

УДК 62–50

© 2005 г. Ю. Н. Желнин, А. А. Меликян, А. Е. Утемов, Ф. Л. Черноушко

НАЙСКОРЕЙШЕЕ ПРИВЕДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО МАНЕВРИРУЮЩЕГО ОБЪЕКТА В ОПТИМАЛЬНУЮ ПОЗИЦИЮ

Рассматривается дифференциальная игровая задача с двумя игроками (автомобилями), в которой один автомобиль преследует другого. Роли игроков фиксированы, а минимизируемым (первым игроком) и максимизируемым (вторым игроком) функционалом является максимальное значение заданной скалярной неотрицательной функции (функции качества) фазового вектора вдоль траектории динамической системы на достаточно большом промежутке времени. Нулевое значение функции качества соответствует ситуации, когда догоняющий находится позади убегающего на заданном расстоянии от него, а векторы скоростей сонаправлены и лежат на одной прямой. Подробно исследуется частный случай, когда преследуемый автомобиль неподвижен, а преследующий движется на плоскости с постоянной по величине скоростью при некотором ограничении радиуса разворота. Условие окончания игры – перевод автомобиля на окружность заданного радиуса, при этом вектор скорости должен быть направлен к центру окружности. Выписываются и анализируются соотношения принципа максимума Понтрягина, характеризующие оптимальные программные управления. Основной результат работы – синтез оптимального управления по обратной связи.

Для моделирования процесса управления двумя или несколькими движущимися объектами в условиях конфликта, когда перед маневрирующими объектами стоят противоположные цели, а их возможности различны, широко используется аппарат теории дифференциальных игр, получивший значительное развитие в последние десятилетия [1, 2]. Точное решение задач теории дифференциальных игр представляет большие трудности, особенно для нелинейных систем. В некоторых случаях для разработки алгоритмов численного построения синтеза управления бывает полезным рассмотреть упрощенную задачу, решение которой удастся довести до конца, и на основе полученных результатов продвинуться к решению исходной задачи.

В данной работе изучается предельный случай плоской игровой задачи преследования с двумя игроками, сводящий исходную игровую задачу к нелинейной задаче оптимального управления.

1. Дифференциальная игра. Игра происходит на плоскости. В ней участвуют два игрока: преследователь P (первый игрок) и убегающий E (второй игрок). Скорости игроков P и E постоянны и равны V_1 и V_2 , а радиусы кривизны траекторий движения ограничены снизу заданными величинами R_1 и R_2 соответственно. Предполагаем, что оба игрока в каждый момент времени управляют выбором значения кривизны своей траектории, располагая информацией о текущем положении системы в фазовом пространстве координат $(r, \varphi_1, \varphi_2)$ и о величинах V_1, V_2, R_1, R_2 . Здесь r – расстояние между игроками, а $\varphi_1(\varphi_2)$ – угол между векторами скорости первого (второго) игрока и отрезком PE . Угол φ_1 отсчитывается против часовой стрелки, угол φ_2 – по часовой стрелке, (фиг. 1). Углы, различающиеся на $2\pi n$, где n – целое число, отождествляются. Величины V_k, R_k считаются неотрицательными, точнее, $V_1 \geq 0, V_2 \geq 0, R_1 > 0, R_2 > 0$.



Фиг. 1

Эквивалентное описание динамики точек P и E состоит в том, что точки, обладающая некоторой массой, управляют своим движением с помощью силы, перпендикулярной к их скорости и ограниченной по величине. Подобная модель нередко применяется для описания движения самолетов.

Используя выкладки, аналогичные проделанным ранее [1], можно показать, что динамика относительного положения игроков описывается нелинейной системой трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V_2 \cos \varphi_2 - V_1 \cos \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 &= \frac{V_1 \sin \varphi_1 + V_2 \sin \varphi_2}{r} - \frac{V_1}{R_1} u, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{V_2}{R_2} v - \frac{V_1 \sin \varphi_1 + V_2 \sin \varphi_2}{r} \end{aligned} \quad (1.1)$$

и ограничениями

$$|u| \leq 1, \quad |v| \leq 1 \quad (1.2)$$

Здесь u , v – управляющие параметры игроков P и E .

По физическому смыслу переменная r неотрицательна, что фактически является фазовым ограничением для системы (1.1). При построении синтеза это ограничение будет учитываться.

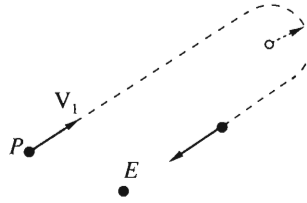
Платой в рассматриваемой игре является величина

$$J[u, v] = \min_{t \geq 0} L(r(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)) \quad (1.3)$$

Здесь $r(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – траектория системы (1.1), соответствующая заданным управлениям u , v игроков, а функция качества L имеет вид

$$L(r, \varphi_1, \varphi_2) = A_1 \varphi_1^2 + A_2 \varphi_2^2 + A_3 (r - R)^2 \quad (1.4)$$

где A_1, A_2, A_3, R – заданные неотрицательные постоянные. Управления u , v могут быть программными или в форме синтеза; основное требование к ним – существование решения системы (1.1). Функция $L(r, \varphi_1, \varphi_2)$ может трактоваться как вероятность поражения второго игрока первым из позиции $(r, \varphi_1, \varphi_2)$. Чем меньше значение функции L в данный момент времени, тем предпочтительней положение первого игрока для поражения второго. Тем самым первый игрок стремится так выбрать свою стратегию, чтобы минимизировать величину $J[u, v]$, второй, наоборот, ее максимизировать. Очевидно, что наиболее благоприятный момент для окончания игры со стороны первого игрока соответствует позиции $(R, 0, 0)$, доставляющей функции качества L глобальный минимум, равный нулю. С физической точки зрения это положение соответствует тому, что догоняющий находится позади убегающего на расстоянии R от него, а скорости игроков сонаправлены и лежат на общей прямой.



Фиг. 2

Рассмотрим задачу о нахождении оптимальной стратегии $u^*(r, \varphi_1, \varphi_2, t)$ первого игрока и соответствующего гарантированного значения функционала $J[u, v]$:

$$L^* = \min_{|u| \leq 1} \max_{|v| \leq 1} J[u, v] = \min_{|u| \leq 1} \max_{|v| \leq 1} \min_{t \geq 0} L(r(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)) \quad (1.5)$$

Функция L^* (цена игры) зависит от начального положения системы $(r_0, \varphi_1^0, \varphi_2^0)$. Максимизацию по v в (1.5) достаточно рассмотреть по программным управлениям $v(t), |v(t)| \leq 1$. Более детальная формулировка игровой задачи не дается, поскольку ниже рассматривается ее упрощенный вариант.

Определим число существенных параметров системы (1.1) в предположении $R_1 > 0, V_1 > 0$. Проведем следующую замену переменных:

$$r' = \frac{r}{R_1}, \quad \lambda = \frac{V_2}{V_1}, \quad V' = \frac{V}{V_1}, \quad \mu = \frac{V_2/R_2}{V_1/R_1}, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0 \quad (1.6)$$

Тогда система (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \lambda \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 &= \frac{\sin \varphi_1 + \lambda \sin \varphi_2}{r} - u, \quad \dot{\varphi}_2 = \mu v - \frac{\sin \varphi_1 + \lambda \sin \varphi_2}{r} \end{aligned} \quad (1.7)$$

с двумя существенными постоянными λ, μ вместо четырех в системе (1.1). При этом ограничения (1.2) сохраняются. В функции (1.4) величина R переходит в $R' = R/R_1$.

Сформулированная игровая задача с функционалом типа минимума одна из трудных задач теории дифференциальных игр, поскольку для нее не выполняется принцип оптимальности Беллмана, а задача динамического программирования сводится к уравнению Беллмана с неизвестной границей.

В данной работе рассматривается эта задача с предельными значениями параметров, которая позволяет исследовать частный случай, когда скорость убегающего значительно меньше скорости догоняющего игрока ($V_2 \ll V_1$).

Предположим, что следующие три параметра в соотношениях (1.4), (1.7) обращаются в нуль:

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad A_2 = 0 \quad (1.8)$$

Физически этот предельный случай означает, что убегающий игрок неподвижен, и его управление тождественно равно нулю на интервале движения. Нетрудно показать, что при данных упрощениях существует бесконечное множество стратегий $u^*(t)$ догоняющего игрока, приводящих систему в наилучшую для этого игрока позицию $(R, 0, 0)$. Действительно, этому игроку из любого начального положения следует удалиться от убегающего на достаточное расстояние, далее совершить разворот по направлению к нему так, чтобы $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$, и затем по прямой прийти в указанную точку (см. фиг. 2).

Заметим, что предельный переход (1.8) сводит игровую задачу к задаче оптимального управления для одного игрока. При этом ввиду существования бесконечного множества оптимальных в смысле (1.5) стратегий $u^*(t)$, доставляющих функционалу L глобальный минимум, равный нулю, целесообразно ввести в рассмотрение новый дополнительный функционал и отыскать стратегию, оптимальную в смысле этого функционала. В качестве дополнительного функционала будет рассматриваться время достижения точки $(R, 0, 0)$.

2. Постановка задачи оптимального управления. Пусть движение нелинейного управляемого объекта в двумерном фазовом пространстве при $t \geq t_0$ описывается системой уравнений

$$\dot{x}_1 = -\cos x_2, \quad \dot{x}_2 = -u + \frac{\sin x_2}{x_1} \quad (2.1)$$

Здесь x_1, x_2 – координаты фазового вектора системы (2.1), u – управляющий параметр, удовлетворяющий ограничению

$$|u| \leq 1 \quad (2.2)$$

Предполагается, что в начальный момент времени состояние объекта задано:

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0 \quad (2.3)$$

Система (2.1), (2.2) описывает дифференциальную игру (1.7), (1.2) с упрощениями (1.8), когда игра вырождается в задачу оптимального управления. При этом x_1 – расстояние r между игроками, x_2 – угол φ_1 (фиг. 1). Отметим, что если $x_1 = 0$, то теряет смысл переменная x_2 , и система (2.1) имеет особенность, которая исчезает при использовании других переменных, например, декартовых координат в абсолютном пространстве, см. [6]. Ниже при построении оптимального синтеза подобные переменные также используются.

В качестве класса допустимых управлений выберем кусочно-непрерывные скалярные функции $u(t)$, удовлетворяющие ограничению (2.2).

Требуется найти оптимальное по быстродействию управление u^* , переводящее систему из некоторого начального состояния (2.3) в целевую точку $O(R, 0)$:

$$x_1(t_1) = R, \quad x_2(t_1) = 0 \quad (2.4)$$

и соответствующие ему траекторию и время $T = t_1 - t_0$.

3. Синтез управления. В данном разделе предлагается некоторый синтез управления, оптимальность которого будет доказана ниже.

Проведем сначала некоторые вспомогательные построения с использованием принципа максимума Понтрягина [3, 4], а затем дадим описание предлагаемого синтеза.

Обозначим через Ψ_1, Ψ_2 переменные, сопряженные к x_1, x_2 , и выпишем гамильтониан системы (2.1)

$$H(t, \Psi, x, u) = -\Psi_1 \cos x_2 - \Psi_2 u + \Psi_2 \frac{\sin x_2}{x_1} \quad (3.1)$$

Максимизацией гамильтониана с учетом ограничения (2.2) получаем, что оптимальное управление u^* имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \Psi_2 < 0 \\ -1, & \Psi_2 > 0 \\ \theta, & \text{где } \theta \in [-1, 1], \quad \Psi_2 = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Выясним, какие значения может принимать величина θ . Выпишем канонические уравнения принципа максимума:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\cos x_2 = f_1(x_2), & \dot{x}_2 &= -u + \frac{\sin x_2}{x_1} = f_2(x_1, x_2, u) \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \frac{\sin x_2}{x_1^2}, & \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 \sin x_2 - \psi_2 \frac{\cos x_2}{x_1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если $\psi_2 \equiv 0$, то $\dot{\psi}_2 \equiv 0$, и из последнего уравнения (3.3) получаем, что на такой траектории $\psi_1 \sin(x_2) \equiv 0$. Так как принцип максимума требует, чтобы ψ_1 и ψ_2 одновременно в нуль не обращались, то вследствие непрерывности функции $x_2(t)$ на $[t_0, t_1]$ имеем $x_2(t) \equiv \pi n$, где n – целое число. Тогда $\dot{x}_2(t) \equiv 0$, и из второго уравнения (3.3) получаем, что при $\psi_2 \equiv 0$ выполняется тождество $u \equiv 0$. Это означает, что величина θ может принимать единственное значение, равное нулю. Соответствующие траектории удобно интерпретировать в исходном пространстве. Например, если на некотором интервале времени игрок P использует постоянное управление $u = 1$, то точка P движется по часовой стрелке вдоль единичной окружности; при $u = -1$ происходит движение против часовой стрелки, а при $u = 0$ – движение по прямой.

Итак, оптимальные траектории в абсолютном пространстве должны состоять из дуг окружностей единичного радиуса и прямых. Причем при движении по прямой фазовая координата x_2 равна целому числу π , что означает перемещение игрока P вдоль линии, соединяющей игроков. Аналогичный класс траекторий использовался [5] для построения областей достижимости.

В силу 2π -периодичности функций f_1 и f_2 в уравнениях (3.3) по переменной x_2 фазовая картина оптимальных траекторий должна быть 2π -периодична относительно этой переменной.

Отметим также, что из соображений симметрии и из свойств функций f_1 и f_2

$$f_1(2\pi - x_2) = f_1(x_2), \quad f_2(x_1, 2\pi - x_2, -u) = -f_2(x_1, x_2, u)$$

следует, что оптимальные траектории на отрезке $[0, 2\pi]$ симметричны относительно прямой $x_2 = \pi$, которая, как будет показано позже, в принятой терминологии [1] является сингулярной поверхностью. Поэтому достаточно синтезировать решение в области

$$G = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_2 \leq \pi, x_1 \geq 0\}$$

Полупрямые $\{x_2 = 0, x_1 \geq 0\}$, $\{x_2 = \pi, x_1 \geq 0\}$ обозначим через m и l соответственно. Из изложенных выше соображений следует, что все прямолинейные участки оптимальных траекторий в области G принадлежат либо полупрямой m , либо l .

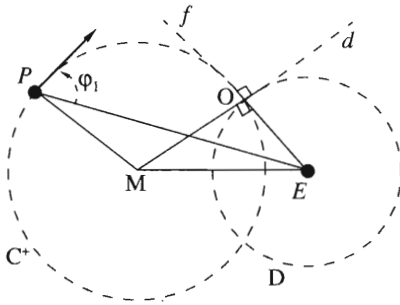
Обозначим через C^+ и C^- окружности единичного радиуса в абсолютном пространстве, являющиеся траекториями движения игрока P при применении последним, начиная с момента времени t_0 , постоянного управления $u = 1$ и $u = -1$ соответственно. Найдем множество начальных позиций (2.3) игрока P , из которых этот игрок может достичь точки O , двигаясь по окружности C^+ или C^- .

Пусть, для определенности, игрок P из некоторой начальной позиции (2.3) применением постоянного управления $u = 1$ в момент времени t_1 достигает точки O . Тогда окружности C^+ и D (с центром в точке E и радиуса R) в точке пересечения O имеют перпендикулярные касательные f и d соответственно (фиг. 3). Из этого следует, что

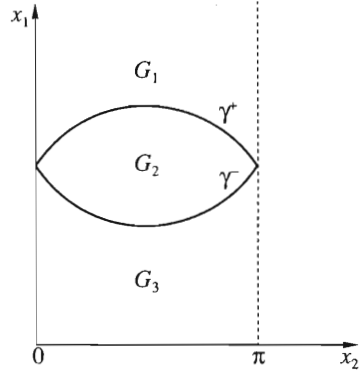
$$|ME|^2 = |MO|^2 + |OE|^2 = 1 + R^2$$

Рассмотрим треугольник PEM , для него

$$|PE| = x_1, \quad |ME|^2 = 1 + R^2, \quad |MP| = 1, \quad \angle MPE = \pi/2 - x_2$$



Фиг. 3



Фиг. 4

По теореме косинусов получаем

$$x_1^2 - 2x_1 \sin x_2 - R^2 = 0$$

откуда

$$x_1(x_2) = x_1^+(x_2, R) \tag{3.4}$$

Здесь и далее используются обозначения

$$x_1^+(x_2, R) = \sin x_2 + \sqrt{\sin^2 x_2 + R^2}, \quad x_1^-(x_2, R) = -\sin x_2 + \sqrt{\sin^2 x_2 + R^2}$$

Прделавав аналогичные выкладки для случая $u = -1$, получаем

$$x_1(x_2) = x_1^-(x_2, R) \tag{3.5}$$

Обозначим кривые, задаваемые уравнениями (3.4), (3.5), через γ^+ и γ^- соответственно. Они делят множество $G' = G \setminus (m \cup l)$ на 3 подмножества (фиг. 4)

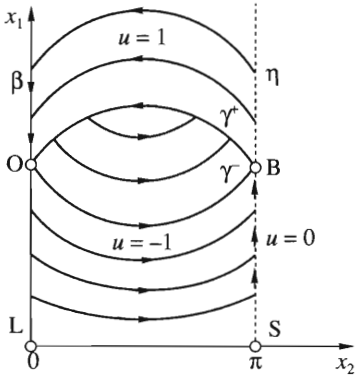
$$G_1 : x_1 \geq x_1^+(x_2, R), \quad G_2 : x_1^-(x_2, R) \leq x_1 < x_1^+(x_2, R), \quad G_3 : x_1 < x_1^-(x_2, R)$$

Дадим описание предлагаемого синтеза в области G . В построениях будем использовать траектории точки P в абсолютном пространстве, а фазовый портрет будет дан в координатах (x_1, x_2) .

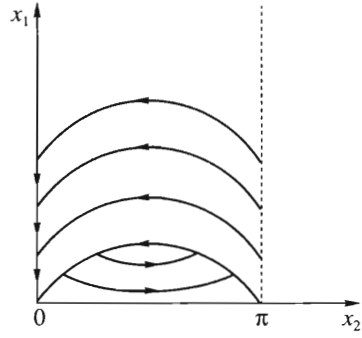
По построению точки множества G_1 обладают тем свойством, что существует траектория, состоящая из дуги окружности C^+ и отрезка полупрямой m , приводящая игрока P в целевую точку. Поэтому в предлагаемом синтезе считаем, что в области G_1 выполняется равенство $u = 1$.

Для стартовых точек из множества G_2 траектории, описанные выше, не позволяют привести игрока P в целевую точку из-за близости окружностей C^+ и D (фиг. 3). К успеху здесь приводит использование управления $u = -1$ до достижения кривой γ^+ , на которой управление уже известно. Поэтому в области G_2 положим $u = -1$.

Сложнее обстоит дело на множестве G_3 . Вследствие близости игроков здесь требуется вначале увеличить расстояние между ними. Один из возможных маневров, обеспечивающих быстрое удаление игрока P от игрока E , состоит из дуги окружности C^+ и отрезка полупрямой l . При движении по прямой игрок P через некоторое время дости-



Фиг. 5



Фиг. 6

гает кривой γ^+ , по которой далее попадает в целевую точку O . При таком маневре $u = -1$ на множестве G_3 .

Рассмотрим точки $L(0, 0)$, $O(R, 0)$, $S(0, \pi)$, $B(R, \pi)$. Точки L и O (точки S и B) делят полупрямую m (полупрямую l) на две части: отрезок LO (отрезок SB) и полупрямую β (полупрямую η). Положим $u = 0$, если $P \in SB \cup \beta$. Если же $P \in LO \cup \eta$, то в этом случае возможны оба варианта: $u = 1$ или $u = -1$. Отрезок SB и полупрямая β в принятой терминологии [1] являются универсальными поверхностями, а отрезок LO и полупрямая η – рассеивающими поверхностями.

Полученный синтез изображен на фиг. 5.

С использованием принципа максимума была решена [6, 7] подобная задача о наибоыстрейшем переводе системы (2.1), (2.2), но в других фазовых переменных из начального положения (2.3) в начало координат: $x_1(t_1) = 0$, $x_2(t_1) = 0$; построенный оптимальный синтез в фазовых координатах (x_1, x_2) имеет вид, представленный на (фиг. 6), и совпадает с синтезом, предложенным в данной работе в случае, если $R = 0$ в соотношении (2.4). Близкие задачи рассматривались в [8, 9]. Некоторые элементы предложенного синтеза построены в [1].

4. Обоснование оптимальности синтеза. Покажем, что синтез, построенный в разд. 3, удовлетворяет необходимому условию оптимальности нелинейной задачи – принципу максимума Понтрягина.

Зафиксируем произвольную точку $q \in G$ и рассмотрим соответствующий синтезу процесс, переводящий игрока P из этой точки в целевую точку O в момент времени t_q . Для доказательства выполнения принципа максимума достаточно предъявить такую вектор-функцию $\psi(t)$, определенную на отрезке $[t_0, t_q]$, что на этом отрезке имеет место (3.3) и выполняются следующие два условия:

$$\psi(t) \neq \bar{0} \tag{4.1}$$

$$u = \operatorname{argmax}_{|u| \leq 1} H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = -\operatorname{sign}(\psi_2(t)) \tag{4.2}$$

Подходящей нормировкой вектора сопряженных координат из выражения (3.1) можно получить

$$H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = 1, \quad t \in [t_0, t_q] \tag{4.3}$$

Найдем значение функции ψ на интервале времени, на котором $u = 0$ (что соответствует движению игрока P либо по полупрямой β , либо по отрезку SB). Из изложенного выше следует, что в этом случае выполнено $\psi_2 = 0$. Тогда с учетом постоянства гамильтониана получаем, что при $u = 0$ имеет место равенство

$$-\psi_1 \cos x_2 = 1 \tag{4.4}$$

Из этого равенства следует, что $\psi_1 = -1$, если $P \in \beta$, и $\psi_1 = 1$, если $P \in SB$.

Точка q из множества G либо принадлежит одному из множеств G_1, G_2, G_3 , либо $q \in \beta \cup SB$. Отрезок LO и полупрямую η рассматривать не обязательно, так как они не содержат траекторий.

Пусть $q \in G_3$. Тогда траектория состоит из дуги окружности C^- , отрезка полупрямой l и дуги окружности, соответствующей кривой γ^+ . Обозначим через N точку переключения траектории движения с окружности C^- на полупрямую l . Предположим, что игрок P достигает точки N в момент времени $t_N, t_0 < t_N < t_q$, а точки B в момент времени $t_B, t_N < t_B < t_q$. На отрезке $[t_N, t_B]$, как было показано выше, значение функции ψ известно:

$$\psi(t) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \text{если } t \in [t_N, t_B] \quad (4.5)$$

Покажем, что функция $\psi(t)$, определенная на отрезке $[t_B, t_q]$ и являющаяся решением задачи Коши для системы (3.3) с начальным условием

$$x(t_B) = \begin{vmatrix} R \\ \pi \end{vmatrix}, \quad \psi(t_B) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

удовлетворяет условиям (4.1), (4.2).

Так как на кривой γ^+ управление $u = 1$, то из выражения (3.2) следует, что выполнение условия (4.2) фактически означает следующее:

$$\psi_2(t) < 0, \quad t \in (t_B, t_q) \quad (4.7)$$

Отсюда автоматически следует условие (4.1).

Обозначим через $t_{\pi/2}$ момент времени $t = (t_q + t_B)/2$. Можно показать, что при $t = t_{\pi/2}$ выполняется равенство $x_2(t_{\pi/2}) = \pi/2$. Отсюда при учете соотношений (3.4), (4.3) следует

$$\psi_2(t_{\pi/2}) = -1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} \quad (4.8)$$

Функция $\psi_2(t)$ не имеет нулей на интервалах $(t_B, t_{\pi/2})$ и $(t_{\pi/2}, t_q)$.

Докажем, что функция $\psi_2(t)$ не имеет нулей на интервале $(t_B, t_{\pi/2})$. Рассмотрим эту функцию в правой полукрестности точки $t = t_B$. Из соотношений (3.3), (4.6) следует, что $\psi_2(t_B) = 0$. Вычислив вторую производную

$$\ddot{\psi}_2(t) = \psi_1 u \cos x_2 - \psi_2 u \frac{\sin x_2}{x_1} \quad (4.9)$$

с учетом условия (4.6) получаем $\ddot{\psi}_2(t_B) = -1$, т.е. функция $\psi_2(t)$ монотонно убывает в некоторой окрестности точки $t = t_B$. Пусть $\psi_2(t)$ имеет N нулей на интервале $(t_B, t_{\pi/2})$, где $N > 0$. Предположим, что первый нуль достигается в точке $t', t_B < t' < t_{\pi/2}$. Тогда из равенства (4.3) получаем

$$\psi_1(t') = -\frac{1}{\cos x_2} \quad (4.10)$$

Отсюда, так как на этом интервале времени $x_2 \in (\pi/2, \pi)$, следует оценка $\psi_1(t') > 1$. С другой стороны, используя уравнения (3.3), можно показать, что при $t \in (t_B, t')$ имеет место неравенство $\psi_1(t) < 0$. Тогда в силу условия (4.6) $\psi_1(t') < 1$. Полученное противоречие доказывает, что функция $\psi_2(t)$ не имеет нулей на интервале $(t_B, t_{\pi/2})$.

Покажем, что $\psi_2(t)$ не имеет нулей на интервале $(t_{\pi/2}, t_q)$. Для этого перейдем в системе (3.3) к независимой переменной x_2 . Это можно сделать, так как из соотношений (3.3), (3.4) следует оценка

$$\dot{x}_2 < 0, \quad t \in [t_B, t_q] \quad (4.11)$$

Система (3.3) после замены независимой переменной примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_1 \cos x_2}{x_1 - \sin x_2} \\ \dot{\psi}_1 &= -\frac{\Psi_2 \sin x_2}{x_1(x_1 - \sin x_2)}, \quad \dot{\psi}_2 = \frac{\Psi_1 x_1 \sin x_2}{x_1 - \sin x_2} + \Psi_2 \frac{\cos x_2}{x_1 - \sin x_2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Полагая $R = 0$ в выражении (3.4), имеем $x_1(x_2) = 2 \sin x_2$. Решение системы (4.12) в этом случае удастся получить аналитически. При этом функции ψ_1^* , ψ_2^* , являющиеся решением системы, имеют вид

$$\psi_1^*(x_2) = -\cos x_2, \quad \psi_2^*(x_2) = -2 \sin^2 x_2 \quad (4.13)$$

Откуда следует, что

$$|\psi_1^*(x_2)| \leq 1, \quad x_2 \in [0, \pi] \quad (4.14)$$

Покажем, что справедлива оценка

$$\psi_1(x_2) \geq \psi_1^*(x_2), \quad x_2 \in [0, \pi] \quad (4.15)$$

Рассмотрим функцию $\Delta(x_2) = \psi_1(x_2) - \psi_1^*(x_2)$, полагая $R > 0$ в выражении (3.4). Из соотношений (3.3), (4.6), (4.13) следует, что $\Delta(\pi) = 0$, $\dot{\Delta}(\pi) = 0$. После вычислений второй производной получаем $\ddot{\Delta}(\pi) = 1$.

Пусть при некотором x_2 выполняется неравенство $\Delta(x_2) < 0$. Тогда существует точка $x_2 = x_2', x_2' \in (0, \pi)$, в которой

$$\Delta(x_2') = 0, \quad \dot{\Delta}(x_2') > 0 \quad (4.16)$$

Вычислим $\dot{\Delta}(x_2')$, используя систему (4.12). Для этого из равенства (4.3) выразим ψ_2 через ψ_1 и подставим во второе уравнение (4.12). Далее, подставив в полученное равенство выражение (3.4), найдем

$$\dot{\psi}_1(x_2') = (1 + \psi_1 \cos x_2') \frac{\sin x_2'}{\sin^2 x_2' + R^2} \quad (4.17)$$

Учитывая, что $\psi_1(x_2') = \psi_1^*(x_2')$, из соотношений (4.13), (4.17) имеем

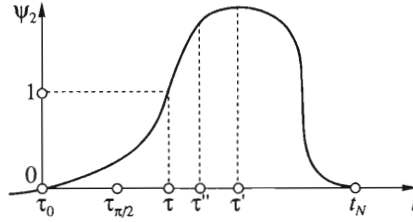
$$\dot{\Delta}(x_2') = -\frac{R^2 \sin x_2'}{\sin^2 x_2' + R^2}$$

Так как $x_2' \in [0; \pi]$, то согласно этому равенству $\dot{\Delta}(x_2') < 0$, что находится в противоречии с неравенством в (4.16).

Пусть функция $\psi_2(t)$ на интервале $(t_{\pi/2}, t_q)$ обращается в нуль при $t = t''$, $t_q < t'' < t_{\pi/2}$. Тогда используя равенство (4.3), получаем $\psi_1(t'') < -1$, что противоречит оценке (4.15).

Докажем, что на отрезке $[t_0, t_N]$ функция $\psi(t)$, являющаяся решением краевой задачи Коши для системы (3.3) с граничным условием

$$x(t_N) = \begin{pmatrix} x_N \\ \pi \end{pmatrix}, \quad \psi(t_N) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$



Фиг. 7

где x_N – расстояние между игроками в точке N , также удовлетворяет условиям (4.1), (4.2). Так как в области G_3 имеем $u = -1$, то в силу выражения (3.2) достаточно показать, что

$$\psi_2(t) > 0, \quad t \in (t_0, t_N) \quad (4.19)$$

Отсюда автоматически следует условие (4.1).

Рассмотрим функцию $\psi_2(t)$ в левой полуокрестности точки $t = t_N$. В силу соотношений (3.3), (4.9), (4.18) имеем

$$\psi_2(t_N) = 0, \quad \dot{\psi}_2(t_N) = 0, \quad \ddot{\psi}_2(t_N) = 1 \quad (4.20)$$

Отсюда получаем, что функция $\psi_2(t)$ положительна в некоторой левой полуокрестности точки t_N .

Если $x_2(t_0) \geq \pi/2$, то техника доказательства неравенства (4.19) аналогична случаю $t \in (t_B, t_{\pi/2})$.

Пусть $x_2(t_0) < \pi/2$. Обозначим через $\tau_{\pi/2}$ момент времени t , при котором $x_2(\tau_{\pi/2}) = \pi/2$. Используя соотношение (4.3), можно показать, что в этой точке имеет место неравенство $\psi_2(\tau_{\pi/2}) > 0$.

Предположим, что функция $\psi_2(t)$ имеет на интервале $(t_0, \tau_{\pi/2})$ ближайший к точке $\tau_{\pi/2}$ нуль при $t = \tau_0$, $t_0 < \tau_0 < \tau_{\pi/2}$ (фиг. 7). Тогда с учетом соотношений (3.3), (4.3), (4.9) получаем

$$\psi_2(\tau_0) = 0, \quad \dot{\psi}_2(\tau_0) = \operatorname{tg} x_2, \quad \ddot{\psi}_2(\tau_0) = 1 \quad (4.21)$$

Из соотношений (4.20), (4.21) в силу непрерывности функции $\ddot{\psi}_2(t)$ следует, что она имеет как минимум два нуля на интервале (τ_0, t_N) . Пусть $\ddot{\psi}_2(t)$ имеет первый нуль в точке $t = \tau$

$$\ddot{\psi}_2(\tau) = 0 \quad (4.22)$$

(фиг. 7). Найдем значение функции $\psi_2(t)$ при $t = \tau$. В силу равенств (4.9), (4.22) имеем

$$\psi_1(\tau) = \psi_2(\tau) \sin x_2 / (x_1 \cos x_2) \quad (4.23)$$

Подставляя это выражение в равенство (4.3), получим

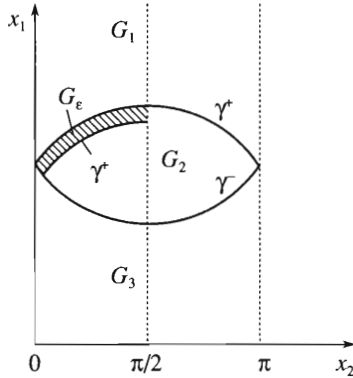
$$\psi_2(\tau) = 1 \quad (4.24)$$

Отсюда при учете соотношений (3.3), (4.23) следует

$$\dot{\psi}_2(\tau) = -1 / (x_1 \cos x_2) \quad (4.25)$$

С другой стороны, из равенств (4.21), (4.22) получаем оценку

$$\psi_2(\tau) > 0 \quad (4.26)$$



Фиг. 8

Из соотношений (4.25), (4.26) имеем $\tau > \tau_{\pi/2}$ и, используя выражение (4.23), получаем

$$\psi_1(\tau) < 0 \tag{4.27}$$

Из соотношений (4.20), (4.24), (4.26) следует, что существует такое $t = \tau'$, $\tau < \tau' < t_N$, при котором

$$\dot{\psi}_2(\tau') = 0 \tag{4.28}$$

Из всех τ' выберем ближайшее к точке $t = \tau$ (фиг. 7). В силу соотношений (3.3), (4.28) получаем

$$\psi_1(\tau') = -\psi_2 \cos x_2 / (x_1 \sin x_2)$$

Следовательно, $\psi_1(\tau') > 0$. Тогда из неравенства (4.27) в силу непрерывности функции $\psi_1(t)$ получаем, что существует такое $t = \tau''$ (фиг. 7), при котором $\psi_1(\tau'') = 0$. Отсюда и из соотношения (4.3) следует

$$\psi_2(\tau'') = 1 / (1 + \sin x_2 / x_1)$$

Тогда

$$\psi_2(\tau'') < 1 \tag{4.29}$$

Но из соотношений (4.26), (4.28) следует

$$\dot{\psi}_2(t) > 0, \quad t \in (\tau, \tau') \tag{4.30}$$

что при учете равенства (4.24) противоречит неравенству (4.29).

Техника определения функции $\psi(t)$ для остальных случаев положения точки q на множестве G аналогична.

Можно показать, что построенный синтез в области G удовлетворяет всем условиям регулярности [4], за исключением условия непрерывности времени перехода в целевую точку O ("условие E "). При этом множества $G_1 \setminus \gamma^+$, $G_2 \setminus \gamma^-$, G_3 , γ^+ , γ^- , SB , β в принятой терминологии [4] являются клетками первого рода, а точки O и B клетками второго рода. Условие E нарушается на дуге γ^+ при $x_2 \in [0; \pi/2)$ (фиг. 5).

Воспользуемся дополнительными построениями в области G . Зафиксируем произвольное $\epsilon \in (0; R)$. Используя уравнение (3.5), определяющее кривую γ^+ , построим кривую γ_ϵ^+ , подставив вместо R в (3.5) величину $R' = R - \epsilon$. Обозначим через G_ϵ внутренность множества, ограниченного кривыми γ^+ , γ^- , γ_ϵ^+ и полупрямой $x_2 = \pi/2$ (фиг. 8).

Нетрудно проверить, что на множестве $G \setminus G_\epsilon$ выполняются все условия регулярного синтеза. В силу известной теоремы (теорема [4], (3.19)) и произвольности ϵ следует, что синтез оптимальный.

5. Заключение. Таким образом, решена задача оптимального управления, полученная упрощением задачи теории дифференциальных игр. Эту задачу можно развивать в двух направлениях: 1) использовать полученный синтез в исходной задаче как приближенное управление первого игрока, 2) применять для решения более сложных задач оптимального управления методом продолжения по параметру V_2 , в частности для трехмерной задачи, в которой также предполагается, что второй игрок неподвижен, но задана ориентация его вектора скорости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00610) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1627.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Isaacs R.* Differential games. N.Y., etc.: Wiley, 1965 = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Черноустько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
4. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 407 с.
5. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.
6. *Бердышев Ю.И.* Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка // Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления: Тр. ИММ УНЦ АН СССР Свердловск, 1973. Вып. 12. С. 91–100.
7. *Бердышев Ю.И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 6. С. 985–994.
8. *Розенберг Г.С.* Построение траекторий оптимального преследования // Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26. № 4. С. 629–633.
9. *Большевцев Э.М.* Одна задача оптимального управления // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1968. № 1. С. 91–98.

Москва
e-mail: melik@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
5.IV.2004