

УДК 539.3

© 2005 г. А. Г. Колпаков

ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛКИ С УПРАВЛЯЕМЫМИ СИЛОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Рассматривается статическая задача о выборе оптимального расположения и усилий актуаторов на балке, находящейся под действием поперечной нагрузки. При помощи функции Грина соответствующей краевой задачи получены явные формулы, выражающие решение задачи в зависимости от точек приложения актуаторов, после чего задача заменяется на ее дискретный аналог. В итоге поставленная задача сводится к задаче математического программирования, которая исследуется и решается для разных случаев задания нагрузок.

При проектировании конструкций, имеющих в своем составе силовые элементы (актуаторы), позволяющие конструкции приспосабливаться к внешним нагрузкам, требуется выбрать не только оптимальное управление актуаторами, но и их количество и места размещения [1]. При этом силовые элементы управляются локальным процессором, являющимся частью конструкции. Местоположения актуаторов и инструкция (программа) работы актуаторов взаимосвязаны. Ниже задача о проектировании набора силовых элементов решается для балки. Ранее задача была рассмотрена в частном случае, когда выбирались положение и размеры одного актуатора, занимающего отрезок (типа пьезоупругой накладки) [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругую балку постоянной жесткости под действием заданной силы $F(x)$. Кроме силы (x) к балке могут быть приложены воздействия, создаваемые актуаторами силы или моментов интенсивности $p(x)$.

Местоположения актуаторов и их усилия заранее не заданы, заданы только ограничения усилий. Требуется найти местоположения актуаторов и их усилия, минимизирующие прогиб балки $u(x)$ при $x \in [0, 1]$, где $x = 0$ и $x = 1$ – координаты концов балки.

На фиг. 1, 2 приведены схемы, поясняющие понятия актуаторов силы и моментов для жестко заземленной балки (фиг. 1) и для консольных балок (фиг. 2). Штриховкой показано твердое тело (грунт, корпус и т.п.). Прямоугольниками обозначены актуаторы силы. На правой части фиг. 2 условно изображены пьезонаклейки – актуаторы моментов.

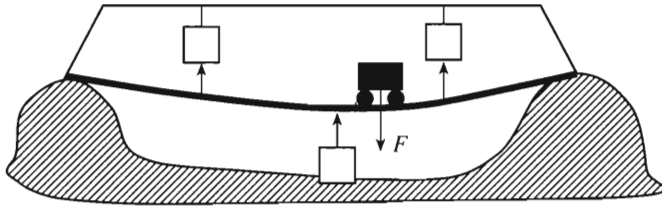
На схеме в левой части фиг. 2 показаны моменты, создаваемые актуаторами силы. На i -й стойке момент $M_i = h(P_i - P_{i-1})$, где h – высота стойки, p_i – сила, создаваемая i -м актуатором силы. После того как моменты M_i определены, находим силы

$$P_i = P_{i-1} - M_i/h, \quad P_1 = -M_1/h$$

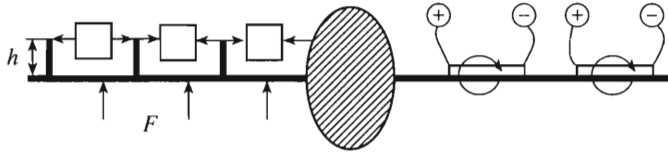
Часто тянущие силы создавать проще, чем толкающие (толкающее усилие на фиг. 2 создает самый левый актуатор). Поместив симметричный набор актуаторов под балкой, можно создать моменты только путем приложения тянущих сил.

Необходимо определить, где надо помещать актуаторы, какова должна быть величина их усилий, когда и какие группы актуаторов должны включаться (в зависимости от величины и положения внешней нагрузки в данный момент).

Местоположения актуаторов и их усилия могут быть описаны одной функцией $p(x)$ по следующему правилу: если $p(x) = 0$, то в точке x актуатор отсутствует, если $p(x) \neq 0$, то в точке x имеется актуатор, действующий с усилием $p(x)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Прогиб $u(x)$ балки под действием силы $F(x)$ и актуаторов силы (силовых элементов, создающих дополнительные силы, приложенные к балке) величины $p(x)$ определяется из решения уравнения [2]

$$u^{IV} = p + F \tag{1.1}$$

с краевыми условиями

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = u'(1) = 0 \tag{1.2}$$

(рассматривается условие жесткого защемления, но можно использовать и другие условия).

При использовании актуаторов моментов (силовых элементов, создающих дополнительные моменты в балке) величины $p(x)$ [1] имеем уравнение

$$(u'' + p)'' = F \tag{1.3}$$

с теми же краевыми условиями (1.2).

Здесь (постоянная) жесткость балки принята равной единице, что не уменьшает общности рассмотрения.

В приведенной постановке пока не конкретизирован класс A , которому принадлежит функция $p(x)$ (т.е. не конкретизирован тип актуаторов). Рассмотрим управляющие усилия $p(x)$ из класса (всюду далее суммирование ведется от $j = 1$ до $j = m$)

$$\left\{ \sum p_j \delta(x - y_j) \right\} \tag{1.4}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция. Это означает, что используются точечные актуаторы. Можно использовать и другие классы функций, например постоянные на отрезках – модель пьезонаклейки [1].

Ограничение усилий актуаторов возьмем в виде

$$a \leq p_j \leq b \tag{1.5}$$

т.е. актуаторы могут создавать усилия любой величины и знака из отрезка $[a, b]$.

Требуется минимизировать прогиб балки $u(x)$ на ее длине $[0, 1]$, т.е. решить задачу

$$\|u\|_{C[0, 1]} \equiv \max_{x \in [0, 1]} |u(x)| \rightarrow \min \tag{1.6}$$

Минимизация проводится по значениям $p(y)$, удовлетворяющим условию (1.5), при этом $u(x)$ определяется решением задачи (1.1), (1.2) или (1.3), (1.2).

Замечание. Если ограничения на усилия, создаваемые актуаторами, не накладываются, задача (1.1), (1.2), (1.5) имеет тривиальное решение $p(y) = -F(y)$, соответствующее $\min = 0$ в (1.6). При наличии ограничений (1.5) или ограничений, связанных с классом управлений A , решение $p(x) = -F(x)$ может оказаться недопустимым. Типичным ограничением, приводящим к тому, что решение $p(x) = -F(x)$ будет недопустимым, является требование об использовании конечного числа актуаторов. Например, тривиальное решение будет недопустимым для класса управлений (1.4).

Решения задач (1.1), (1.2) ($k = 1$) и (1.3), (1.2) ($k = 2$) могут быть записаны в виде [3] (всюду далее интегрирование ведется по отрезку $[0, 1]$)

$$u(x) = \int L(x, y)F(y)dy + I_k(x), \quad I_1(x) = \int L(x, y)p(y)dy, \quad I_2(x) = \int M(x, y)p(y)dy \quad (1.7)$$

$L(x, y)$ и $M(x, y)$ – фундаментальные решения [3] задач об изгибе балки под действием точечной силы и точечного момента, а именно,

$$L^{IV} = \delta(x - y), \quad M^{IV} = -\delta''(x - y) \quad (1.8)$$

с краевым условием (1.2).

Функции $L(x, y)$ и $M(x, y)$ можно найти в явном виде. Они представляют собой полиномы третьей степени, “скленные” в точке $x = y$ в соответствии с правыми частями уравнений (1.8). Для их определения составляется простая программа для ЭВМ.

Дискретизация задачи по переменной x . Использование величины $\|u\|_{C[0, 1]}$ предусматривает рассмотрение значения $|u(x)|$ для бесконечного числа точек. Чтобы избежать связанных с этим проблем, рассмотрим максимум $u(x)$ в ограниченном числе точек $\{x_1, \dots, x_n\} \subset [0, 1]$, которые назовем точками наблюдения за прогибом. Естественно встает вопрос о различии величин $\|u\|_{C[0, 1]}$ и $\|u\| = \max_{i=1, \dots, n} |u(x_i)|$.

Для решения уравнения (1.1) имеет место оценка

$$|u(x) - u(x_i)| \leq (\|F\|_{C[0, 1]} + \|p\|_{C[0, 1]})|x - x_i|^4/4!$$

Если точки $\{x_1, \dots, x_n\}$ равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$ с шагом Δ , то

$$\|u\|_{C[0, 1]} - \|u\| \leq (\|F\|_{[0, 1]} + \|p\|_{[0, 1]})\Delta^4/4!$$

Этим обоснована дискретизация по переменной x при уменьшении шага разбиения Δ .

Дискретная задача. Пусть $\{y_1, \dots, y_m\}$ – точки возможного размещения актуаторов. Решение обеих задач (1.7) для $p(y)$ из класса (1.4) примет вид

$$u(x_i) = G(x_i) + \sum L_{ij}p_j, \quad G(x) = \int L(x, y)F(y)dy \quad (1.9)$$

где $L_{ij} = L(x_i, y_j)$ для задачи (1.1), (1.2), $L_{ij} = M(x_i, y_j)$ для задачи (1.3), (1.2), $G(x)$ – известная функция, p_j – усилия актуатора в точке y_j ($p_j = 0$ означает, что в точке y_j актуатора нет).

Обоснование дискретизации по переменной p будет дано ниже.

Введя векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{u(x_i), i = 1, \dots, n\} \in R^n, \quad \mathbf{y}_j = \{L_{ij}, i = 1, \dots, n\} \in R^n, \\ \mathbf{y}_0 &= \{G(x_i), i = 1, \dots, n\} \in R^n \end{aligned} \quad (1.10)$$

можно записать решение (1.9) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{y}_0 + \sum \mathbf{y}_j p_j \in R^n \quad (1.11)$$

Дискретная задача, соответствующая задаче (1.6), имеет вид

$$\|\mathbf{u}\| \rightarrow \min \tag{1.12}$$

Вектор \mathbf{u} задается равенством (1.11) и значения p_j удовлетворяют ограничению (1.5).

2. Множество возможных значений прогибов в точках наблюдения при ограничении усилий актуаторов. Вводя новую переменную q_j по правилу

$$p_j = a + kq_j, \quad k = b - a, \quad q_j \in [0, 1],$$

получаем вместо (1.11) соотношение, отличающееся от (1.11) свободным членом и нормирующим множителем k . Имеем

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}_0 + k \sum \mathbf{y}_j q_j \in R^n, \quad 0 \leq q_j \leq 1; \quad \mathbf{Y}_0 = \mathbf{y}_0 - \sum \mathbf{y}_j \tag{2.1}$$

Правая часть первого равенства (2.1) с указанным ограничением значения q_j представляет собой множество kP , сдвинутое на вектор \mathbf{Y}_0 , где

$$P = \{ \sum \mathbf{y}_j q_j : 0 \leq q_j \leq 1 \} \tag{2.2}$$

Таким образом, для решения задачи (1.12), (1.11), (1.5) следует дать описание множество P (2.2).

Рассмотрим точки $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m, \mathbf{y}_{m+1} = 0\}$. Образует конечное число сумм

$$\sum \mathbf{y}_j s_j = \mathbf{Y}_s, \quad s = 1, \dots, N; \quad N = m + (m - 1) + \dots + 1 = (m + 1)m/2 \tag{2.3}$$

где s_j принимает значения 0 или 1.

Предложение. Имеет место равенство в $P = \text{conv}\{\mathbf{Y}_s, s = 1, \dots, N\}$ (conv означает “выпуклая комбинация”).

Действительно, предложение утверждает, что для любой точки $\mathbf{y} \in P$ найдутся числа $\{\mu_n\}$ и векторы $\{\mathbf{Y}_n\}$, такие, что

$$0 \leq \mu_n \leq 1, \quad \mu_1 + \dots + \mu_N = 1, \quad \mathbf{Y}_1 \mu_1 + \dots + \mathbf{Y}_N \mu_N = \mathbf{y} \tag{2.4}$$

или, в силу определения векторов \mathbf{Y}_n (2.3),

$$\sum \mathbf{y}_j^1 s_j^1 \mu_1 + \dots + \sum \mathbf{y}_j^N s_j^N \mu_N = \mathbf{y} \tag{2.5}$$

Равенство (2.5) будет выполнено, если для любых $0 \leq q_j \leq 1$ задача

$$s_j^1 \mu_1 + \dots + s_j^N \mu_N = q_j \tag{2.6}$$

с условием (2.4) разрешима. Напомним, что s_j^n принимают значения 0 и 1, а $\{\mu_n\}$ удовлетворяют условиям (2.4). Суммы $s^1 \mu_1 + \dots + s^N \mu_N$, где компоненты вектора $\mathbf{s}^n = (s_1^n, \dots, s_N^n)$, s_j^n принимают значения 0 или 1, с условием (2.4) задают единичный гиперкуб в R^m [4]. Вектор \mathbf{q} с координатами q_j , $0 \leq q_j \leq 1$, принадлежит единичному кубу; следовательно, задача (2.4), (2.6) разрешима.

Заметим, что $P = \text{conv}\{\mathbf{Y}_s, s = 1, \dots, N\}$ – многогранник.

Следствие. В силу предложения и формулы (2.1) можно описать многогранник $K = \mathbf{Y}_0 + kP$ следующим образом. Образует конечные суммы $\sum \mathbf{y}_j s_j = \mathbf{Z}_s$ ($s = 1, \dots, N$), где s_j принимают значения a или b . Тогда

$$K = \text{conv}\{\mathbf{Z}_s, s = 1, \dots, N\} \tag{2.7}$$

3. Решение задачи для постоянной внешней нагрузки. Учитывая результаты разд. 2, заключаем, что задача (1.11), (1.12). (1.5) равносильна следующей:

$$\|\mathbf{u}\| \rightarrow \min, \quad \mathbf{u} \in K \quad (3.1)$$

т.е. задача сводится к минимизации функции $\|\mathbf{u}\|$ на многограннике K (2.7). Можно пытаться решать эту задачу методами теории оптимизации. Однако ее можно решить много проще, если провести геометрический анализ множества возможных прогибов балки K и множества $\|\mathbf{u}\| \leq c$.

Многогранник K . Рассмотрим суммы $\sum \mathbf{y}_j p_j$, в которых R величин p_j отличны от нуля, а остальные $m-R$ величин p_j – нули. Эти суммы образуют многогранники

$$P_R = \text{conv}\{\sum \mathbf{y}_j s_j; s_j = 0 \text{ или } s_j = 1\}$$

причем в сумму входят только те \mathbf{y}_j , для которых $p_j \neq 0$, т.е. каждый многогранник P_R соответствует работе R актуаторов. Будем называть такие многогранники “многогранниками уровня R ”. Имеет место равенство $P = \cup P_R$. Пусть точка $\mathbf{u} \in P$. Тогда она принадлежит некоторому многограннику P_R , т.е. перемещения \mathbf{u} в точках наблюдения можно реализовать, используя R актуаторов, соответствующих многограннику P_R .

Многогранник K и куб $D(c)$ соприкасаются в некоторой точке \mathbf{x}_c . В результате приходим к задаче

$$\mathbf{Y}_1 \mu_1 + \dots + \mathbf{Y}_N \mu_N = \mathbf{x}_c, \quad 0 \leq \mu_n \leq 1, \quad \mu_1 + \dots + \mu_N = 1 \quad (3.2)$$

Это так называемая задача о выпуклых комбинациях [5]. Способ ее решения приведен ранее [5].

Отметим, что в рассматриваемом случае представляет интерес набор $\{q_j\}$, т.е. решение задачи (2.1), а не $\{\mu_n\}$ – решение задачи (3.2). Для получения решения задачи (2.1) вспомним, что любой вектор \mathbf{Y}_s есть сумма вида $\sum \mathbf{y}_j s_j$. Тогда, если вектор \mathbf{y}_j входит с ненулевыми коэффициентами s_j в суммы, образующие векторы $\mathbf{Y}_{s(1)}, \dots, \mathbf{Y}_{s(p)}$, то $q_j = \mu_{s(1)} + \dots + \mu_{s(p)}$.

Условие $\|\mathbf{u}\| \leq c$. Это условие (в силу определения $\|\mathbf{u}\|$ (3.1)) задает куб $D(c)$ с гранями $x_i = \pm c$. При увеличении параметра c от нуля до бесконечности этот куб увеличивается от точки – начала координат (при $c = 0$) до бесконечности (при $c \rightarrow \infty$).

Теперь можно перейти к решению задачи (3.1).

Значение минимума в задаче (3.1). Возможны два случая: $0 \notin K$, тогда $\min_{\mathbf{u} \in K} \|\mathbf{u}\| = c > 0$ и $0 \in K$, тогда $\min_{\mathbf{u} \in K} \|\mathbf{u}\| = 0$.

В случае $0 \notin K$ при $c = 0$ многогранник $D(c)$ совпадает с началом координат. Будем увеличивать значение параметра c ; при этом будет увеличиваться куб $D(c)$. Если многогранник K не содержит начала координат, то увеличивающийся куб $D(c)$ при некотором значении параметра c^* коснется K (фиг. 3). Это дает решение задачи (3.1): значение c^* , при котором произошло первое касание, есть значение минимума в задаче (3.1).

В случае $0 \in K$ можно придать нулевые значения прогибам в точках наблюдения. В остальном решение проводится аналогично изложенному выше.

4. Обоснование дискретизации задачи по переменной p . Рассмотрим выражение (1.7) для случая, когда дискретизация по x проведена, а по p еще не проведена. В точках наблюдения за прогибом получим равенство

$$\mathbf{u} = \mathbf{y}_0 + \int \mathbf{L}(y) p(y) dy$$

$$\mathbf{u} = \{u(x_i), i = 1, \dots, n\} \in R^n, \quad \mathbf{L}(y) = \{L(x_i, y), i = 1, \dots, n\} \in R^n, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}_0 = \{G(x_i), i = 1, \dots, n\} \in R^n$$

Введем пару линий $\Gamma = \{x = aL(y), x = bL(y) : y \in [0, 1]\}$. Интеграл в правой части равенства (4.1) с условиями (1.4), (1.5) задает конус $P_d = \text{conv}\{\Gamma, 0\}$ с основанием $P_c^0 = \text{conv}\Gamma$ и вершиной в нуле. Это вытекает из следствия, приведенного в разд. 2, и того, что выпуклая оболочка любого множества образована выпуклыми комбинациями конечного числа точек этого множества [4]. Равенство (1.11) задает конус $K_c = P_c + y_0$ (конус P_c , сдвинутый на вектор y_0) с основанием $K_c^0 = P_c^0 + y_0$.

Использованная в разд. 1 дискретизация представляет собой аппроксимацию линии Γ ломаной с вершинами в точках $\{Y_s \in \Gamma\}$, а криволинейных конусов K_c и P_c – многогранными конусами K и P .

При увеличении числа точек качество аппроксимации улучшается.

Дадим общую характеристику используемого метода. Выражение (1.7) может быть рассмотрено как интегральный функционал $F:A \rightarrow C([0, 1])$. Тогда множество прогибов балки под действием актуаторов интенсивности $p \in A$ есть $F(A)$ – образ множества A при отображении F . Дискретизации, проведенные выше, соответствуют аппроксимации множеств A и $F(A)$ конечными множествами. При этом оказывается, что конечномерная аппроксимация $F(A)$ достаточно легко вычисляется в явном виде – это выпуклая комбинация известных точек.

5. Переменная внешняя нагрузка. Выбор местоположения системы актуаторов, их усилия, порядка включения групп актуаторов и инструкция процессору балки. Рассмотрим случай, когда внешняя нагрузка зависит от параметра: $F = F(x, t), x \in [0, 1], t \in L = [0, T]$ – параметр. Выше внешняя нагрузка, которую пытались “компенсировать” актуаторы, была фиксированной. Эффективное положение актуаторов и их усилия определялись однозначно. Если внешняя нагрузка переменная, то необходимый для ее “компенсации” набор актуаторов свой для каждой нагрузки. Если нагрузка может принимать много различных значений, то простое применение теории из предыдущего раздела может привести к требованию использования большого количества актуаторов. Покажем, что поставленную задачу можно решить, пользуясь ограниченным набором актуаторов.

Действуя как выше, приходим к выражениям

$$u(x, t) = \int L(x, y)F(y, t)dy + \int L(x, y)p(y, t)dy \tag{5.1}$$

$$u(x, t) = \int L(x, y)F(y, t)dy + \int M(x, y)p(y, t)dy \tag{5.2}$$

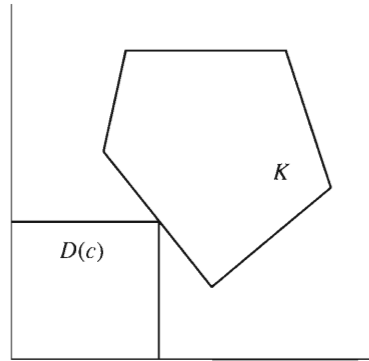
отличающимся от (1.7) зависимостью от параметра t . Исходно от t зависит внешняя нагрузка $F(y, t)$, но в силу этого становятся зависимыми от t как прогибы $u(x, t)$, так и управления $p(y, t)$. Затем переходим от (5.1) или (5.2) к задаче (ср. с задачей (3.1))

$$\|u(t)\| \rightarrow \min, \quad u \in K(t), \quad t \in [0, T] \tag{5.3}$$

где

$$K(t) = \text{conv}\{Y_s, s = 1, \dots, N\} + Y_0(t) \in R^n \tag{5.4}$$

Отметим, что важно для дальнейшего, что в выражении (5.4) от t зависит только вектор $Y_0(t)$ (определения векторов $\{Y_s, s = 1, \dots, N\}, Y_0$ и числа N см. в разд. 2).



Фиг. 3

Возможны два способа управления: 1) при каждом значении параметра t решается задача (5.3), (5.4); 2) задачи (5.3), (5.4) предварительно решаются для разных $t \in [0, T]$ и затем при данном t используется имеющееся решение. Рассматриваемые системы иногда называют “разумными” (smart). В этих терминах можно сказать, что выделяются два уровня “разумности” системы.

1°. “Универсальная” система. Система имеет много актуаторов или может помещать актуаторы в заданные позиции, и, решая задачу (5.3), (5.4), она вычисляет, какие актуаторы надо включить и их усилия, исходя из условия $D(c) \cap K(t) \neq \emptyset$. В этом случае система может подстроиться (если это вообще возможно) под любую внешнюю нагрузку.

2°. Система, действующая по принципу “если–то”. Система включает–выключает актуаторы по правилу: *если <текущее значение параметра нагрузки> то <включить группу актуаторов из списка>*. Такая система может подстроиться только под любую внешнюю нагрузку из известного класса.

Первый случай практически не реализуется в чистом виде. Поэтому остановимся на втором случае.

Выберем число c так, что $D(c) \cap K(t) \neq \emptyset$ для всех $t \in L = [0, T]$, что всегда возможно. В этом случае при $t \in L$ многогранник $K(t)$ описывает некоторую траекторию в R^n , имея всегда общие точки с кубом $D(c)$. Необходимо найти эти точки, для чего достаточно указать на многограннике $K(0)$ набор точек x_1, \dots, x_M , таких, чтобы при любом значении параметра нагрузки t хотя бы одна из точек $x_i + y_0(t)$ находилась в $D(c)$. Кроме того, желательно, чтобы таких точек было как можно меньше.

Поясним это требование. Точка на $K(0)$ соответствует системе актуаторов. Системы актуаторов, соответствующие точкам x_1, \dots, x_M , решат поставленную задачу (именно, когда внешняя нагрузка такова, что точка $x_i + y_0(t)$ принадлежит $D(c)$, надо включить систему актуаторов, соответствующую точке x_i). С практической точки зрения хотелось бы иметь меньше актуаторов. Решение поставленной задачи в рамках управления “если–то” возможно в силу того, что при непрерывном движении многогранника $K(t)$ его подмножества P_K , соответствующие системам актуаторов, пересекаются с кубом $D(c)$ при значениях t из некоторого отрезка $[t_a, t_b]$. Конечное число таких отрезков $[t_a, t_b]$ покрывает все $L = [0, T]$.

Предлагается следующий алгоритм выбора точек.

0. Находим значения L_0 параметра нагрузки t при которых $y_0(t) \in D(c)$. Этот случай соответствует тому, что и без воздействия актуаторов прогиб балки не превосходит величины c . Остается множество LL_0 значений параметра.

1. Рассмотрим точку x_c касания многогранника $K(t)$ с кубом $D(c)$ (наихудший вариант). Систему актуаторов, соответствующую этому случаю, необходимо иметь. Находим значения L_c параметра нагрузки t , при которых $x_c \in D(c)$. Если таких точек x_c несколько, повторяем процедуру для каждой точки. В результате остается $LL_0 \setminus L_c$. Далее действуем итерациями, которые могут зависеть от нашего выбора точек на многограннике (см. ниже).

2. При выходе точек касания x_c из $D(c)$, в куб $D(c)$ входят подмножества многогранника $K(t)$. Многогранник $K(0)$ разбит на подмножества P_K . Выбираем P_K , исходя из условий:

а) K – минимально возможное число;

б) $\{P_K + y_0(t)\} \cap D(c) \neq \emptyset$ для возможно большего числа значений параметра t .

3. Повторяем этап 2, пока не исчерпаем всех значений параметра t .

Как видно, этапы 0 и 1 алгоритма определены однозначно, этап 2 допускает некоторый произвол. В результате применения алгоритма получаем конечное число проектов, из которых можно выбрать предпочтительный.

Сенсоры и процессор в системе. Если система управляется по правилу: *если $t \in L_c$, то <включить группу актуаторов из списка>*, необходимо позаботиться об опре-

делении параметра нагружения t . Было бы удобно определять текущий параметр нагружения t через текущие характеристики деформирования балки (смещения и т.п.). Надо иметь в виду, что одновременно с внешней нагрузкой $F(x, t)$ к балке могут быть приложены управляющие воздействия p . Пусть имеется функционал $\Phi(u, p)$, такой, что $t = \Phi(u(x, t), p(t))$. Измеряя (например, с использованием сенсоров) текущее значение $u(x, t)$ и вычисляя значение функционала Φ , определяем значение параметра нагружения t .

Описанные выше вычисления и переключения актуаторов требуют наличия процессора, производящего эти действия. Эти операции достаточно простые, и поэтому процессор может не иметь большой мощности.

Форма функционала Φ существенно связана с конкретным классом нагрузки. Для конкретного класса нагрузок построить функционал Φ достаточно просто, давать же общий метод его построения здесь нецелесообразно.

“Знания” в системе. Набор инструкций вида “если–то” трактуется как знания [6]. Как видим, знания – часть “разумной” конструкции. “Универсальная” система не нуждается в знаниях, но она может быть неэффективной для целей оперативного управления, так как решает достаточно большую задачу. Система типа “если–то” исполняет простые инструкции и может быть быстродействующей даже с маломощным процессором. В этой связи она подходит для целей оперативного управления. Возможно следующее разделение функций указанных выше систем равного уровня “разумности”. Система “если–то” осуществляет оперативное управление конструкцией в ситуациях, описанных в этих инструкциях. “Универсальная” система, не участвуя непосредственно в оперативном управлении, производит инструкции для системы “если–то”. Система оперативного управления, как правило, является частью конструкции (за исключением случаев дистанционного управления). Система производства инструкций может быть как частью конструкции, так и внешней системой. Можно усмотреть аналоги описанных систем и способов их размещения в биологических и социальных системах.

6. Пример. Проект “разумной” конструкции состоит из двух компонентов: собственно конструкции (тип, количество и места размещения актуаторов) и программы (инструкции по управлению актуаторами, вводимой в виде программы во встроенную ЭВМ конструкции).

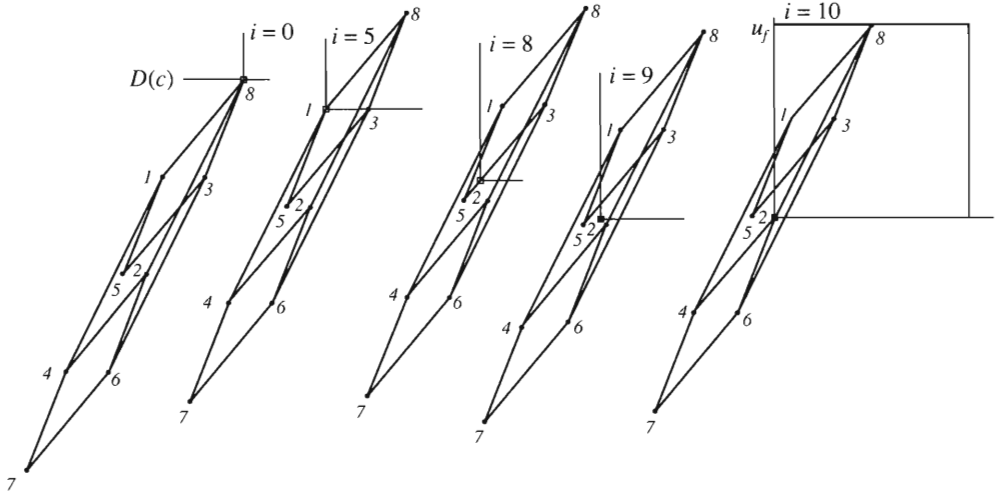
Рассматриваемый ниже пример приводится, в частности, с целью показать, что в предлагаемом методе конструкционная и программная часть проекта не просто взаимосвязаны (заявление об их “взаимосвязанности” стало общим местом работ по “разумным” конструкциям, см. [7, 8] и библиографию в этих работах), а определяются как части решения одной задачи.

Рассмотрим балку, соответствующую отрезку $[0, 1]$ оси x . По балке движется внешняя точечная нагрузка (фиг. 1) между точками $x = 0$ и $x = 0.5$. Будем наблюдать за прогибами в точках $x_1 = 0.25$ и $x_2 = 0.5$. Возможные местоположения актуаторов A_1, A_2, A_3 зададим в точках $y_1 = 0.25, y_2 = 0.5$ и $y_3 = 0.75$.

Ограничения усилий актуаторов (1.5) возьмем в виде $0 \leq p_j \leq 1$ ($a = 0, b = 1$).

На фиг. 4 представлена эволюция многогранника $K(t)$ для рассматриваемой задачи. Параметр $t = 0.05i$ ($i = 0, \dots, 10$) соответствует внешней нагрузке, движущейся от конца балки к ее середине с шагом 0.05 (на фиг. 4 показаны положения конуса $K(t)$ для $i = 0, 5, 8, 9, 10$). В рассматриваемом случае куб $D(c)$ переходит в квадрат, так как рассматриваемая задача – двумерная (взяты две точки наблюдения за прогибом). Квадрат $D(c)$ был найден как минимальный квадрат, имеющий пересечение со всеми и многогранниками $K = K(t), t = 0.05i$ ($i = 0, \dots, 10$).

Определение оптимального набора актуаторов. Набор актуаторов и места их размещения определяются из качественного анализа фиг. 4. Именно следует установить, какие “подмногогранники” многогранника $K(t) = 147638$ пересекаются с квад-



Фиг. 4

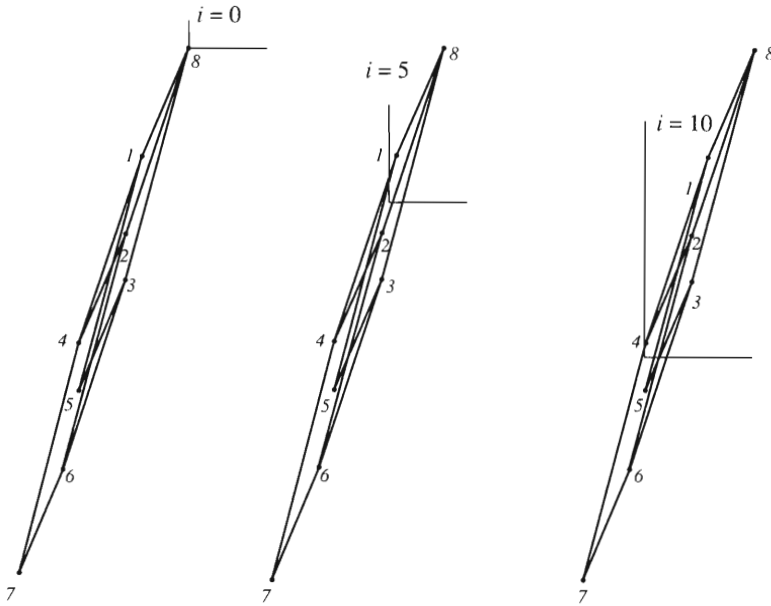
ратом $D(c)$ (маленький квадрат в начале координат на Фиг. 4). На фиг. 4 точка 8 соответствует прогибам неуправляемой балки в точках $x_1 = 0.25$ и $x_2 = 0.5$. Отрезки 18, 28, 38 (многогранники уровня 1) соответствуют работе одного актуатора A_1, A_2, A_3 соответственно. Параллелограммы 3158, 8142, 8263 (многогранники уровня 2) соответствуют работе пар актуаторов $A_1 + A_3, A_1 + A_2, A_2 + A_3$ соответственно. Оставшаяся часть многогранника $K(t)$, в данном случае – параллелограмм 2476, соответствует работе всех трех актуаторов.

При $i \leq 5$ минимальные прогибы могут поддерживаться одним актуатором A_1 (в точке $y_1 = 0.25$), при этом его усилие нарастает по мере продвижения точки приложения силы $F(t)$ к середине балки. Затем при $i = 6, 7, 8$ можно использовать актуатор A_1 (в точке $y_1 = 0.25$) совместно с актуатором A_2 (в точке $y_2 = 0.5$) или актуатором A_3 (в точке $y_3 = 0.75$). При $i = 9$ можно использовать A_1 совместно с A_2 (но A_1 и A_3 уже не могут обеспечить оптимальное управление) или все три актуатора. При $i = 10$ можно использовать один актуатор A_2 . В итоге приходим к выводу, что минимальное число актуаторов равно двум, и это будут актуаторы A_1 и A_2 (расположенные в точках $y_1 = 0.25$ и $y_3 = 0.75$). Заметим, что использование одного актуатора A_2 (в середине балки) не дает наилучшего решения. Действие одного актуатора A_2 с разным усилием изображается линией 82. Кроме случаев $i = 0$ и $i = 1, i = 10$, эта линия не пересекала квадрат $D(c)$, т.е. единственный актуатор A_2 не может осуществить оптимальное управление.

Максимальный прогиб с управляемой балки имеет место при $i = 3$ (внешняя сила приложена в точке $y = 0.15$). Для не управляемой балки максимальный прогиб u_f имеет место, когда сила приложена в точке 0.5. Относительное уменьшение прогиба за счет управления $u_f/c = 78$ (см. фиг. 4 при $i = 10$, точка 8 соответствует прогибам неуправляемой балки).

Разработка инструкции работы актуаторов. Инструкция работы актуаторов получается из количественного анализа фиг. 4. Будем использовать актуаторы A_1 и A_2 . Для написания инструкции надо найти коэффициенты выпуклых комбинаций векторов, дающих точку, принадлежащую квадрату $D(c)$. Эти коэффициенты будут равны усилиям p_1 и p_2 , которые должны развивать актуаторы A_1 и A_2 соответственно. Ниже приведены значения p_1 и p_2 в зависимости от координаты точки, в которой приложена сила $F(0.05i)$,

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0	0.05	0.2	0.47	0.68	1	1	0.84	0.63	0.31	0
p_2	0	0	0	0	0	0	0.16	0.44	0.5	0.69	1



Фиг. 5

Отметим, что кроме случая $i = 3$ усилия p_1 и p_2 определяются неоднозначно. Различия в определении величин p_1 и p_2 пропорциональны размеру квадрата $D(c)$.

7. Консольная балка. Пример. Пусть к консольной балке, показанной на фиг. 2, прикладывается постоянная вдоль оси балки сила (равномерное давление) $F(x, t) = F(t)$. Рассмотрим задачу при таком выборе точек наблюдения: $x_1 = 0.5$ и $x_2 = 1$ (середина и свободный конец балки) и точек возможных положений актуаторов: $y_1 = 0.25$, $y_2 = 0.5$ и $y_3 = 0.75$. Граничные условия имеют вид

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0$$

(жесткая заделка при $x = 0$, свободный конец при $x = 1$).

Управление ведется актуаторами моментов. Фундаментальное решение в данном случае определяется из уравнения

$$N^{IV} = \delta(x - y)$$

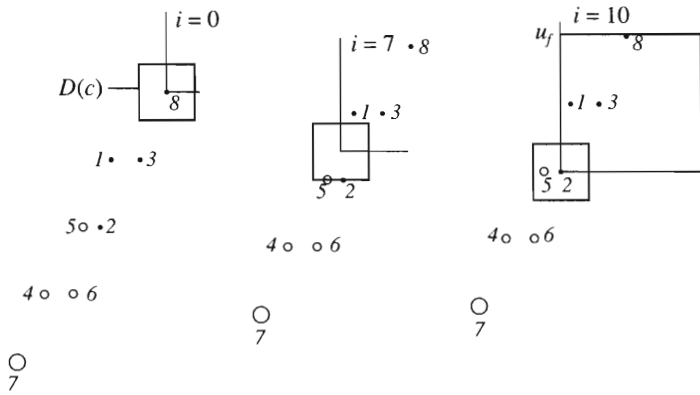
Ограничения усилия актуаторов (1.5) возьмем в виде $0 \leq p_j \leq 1$ ($a = 0, b = 1$).

На фиг. 5 представлена эволюция многогранника $K(t)$ при $F(x, t) = t/2, t = i = 0, \dots, 10$ (приведены данные для $i = 0, 5, 10$). В рассматриваемом случае многогранник $K(t)$ содержал точку 0 при всех $i = 0, \dots, 10$. Следовательно, можно добиться нулевых прогибов балки в точках наблюдения при всех нагрузках. Как следовало из анализа полного набора рисунков, частично приведенных на фиг. 5, при $i \leq 8$ можно использовать только актуаторы A_1 (в точке $y_2 = 0.25$) и A_2 (в точке $y_2 = 0.5$). При $i > 8$ необходимо использовать все три актуатора.

8. Актуаторы типа 0–1. Рассмотрим случай, когда актуаторы имеют только два состояния: “включен” (усиление $p_j = 1$) и “выключен” (усиление $p_j = 0$). Непрерывный аналог этой задачи рассмотрен в разд. 6. В этом случае задача принимает вид

$$\|u\| \rightarrow \min, \quad u \in K(t); \quad K(t) = y_0(t) + \sum y_j s_j \in R^n \tag{8.1}$$

где s_j принимают значения нуля и единица.



Фиг. 6

Минимум в (8.1) равен

$$c = \max_{t \in L} \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\|$$

Решение задачи проводится путем нахождения минимального квадрата $D(c)$ для которого выполнено условие

$$D(c) \cap K(t) \neq \emptyset, \quad \forall t \in L = [0, T]$$

Точки множества $K(t)$ следует ранжировать по величине $\sum s_j$ (равной числу ненулевых слагаемых в сумме (8.1), т.е. числу актуаторов, необходимых для реализации соответствующего состояния). Это ранжирование позволяет удовлетворить требованиям этапа 2а алгоритма проектирования.

На фиг. 6 показаны несколько этапов эволюции точек $K(t)$ для случая, рассмотренного в разд. 6, для актуаторов типа 0–1. Точка 8 соответствует прогибам неуправляемой балки. Точки 1, 2, 3 (ранг 1) соответствуют работе одного актуатора A_1, A_2, A_3 соответственно. Точки 5, 4, 6 (ранг 2) соответствуют работе пар актуаторов $A_1 + A_3, A_1 + A_2, A_2 + A_3$ соответственно. Точка 7 (ранг 3) соответствует работе всех трех актуаторов.

Размер квадрата $D(c)$ в рассматриваемой задаче определяется случаем $i = 7$, фиг. 6. Схема переключения актуаторов определяется прохождением системы точек $K(t)$ через $D(c)$. Из анализа полной картины ($i = 0, \dots, 10$) вытекает, что при $i \leq 3$ актуаторы использовать не следует. При $i = 4$ следует использовать актуаторы A_1 или A_2 ; при $i = 5, 6$ – актуатор A_1 ; при $i = 7, 8, 9, 10$ – актуатор A_2 или A_1 и A_3 . Отношение $u_j/c = 4.8$, см. фиг. 6 при $i = 10$.

Использование управлений типа 0–1 составляет основу методов “дискретной” оптимизации [9]. Число возможных состояний системы с управлением типа 0–1 сравнительно невелико, что позволяет решать задачу на ЭВМ прямым перебором (в комбинации со стандартными методами исследования функций на экстремум). Сравнение относительных уменьшений прогиба: 4.8 при дискретной оптимизации и 78 при непрерывном управлении (см. разд. 6) указывают на невысокую эффективность “дискретной” оптимизации по сравнению с непрерывной. Примеры из разд. 6 и 8 показывают, что непрерывный и дискретный проекты могут различаться и в конструктивной части (разные места размещения актуаторов).

Для непрерывных проектов использование перебора для решения задачи невозможно. В примере из разд. 6 решение было получено для $n = 3$ возможных положений актуаторов при $i = 10$ положениях внешней нагрузки и вычислении усилий акту-

аторов с точностью $1/100$. Решение задачи перебором потребовало бы $100^n I = 10^7$ раз исследовать функцию на экстремум. Решение такой задачи на однопроцессорной ЭВМ продолжалось бы несколько часов. Для 0–1 проекта следовало бы перебрать $2^n I = 80$ вариантов. При $n = 6$ решение непрерывной задачи методом перебора становится практически невозможным.

ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G.* Analysis. Design and Optimization of Composite Structures. Chichester, etc.: Wiley, 1997. 356 p.
3. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
4. *Rockafellar R.T.* Convex Analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970 = *Рокафеллар Р.Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
5. *Kolpakov A.G., Kolpakova I.G.* Convex combinations problem and its application for problem of design of laminated composite materials // IMACS'91. Proc. 13th World Cong. on Computational and Applied Mathematics. Trinity College, Dublin, Ireland, 1991. V. 4. P. 1955–1956.
6. *Загоруйко Н.Г.* Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд-во Инта математики СО РАН, 1999. 268 с.
7. *Adaptronics and Smart Structures: Basics, Materials, Design and Applications.* Ed. H. Janocha. B., N.Y.: Springer, 1999. 438 с.
8. *Banks Y.T., Smith R.C., Wang Y.* Smart Material and Structures – Modeling, Estimation, and Control. N.Y.: Chichester, Wiley, 1996. 304 p.
9. *Discrete Structural Optimization: Proc. IUTAM Symp.* / Eds. W. Gutkowski, J. Bauer. Berlin, etc.: Springer, 1994. 249 p.

Новосибирск
e-mail: agk@neic.nsk.su

Поступила в редакцию
15.VII.2003