2 (x - 2^{1/3} y^3), & \xi_{11} > 0 \\ F_2 = \xi_{21} \bar{\omega}_1 (x - 3^{1/3} y^3) (x^4 + y^2), & \xi_{21} > 0 \end{cases} \\
 A_2: & \begin{cases} F_1 = \xi_{12} \omega_1 \omega_3 [x - 2^{1/3} (y - 1)^3], & \xi_{12} < 0 \\ F_2 = \xi_{22} \bar{\omega}_{21} \bar{\omega}_{22} [x - 3^{1/3} (y - 1)^3], & \xi_{22} > 0 \end{cases} \\
 A_3: & \begin{cases} F_1 = \xi_{13} \omega_2^2 \omega_3 [(x - 1) - 8(y - 1)^3], & \xi_{13} < 0 \\ F_2 = \xi_{23} [(x - 1)^2 + (y - 1)^4] \{ [(y - 1) - 3(x - 1)]^2 + (x - 1)^4 \}, & \xi_{23} > 0 \end{cases}
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$\bar{\omega}_1 = x + y, \quad \bar{\omega}_{21} = x + y - 1, \quad \bar{\omega}_{22} = x - y + 1$$

Этап 2. Построение F -функций в области Ω в целом. Используя выражения (3.17), составим графическую схему (фиг. 2) взаимного расположения в области Ω кривых, в точках которых искомые функции F_1 и F_2 равны нулю. Одно из основных требований к этим функциям состоит в выполнении неравенства (3.6), что равносильно отсутствию в области Ω точек пересечения кривых $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$, отличных от A_i . Этому условию удовлетворяют, в частности, функции

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \xi_1 \omega_1 \omega_2^2 \omega_3 \omega_{v31}^* \omega_1^* \omega_2^*, \quad \xi_1 < 0 \\
 F_2 &= \xi_2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_{22} \omega_{v22} \bar{\omega}_1^* r_1^4 [(x - 1)^2 + (y - 1)^4] \{ [y - 1 - 3(x - 1)]^2 + (x - 1)^4 \}, \quad \xi_2 > 0
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Множители ω_1^* , ω_{v31}^* , $\bar{\omega}_1^*$ таковы, что

1) тейлоровские разложения функции ω_1^* в точках A_1 и A_2 совпадают с точностью до членов третьего порядка включительно с аналогичными разложениями множителей ω_{v11} и $\omega_{v12} \equiv x - 2^{1/3}(y - 1)^3$ соответственно;

2) кривая $\omega_{v31}^* = 0$ не имеет общих точек с областью Ω , кроме точки A_3 , в которой ее тейлоровское разложение имеет вид $\omega_{v31}^* = (x - 1) - 8(y - 1)^3 + \dots$;

3) кривая $\bar{\omega}_1^* = 0$ (фиг. 2) аппроксимирует кривые $\omega_{v21} = 0$ и $\bar{\omega}_{21} = 0$ в состояниях равновесия A_1 и A_2 соответственно.

В частности, положим

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= \left\{ \left(y^4 + \frac{1}{2} \right) (y - 1)^4 + \left[(y - 1)^4 + \frac{1}{2} \right] y^4 \right\} x - 2^{1/3} y^3 \left(y - \frac{1}{2} \right) (y - 1)^3 \\ \omega_{v31}^* &= [1 + 28(y - 1)^2](x - 1) - 8(y - 1)^3, \quad \bar{\omega}_1^* = x + 3^{1/3} y^3 (y - 1) \\ \omega_2^* &= x - \frac{1}{2}, \quad \omega_{v22} = x - 3^{1/3} (y - 1)^3 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Проверка соответствия взаимного расположения этих кривых и кривых $\omega_i = 0$ схеме, указанной на фиг. 2, выполнена построением их графиков с помощью пакета программ Maple V.

Полагая, что коэффициенты в выражении (3.15) удовлетворяют равенствам (3.16), заменим координаты векторов \mathbf{n}_i и \mathbf{m}_j их явными выражениями (3.1) и (3.2). В результате получим окончательные выражения координат вектора \mathbf{n}

$$\begin{aligned} n_x &= 2L_{8,8,0}^{0,4,4} - 6x^2 L_{4,0,4}^{4,0,4} - \frac{1}{4} xy L_{0,2,4}^{2,2,4} - x(y - 1) L_{2,0,4}^{2,4,2} - \frac{1}{2} (x - 1)(y - 1) L_{2,0,4}^{4,2,2} \\ n_y &= 2L_{4,0,4}^{4,0,4} + 2L_{0,4,4}^{4,4,0} + \frac{1}{4} x^2 L_{0,2,4}^{2,2,4} + x^2 L_{2,0,4}^{2,4,2} + \frac{1}{2} (x - 1)^2 L_{2,4,0}^{4,2,2} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Подставив в систему (3.7) эти выражения n_x и n_y , а также F_1 и F_2 , по формулам (3.17) и $\xi_1 = -(n_x^2 + n_y^2)$, $\xi_2 = n_x^2 + n_y^2$, найдем правые части искомой системы уравнений (1.1), которая имеет данную топологическую структуру разбиения области Ω на траектории (фиг. 2) и представляет собой кинематические уравнения движения точки M .

Проверка правильности решения задачи выполнена графическими построениями (с помощью пакета компьютерных программ Maple V Release 5) векторных полей направлений $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} и $\mathbf{P}(X, Y)$, соответствующих найденным выражениями n_x , n_y , X , Y .

4. Построение управлений. Система уравнений (1.1) с правыми частями, построенными выше, определяет векторное поле скоростей движений точки M , обеспечивающих достижение цели управления задачи, сформулированной в разд. 2. Составляющие ускорений этих движений равны

$$\ddot{x} = \partial_x X \dot{x} + \partial_y X \dot{y} \quad (x \leftrightarrow y, X \leftrightarrow Y) \tag{4.1}$$

обусловлены действием на точку M силы $\mathbf{F}(F_x, F_y)$:

$$F_x = m(\partial_x X \dot{X} + \partial_y Y \dot{Y}) \quad (x \leftrightarrow y, X \leftrightarrow Y)$$

Для практической реализации программных движений точки M в области Ω более целесообразным представляется приложение к этой точке силы с координатами

$$F_x = m(\partial_x X\dot{x} + \partial_y X\dot{y}) + \Phi_x \quad (x \leftrightarrow y, X \leftrightarrow Y) \quad (4.2)$$

где $\Phi(\Phi_x, \Phi_y)$ – корректирующая сила, уменьшающая меру отклонения $\omega = (\dot{x} - X)^2 + (\dot{y} - Y)^2$ скорости движения точки M от величины, определяемой уравнениями системы (1.1). Кроме того, силу Φ следует выбрать так, чтобы система уравнений

$$\ddot{x} = \partial_x X\dot{x} + \partial_y X\dot{y} + \Phi_x/m \quad (x \leftrightarrow y, X \leftrightarrow Y) \quad (4.3)$$

имела в области $\Omega \times R^2$ фазового пространства (x, y, \dot{x}, \dot{y}) состояния равновесия, расположенные только в плоскости Oxy и их множество совпадало с множеством состояний равновесия системы уравнений (1.1) в области Ω .

Из выражения

$$(d\omega/dt)|_{(4.3)} = \frac{2}{m}[(\dot{x} - X)\Phi_x + (\dot{y} - Y)\Phi_y]$$

полной производной по времени от функции ω , вычисленной в силу уравнений системы (4.3), следует, что ω асимптотически стремится со временем к нулю, если

$$(\dot{x} - X)\Phi_x + (\dot{y} - Y)\Phi_y = -\lambda\omega^\sigma \quad (4.4)$$

где σ – натуральное число, λ – произвольная неотрицательная функция, которая может быть равна нулю только в тех точках, в которых $\omega = 0$. Такой выбор Φ_x и Φ_y возможен. В частности, положим

$$\Phi_x = -\frac{m\lambda_0}{2}(\dot{x} - X), \quad \Phi_y = -\frac{m\lambda_0}{2}(\dot{y} - Y), \quad \lambda_0 = \text{const} > 0 \quad (4.5)$$

что соответствует значениям $\sigma = 1$ и $\lambda = \lambda_0$ в соотношении (4.4). Из представления системы уравнений (4.3) в виде

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = \partial_x X\dot{x} + \partial_y X\dot{y} - \frac{\lambda_0}{2}(\dot{x} - X) \quad (x \leftrightarrow y, X \leftrightarrow Y, p \leftrightarrow q) \quad (4.6)$$

следует, что, если $\dot{x} = \dot{y} = \dot{p} = \dot{q} = 0$, то необходимо $X(x, y) = Y(x, y) = 0$. Это означает, что в области $\Omega \times R^2$ фазового пространства (x, y, p, q) состояния равновесия находятся только в плоскости Oxy и их множество принадлежит множеству состояний равновесия соответствующей системы уравнений (1.1) в области Ω . Верно и обратное утверждение: каждому состоянию равновесия (x_i, y_i) системы уравнений (1.1) из области Ω соответствует состояние равновесия $(x_i, y_i, 0, 0)$ системы (4.6) из области $\Omega \times R^2$ фазового пространства.

Рассмотрим влияние членов Φ_x и Φ_y , определяемых выражениями (4.5), на структуру состояний равновесия $A_i(x_i, y_i, 0, 0)$ системы уравнений (4.3) в двух следующих случаях.

1°. В окрестности состояния равновесия $A_i(x_i, y_i)$ правые части уравнений системы (1.1) имеют вид

$$X = a(x - x_i) + b(y - y_i) + o(r_i), \quad Y = c(x - x_i) + d(y - y_i) + o(r_i)$$

где a, b, c, d – постоянные такие, что $ad - bc \neq 0$. В этом случае из сравнения характеристических уравнений

$$\chi(k) \equiv (k - a)(k - d) - bc = 0, \quad k^2\chi(0) = 0 \quad \left(k - \frac{\lambda_0}{2}\right)^2 \chi(k) = 0$$

систем уравнений (1.1), (4.1) и (4.6) соответственно следует, что добавление членов Φ_x и Φ_y к правым частям уравнений системы (4.1), во-первых, не влияет на характер поведения проекций ее изображающих точек на плоскость $p = 0, q = 0$ в окрестности точки $(x_i, y_i, 0, 0)$ фазового пространства, а во-вторых, обеспечивает наличие пары отрицательных корней характеристического уравнения, которые соответствуют координатам p и q .

2°. Разложения правых частей X и Y системы уравнений (1.1) по степеням $x - x_i$ и $y - y_i$ не содержат линейных членов. В этом случае в окрестности состояния равновесия $A_i(x_i, y_i, 0, 0)$ система уравнений (4.6) имеет вид

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\lambda_0}{2}(p - X) \quad (x \leftrightarrow y, X \leftrightarrow Y, p \leftrightarrow q) \tag{4.7}$$

а ее характеристическим уравнением является равенство $k^2(k - \lambda_0/2)^2 = 0$. Из этого уравнения и того факта, что вычисленная в силу системы уравнений (4.7) полная производная $d\omega/dt$ равна $-\lambda_0\omega$, следует, что при $t \rightarrow +\infty$ (или $t \rightarrow -\infty$) справедливы следующие оценки:

$$\omega \sim \exp(-\lambda_0 t), \quad x \sim t^{-1/n}, \quad y \sim t^{-1/n}$$

где $n + 1$ – порядок разложений функций X и Y по степеням $x - x_i$ и $y - y_i$. Так как скорость стремления со временем к нулю функции ω значительно больше скорости стремления координат x и y к значениям x_i и y_i , можно заключить, что характер поведения проекций изображающих точек системы на плоскость $p = 0, q = 0$ фазового пространства (x, y, p, q) подобен поведению решений системы (1.1) в окрестности соответствующей точки A_i .

Выполнив подстановку выражений (4.5) в соотношения (4.2), найдем координаты силы

$$F_x = m \left[\partial_x X \dot{x} + \partial_y X \dot{y} - \frac{\lambda_0}{2}(\dot{x} - X) \right] \quad (x \leftrightarrow y, X \leftrightarrow Y)$$

обеспечивающей достижение цели управления движением материальной точки M .

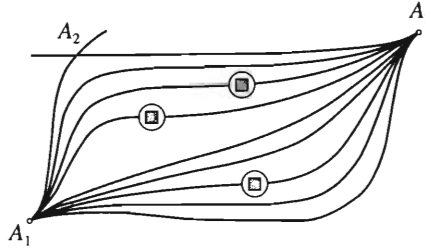
5. Дополнение. Движения точки, определяемые уравнениями (1.1) с правыми частями, построенными в разд. 3, из начального положения $A_1(0, 0)$ (фиг. 1) в конечное положение $A_3(1, 1)$ осуществляются бесконечно долго. В связи с этим рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f_1^{2/3} X(x, y), \quad \dot{y} = f_3^{2/3} Y(x, y) \tag{4.8}$$

где

$$f_i \equiv a_i x + b_i y + c_i \quad (a_i, b_i, c_i - \text{const}; i = 1, 3)$$

причем прямая $f_i = 0$ пересекает отрезок $A_i A_2$ прямой $\omega_i = 0$ и дугу $A_1 A_3$ кривой $\omega_3 = 0$ в точках некоторой достаточно малой ε -окрестности точки A_1 при $i = 1$ и точки A_3 при $i = 3$. Внутри области, ограниченной линиями $\omega_i = 0$, система уравнений (4.8) и соответствующая ей система уравнений (1.1) определяют одни и те же траектории, но разные значения модулей скоростей движения точки по этим траекториям. В частности, в точках прямых $f_1 = 0$ и $f_3 = 0$, расположенных внутри области, ограниченной линиями $\omega_i = 0$, координаты скорости \dot{x} и \dot{y} равны нулю, но сами эти точки не являются состояниями равновесия системы уравнений (4.8), так как решение уравнения $\dot{x} = x^{2/3}$ имеет вид $x^{1/3} = (t + C)/3$, где C – постоянная интегрирования. Следовательно, время движения изображающей точки внутри указанной области из некото-



Фиг. 3

рой точки прямой $f_1 = 0$ до прямой $f_3 = 0$ является конечным, а приведенное выше решение задачи, сформулированной в разд. 2, может быть использовано для решения задачи нахождения управляющей силы, под действием которой материальная точка перемещается, не покидая области Ω , за конечное время из данного начального положения M_0 , расположенного на прямой $f_1 = 0$ в достаточно малой окрестности точки A_1 , в конечное положение M_k , являющееся точкой прямой $f_3 = 0$, из достаточно малой окрестности точки A_3 ; при этом начальная и конечная скорости управляемого движения точки равны нулю.

6. Заключение. Целесообразность применения изложенного в данной работе метода решения задачи, сформулированной в разд. 2, обусловлена еще и тем, что

1) допускается включение в правые части уравнений (1.1) произвольных функций (называемых функциями Еругина), которые не влияют на топологическую структуру искомым систем уравнений вида (1.1) и могут быть использованы для обеспечения дополнительных свойств описываемых ими движений управляемых объектов;

2) при численном интегрировании уравнений (1.1), выражающих цель движения, нет необходимости использовать неравенства для формулировки условий нахождения управляемой точки в области допустимых положений и проверки этих условий на каждом шаге интегрирования, так как уравнения (1.1) определяют векторное поле скоростей, обеспечивающих достижение этой цели из любого допустимого положения точки; при этом реализуется обратная связь по координатам.

Замечания. 1°. Рассмотренную задачу (разд. 2) можно усложнить, предположив, что область Ω содержит препятствия, минуя которые, точка M должна переместиться из начального положения в конечное в соответствии с ранее указанными требованиями (фиг. 3); необходимые для этого теоретические положения и алгоритмы изложены ранее [11].

2°. Выполненное решение задачи о целенаправленном движении точки может быть использовано в сочетании с методом декомпозиции [16] для аналитического построения уравнений программных движений узлов манипуляционных систем и синтеза управлений, обеспечивающих реализацию этих движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнев Г.В. Очерки механики целенаправленного движения. М.: Наука, 1980. 192 с.
2. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981. 143 с.
3. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986. 224 с.
4. Альмухамедов М.И. Обратная задача качественной теории дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1963. № 4. С. 3–6.
5. Альмухамедов М.И. О конструировании дифференциального уравнения, имеющего своими предельными циклами заданные кривые // Изв. вузов. Математика. 1965. № 1. С. 12–16.
6. Мухарлямов Р.Г. К обратным задачам качественной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 10. С. 1673–1681.

7. Галиуллин А.С. Построение уравнений движения // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 192–237.
8. Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение уравнений программного движения управляемых систем. М.: Изд. УДН, 1969. 194 с.
9. Программное движение механических систем // Под ред. Галиуллина А.С. Учеб. пособие. М.: Изд. УДН, 1971. 157 с.
10. Дифференциальные уравнения и обратные задачи динамики / Ред. Галиуллин А.С. М.: УДН, 1983. 159 с.
11. Волков С.В. Построение дифференциальных операторов динамических систем. М.: Изд-во РУДН, 1999. 213 с.
12. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
13. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966, 568 с.
14. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 6. С. 659–670.
15. Frommer M. Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen // Math. Ann. 1928. Bd. 99. S. 222–272 = Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // Успехи мат. наук. 1941. Вып. 9. С. 212–253.
16. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции в управлении механическими и электромеханическими системами // Синтез систем управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции. М.: Ин-т проблем управления. 1987. С. 4–15.

Москва
e-mail: svvolkov@sci.pfu.edu.ru

Поступила в редакцию
8.X.2003