

УДК 539.3:534.1

© 2005 г. А. А. Пешков, Ю. А. Устинов

**УЛЬТРАЗВУКОВОЕ ПРОСВЕЧИВАНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ  
ЧЕРЕЗ ДВУХСЛОЙНУЮ ПЛАСТИНУ НА КРИТИЧЕСКОЙ ЧАСТОТЕ**

Исследуется плоская задача об ультразвуковом просвечивании акустической среды через двухслойную пластину на высоких частотах. Попутно решается задача о локализации колебаний в окрестности конечной области приложения нагрузки таким образом, чтобы устранить распространение звуковой энергии вдоль пластины. Методом стационарной фазы изучаются возможности формирования диаграмм направленности звукового давления в акустической среде. Построенная теория иллюстрируется серией расчетов для системы сталь–резина–вода.

Эффект просвечивания акустической среды через твердую стенку (упругую однородную или слоистую пластину) зависит от ряда факторов. Так, например, если возбуждать колебания системы пластина–жидкость путем гармонически изменяющегося нормального давления, распределенного по конечной области  $S$  поверхности пластины, не контактирующей с жидкостью, то, поскольку пластина – волновод, при высокочастотных колебаниях весьма вероятно, что значительная часть подводимой энергии будет распространяться вдоль пластины. В таком случае, даже в идеальных системах (не учитывающих внутренние потери в материале пластины и жидкости) просвечивание не будет эффективным. Поэтому возникает проблема локализации колебаний в окрестности области приложения внешнего давления. Эта проблема была достаточно подробно исследована для однородной пластины без жидкости [1] и для однородной пластины, лежащей на поверхности жидкости [2], причем частота возбуждения колебаний совпадала с одной из критических частот пластины (частотой запираения). Эффект просвечивания определяется также диаграммой направленности звукового поля в жидкости, которая при заданных параметрах пластины существенно зависит от распределения амплитуды давления и геометрических параметров области  $S$ .

В данной работе рассматривается задача о распространении и затухании волн в упругой двухслойной полосе, лежащей на поверхности идеальной сжимаемой жидкости, решается проблема локализации колебаний и исследуется диаграмма направленности акустического давления в дальнем поле.

**1. Постановка задачи и построение решения.** Рассмотрим задачу о распространении волн в двухслойной упругой полосе, лежащей на поверхности сжимаемой идеальной жидкости.

Декартову систему координат  $x_1, x_2$  выберем так, что  $S_1 = \{-\infty < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 \leq h_1\}$ ,  $S_2 = \{-\infty < x_1 < \infty, h_1 \leq x_2 \leq h\}$  – подобласти составной полосы,  $h_1, h_2$  – толщины слоев,  $h = h_1 + h_2$ .  $S_0 = \{-\infty < x_1 < \infty, h \leq x_2 \leq \infty\}$  – область, занятая жидкостью. Обозначим через  $\mu_j, \nu_j, \rho_j$  модули сдвига, коэффициенты Пуассона, плотности материалов (соответственно,  $-j = 1, 2$ ),  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $c_0$  – скорость звука в жидкости.

Пусть волновые процессы в области  $S_1 \cup S_2 \cup S_0$  возбуждаются нормальными напряжениями, приложенными к лицевой поверхности  $x_2 = 0$ , и изменяются по гармоническому закону  $\exp(-i\omega t)$ . Описанная задача сводится к нахождению решений в областях  $S_j$  уравнений гармонических колебаний

$$\begin{aligned} \chi_j \partial_1^2 u_{j1} + (\chi_j - 2\mu_j) \partial_1 \partial_2 u_{j2} + \mu_j (\partial_2^2 u_{j2} + \partial_1 \partial_2 u_{j2}) + \rho_j \omega^2 u_{j1} &= 0 \\ \chi_j \partial_1^2 u_{j2} + (\chi_j - 2\mu_j) \partial_1 \partial_2 u_{j1} + \mu_j (\partial_2^2 u_{j1} + \partial_1 \partial_2 u_{j2}) + \rho_j \omega^2 u_{j2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\partial_j = \partial/\partial x_j$ ,  $u_j$  – проекции амплитуд колебаний смещений на оси  $x_j$  соответственно,  $\chi_j = 2\mu_j \nu_j / (1 - 2\nu_j)$  и в области  $S_0$  – волнового уравнения

$$\Delta \varphi + k_0^2 \varphi = 0, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 \quad (1.2)$$

при следующих граничных условиях и условиях непрерывности на границах раздела сред:

$$x_2: \sigma_{j12} = 0, \quad \sigma_{j12} = \mu_1 g(x_1) \quad (1.3)$$

$$x_2 = h_1: u_{1\beta} - u_{2\beta} = 0, \quad \sigma_{11\beta} - \sigma_{21\beta} = 0, \quad \beta = 1, 2 \quad (1.4)$$

$$x_2 = h: -i\omega u_{22} - \partial_2 \varphi = 0, \quad \sigma_{222} + p = 0, \quad \sigma_{212} = 0 \quad (1.5)$$

Здесь

$$\sigma_{j12} = \mu_j (\partial_1 u_{j2} + \partial_2 u_{j1}), \quad \sigma_{j22} = \chi_j \partial_2 u_{j2} + (\chi_j - 2\mu_j) \partial_1 u_{j1}$$

$$p = -i\rho_0 \omega \varphi$$

– амплитуды напряжений и давления в жидкости соответственно,  $\varphi$  – амплитуда потенциала скоростей точек жидкой среды.

Для построения решения задачи перейдем к безразмерным координатам  $\xi = x_1/h$ ,  $\zeta = x_2/h$  и преобразуем соотношения (1.1)–(1.5), используя преобразование Фурье по переменной  $\xi$ . Введем четырехкомпонентный вектор

$$\mathbf{Y}_j = [y_{j1}, y_{j2}, y_{j3}, y_{j4}]$$

$$y_{j1} = u_{j1}^*/h, \quad y_{j2} = -iu_{j2}^*/h, \quad y_{j3} = \sigma_{j12}^*/\mu_1, \quad y_{j4} = -i\sigma_{j22}^*/\mu_1$$

где

$$f^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp(i\gamma\xi) d\xi$$

В образах Фурье с учетом принятых обозначений система уравнений (1.1), решение уравнения (1.2), граничные условия (1.3) и условия непрерывности (1.4), (1.5) запишем в виде

$$\mathbf{Y}'_j = \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_j \quad (1.6)$$

$$\varphi^*(\zeta) = \varphi_0 \exp[iq_0(\zeta - 1)], \quad q_0 = \sqrt{\frac{\Omega^2}{\theta^2} - \gamma^2} \quad (1.7)$$

$$y_{13}(0) = 0, \quad y_{14}(0) = -ig^* \quad (1.8)$$

$$\mathbf{Y}_1(\zeta_1) = \mathbf{Y}_2(\zeta_1) \quad (1.9)$$

$$y_{j1}(1) = -\varepsilon_1 \Omega^{-1} q_0 \Psi_0, \quad y_{j4}(1) = i\varepsilon_2 \Omega \Psi_0; \quad \Psi_0 = \frac{\varphi_0}{hc_0} \quad (1.10)$$

где

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & \frac{1}{\mu_j^0} & 0 \\ \gamma^2(k_j^{-2} - 1) & 0 & 0 & \frac{1}{p_{j1}\mu_j^0} \\ \mu_j^0[4\gamma^2(1 - k_j^{-2}) - \Omega_j^2] & 0 & 0 & \gamma(1 - 2k_j^{-2}) \\ 0 & -\mu_j^0\Omega_j^2 & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_j^2 = 2\frac{1 - \nu_j}{1 - 2\nu_j}, \quad \Omega_j^2 = \frac{\rho_j\omega^2 h^2}{\mu_j}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{c_0\rho_0}{c_{1t}\rho_1}, \quad c_{jt} = \sqrt{\frac{\mu_j}{\rho_j}}, \quad \mu_j^0 = \frac{\mu_j}{\mu_1}$$

Штрих означает производную по  $\zeta$ .

Здесь  $\Omega = \Omega_1$  – основной безразмерный частотный параметр,  $c_{jt}$  – скорость поперечных волн в материале  $j$ -компоненты.

Построим эволюционный оператор системы дифференциальных уравнений (1.6) с учетом условия сопряжения (1.9). Для этого выберем произвольную систему четырех линейно независимых векторов уравнения (1.6). В качестве таких можно взять

$$\mathbf{Y}_{j1} = [\gamma \operatorname{ch}(p_{j1}\zeta), -p_{j1} \operatorname{sh}(p_{j1}\zeta), 2\mu_j^0\gamma p_{j1} \operatorname{sh}(p_{j1}\zeta), \mu_j^0(2\gamma^2 - \Omega_j^2) \operatorname{ch}(p_{j1}\zeta)]$$

$$\mathbf{Y}_{j2} = [\gamma \operatorname{sh}(p_{j1}\zeta), -p_{j1} \operatorname{ch}(p_{j1}\zeta), 2\mu_j^0\gamma p_{j1} \operatorname{ch}(p_{j1}\zeta), \mu_j^0(2\gamma^2 - \Omega_j^2) \operatorname{sh}(p_{j1}\zeta)]$$

$$\mathbf{Y}_{j3} = [-p_{j2} \operatorname{ch}(p_{j2}\zeta), \gamma \operatorname{sh}(p_{j1}\zeta), -\mu_j^0(2\gamma^2 - \Omega_j^2) \operatorname{sh}(p_{j1}\zeta), 2\mu_j^0\gamma p_{j2} \operatorname{ch}(p_{j2}\zeta)]$$

$$\mathbf{Y}_{j4} = [-p_{j2} \operatorname{sh}(p_{j2}\zeta), \gamma \operatorname{ch}(p_{j1}\zeta), -\mu_j^0(2\gamma^2 - \Omega_j^2) \operatorname{ch}(p_{j1}\zeta), 2\mu_j^0\gamma p_{j2} \operatorname{sh}(p_{j2}\zeta)]$$

$$p_{j1} = \sqrt{\gamma^2 - \frac{\Omega_j^2}{k_j^2}}, \quad p_{j2} = \sqrt{\gamma^2 - \Omega_j^2}$$

Введем матричные оператор-функции  $\mathbf{B}_j(\zeta)$ , столбцами которых являются векторы  $\mathbf{Y}_{jm}$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ). Имеем

$$\mathbf{B}_j(\zeta) = [\mathbf{Y}_{j1}, \mathbf{Y}_{j2}, \mathbf{Y}_{j3}, \mathbf{Y}_{j4}]$$

Введем обозначения  $\mathbf{B}_{j0} = \mathbf{B}_j(0)$ ,  $\mathbf{V}_j = \mathbf{B}_{j0}^{-1}$  и построим оператор-функции

$$\mathbf{U}_j(\zeta) = \mathbf{B}_{j0}(\zeta)\mathbf{V}_j$$

Очевидно, что  $\mathbf{U}_j(0) = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  где – тождественный оператор.

Эволюционный оператор определим следующим образом:

$$\mathbf{U}(\zeta) = \begin{cases} \mathbf{U}_1(\zeta) & \text{при } 0 \leq \zeta \leq \zeta_1 \\ \mathbf{U}_2(\zeta - \zeta_1)\mathbf{U}_1(\zeta_1) & \text{при } \zeta_1 \leq \zeta \leq 1 \end{cases} \quad (1.11)$$

Оператор  $\mathbf{U}(\zeta)$  каждому вектору  $\mathbf{Y}_0 = [y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}]$ , где  $y_{m0} = y_m(0)$ , ставит в соответствие вектор  $\mathbf{Y}(\zeta)$ , который удовлетворяет уравнениям (1.6) и условию непрерывности (1.9).

Элементы матриц  $U(\zeta)$  и  $U = U(1)$  обозначим соответственно через  $U_{mn}(\zeta)$  и  $U_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, 3, 4$ ). С учетом принятых обозначений и граничных условий (1.8) имеем

$$Y_0 = [y_{10}, y_{20}, 0, g^*]$$

где  $y_{10}, y_{20}$  – произвольные постоянные, а условия сопряжения (1.10) принимают вид

$$\begin{aligned} U_{21}y_{10} + U_{22}y_{20} &= -U_{24}g^* - \varepsilon_1 \Omega^{-1} q_0 \Psi_0 \\ U_{31}y_{10} + U_{32}y_{20} &= -U_{31}g^* \\ U_{41}y_{10} + U_{42}y_{20} &= -U_{44}g^* + i\mu_1 \varepsilon_2 \Omega \Psi_0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Решая систему уравнений (1.12) относительно  $y_{10}, y_{20}, \Psi_0$ , получаем

$$\begin{aligned} y_{\beta 0} &= F^{-1} z_{\beta} g^*, \quad z_{\beta} = q_0 f_{\beta 0} + i\varepsilon \Omega^2 f_{\beta 1}, \quad \beta = 1, 2 \\ \Psi_0 &= \varepsilon_1^{-1} F^{-1} \Omega f g^*, \quad F = q_0 F^0 - i\varepsilon \Omega^2 F^1, \quad \varepsilon = \frac{c_0}{c_{1l}} \\ F^0 &= U_{31}U_{42} - U_{32}U_{41}, \quad F^1 = U_{31}U_{22} - U_{32}U_{21} \\ f_{10} &= U_{32}U_{44} - U_{34}U_{42}, \quad f_{11} = U_{32}U_{24} - U_{22}U_{34} \\ f_{20} &= U_{34}U_{41} - U_{31}U_{44}, \quad f_{21} = U_{21}U_{34} - U_{31}U_{24} \\ f &= U_{34}(U_{21}U_{42} - U_{22}U_{41}) - U_{44}(U_{21}U_{32} - U_{22}U_{31}) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Компоненты вектора смещений точек пластины и давление в жидкости представляются в виде следующих интегралов:

$$u_m(\xi, \zeta) = (i)^{m-1} \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_m(\zeta, \gamma)}{F(\gamma)} g^* \exp(i\gamma\xi) d\gamma, \quad m = 1, 2 \tag{1.14}$$

$$p(\xi, \zeta) = \frac{p_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\zeta, \gamma)}{F(\gamma)} g^* \exp[iq_0(\zeta - 1)] \exp(i\gamma\xi) d\gamma \tag{1.15}$$

$$p_0 = i\mu_1 \Omega^2, \quad U_m(\zeta, \gamma) = z_1 U_{m1}(\zeta) + z_2 U_{m2}(\zeta) + U_{m3}(\zeta)$$

**2. Критические частоты и моды двухслойной полосы.** Была дана [3, 4] общая теория определения критических частот и соответствующих им мод в случае, когда упругие характеристики пластины – произвольные кусочно-непрерывные функции поперечной координаты. Описанные в указанных работах результаты в несколько иной форме реализуются ниже для двухслойной полосы, лицевые поверхности которой свободны от напряжений.

Итак, в области  $S^0 = S_1 \cup S_2$  рассматриваются уравнения (1.1) при однородных граничных условиях

$$x_2 = 0: \sigma_{j12} = 0, \quad \sigma_{j12} = 0; \quad x_2 = h: \sigma_{j12} = 0, \quad \sigma_{j12} = 0 \tag{2.1}$$

и условиях непрерывности (1.4).

После перехода к безразмерным координатам и разделения переменных получаем двухпараметрическую спектральную задачу

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'_j &= \mathbf{A}_j(\gamma, \Omega) \mathbf{Y}_j \\ y_{13}(0) &= 0, \quad y_{14}(0) = 0, \quad y_{13}(1) = 0, \quad y_{14}(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Используя эволюционный оператор (1.11), для построения нетривиальных решений получаем дисперсионное уравнение

$$F^0(\gamma, \Omega) = 0 \quad (2.3)$$

Спектральной парой  $(\gamma, \Omega)$  будем называть значения  $\gamma$  и  $\Omega$ , для которых удовлетворяется уравнение (2.3). Критическими принято называть такие значения  $\Omega = \Omega_c$ , при которых уравнение (2.3) имеет кратные корни  $\gamma_c$ . Спектральную пару  $(\gamma_c, \Omega_c)$  будем называть критической.

Известно [5, 6], что  $\gamma_c = 0$  – кратное собственное значение (СЗ). Как правило, кратность равна 2, однако при некоторых значениях параметров кратность может быть равна 4 [4, 7].

Подставляя  $\gamma = 0$  в уравнение (2.3), получаем

$$F^0(0, \Omega) = D_1(\Omega)D_2(\Omega) = 0 \quad (2.4)$$

где

$$D_1(\Omega) = \cos(\zeta_1 \Omega) \sin(m_1 \zeta_2 \Omega) + \kappa_t \sin(\zeta_1 \Omega) \cos(m_1 \zeta_2 \Omega)$$

$$D_2(\Omega) = \cos(m_{1l} \zeta_1 \Omega) \sin(m_{2l} \zeta_2 \Omega) + \kappa_l \sin(m_{1l} \zeta_1 \Omega) \cos(m_{2l} \zeta_2 \Omega)$$

$$c_{jl} = \frac{\sqrt{\chi_j}}{\sqrt{\rho_j}}, \quad \kappa_t = \frac{c_{1l} \rho_1}{c_{2l} \rho_2}, \quad \kappa_l = \frac{c_{1l} \rho_1}{c_{2l} \rho_2}, \quad m_t = \frac{c_{1l}}{c_{2l}}, \quad m_{1l} = \frac{c_{1l}}{c_{1l}}, \quad m_{2l} = \frac{c_{2l}}{c_{2l}}$$

Параметры  $\kappa_t$  и  $\kappa_l$  характеризуют отношение волновых сопротивлений поперечных и продольных волн соответственно.

Нули функций  $D_1(\Omega)$  и  $D_2(\Omega)$  будем называть критическими частотами первого и второго рода соответственно и обозначим их  $\Omega_{1r}$  и  $\Omega_{2r}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ).

Обозначим через  $\mathbf{Y}^0 = \{ \mathbf{Y}_1^0, \mathbf{Y}_2^0 \}$ ,  $\mathbf{Y}_j^0 = [y_{j1}^0, y_{j2}^0, y_{j3}^0, y_{j4}^0]$  собственный вектор (СВ), соответствующий критической спектральной паре. Его  $j$ -компоненты имеют следующую структуру:  $\mathbf{Y}_j^0 = [y_{j1}^0, 0, 0, y_{j4}^0]$  для  $\Omega_{1r}$  и  $\mathbf{Y}_j^0 = [0, y_{j2}^0, y_{j3}^0, 0]$  для  $\Omega_{2r}$ . Поскольку  $\gamma_c = 0$  – кратное СЗ, то возможно существование присоединенного вектора

$$\mathbf{Y}^1 = \{ \mathbf{Y}_1^1, \mathbf{Y}_2^1 \}$$

$j$ -компоненты которого определяются решением неоднородной задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'_j{}^1 &= \mathbf{A}_j(0, \Omega_c) \mathbf{Y}_j^1 + \mathbf{Y}_j^0 \\ y_{j3}^1(0) &= 0, \quad y_{j4}^1(0) = 0, \quad y_{j3}^1(1) = 0, \quad y_{j4}^1(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

и имеют следующую структуру:  $\mathbf{Y}_j^1 = [0, y_{j2}^1, y_{j3}^1, 0]$  для  $\Omega_{1r}$  и  $\mathbf{Y}_j^1 = [y_{j1}^1, 0, 0, y_{j4}^1]$  для  $\Omega_{2r}$ .

Если интеграл

$$d = \int_0^1 \mathbf{Y}^1 \cdot \mathbf{J} \mathbf{Y}^0 d\zeta \neq 0 \tag{2.6}$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

( $\mathbf{0}$  – нулевая,  $\mathbf{I}$  – единичная ( $2 \times 2$ ) – матрицы), то других присоединенных векторов не существует. При этом исходная задача (1.1), (2.1) имеет два элементарных решения:

в случае  $\Omega = \Omega_{1r}$

$$\mathbf{w}_j^0 = [y_{j1}^0, 0, 0, y_{j4}^0], \quad \mathbf{w}_j^1 = [i\xi y_{j1}^0, iy_{j2}^1, iy_{j3}^1, -\xi y_{j4}^0] \tag{2.7}$$

в случае  $\Omega = \Omega_{2r}$

$$\mathbf{w}_j^0 = [0, y_{j2}^0, y_{j3}^0, 0], \quad \mathbf{w}_j^1 = [y_{j1}^1, -\xi y_{j2}^0, i\xi y_{j3}^0, iy_{j4}^1] \tag{2.8}$$

Элементарные решения  $\mathbf{w}_j^0$  описывают толщинные резонансы (продольный и поперечный). Элементарные решения  $\mathbf{w}_j^1$ , как следует из выражений (2.7), (2.8), неограниченно растут при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , что является следствием предположения об идеальной упругости материалов полос и отсутствия излучения энергии через лицевые поверхности в силу принятых граничных условий (2.1).

Заметим, что условие (2.6) эквивалентно условию

$$F_{\gamma\gamma}^0(0, \Omega_c) \neq 0 \tag{2.9}$$

Если  $d = 0$ , то существует по крайней мере еще два присоединенных вектора (2.3)

$\mathbf{Y}^s = \{ \mathbf{Y}_1^s, \mathbf{Y}_2^s \}$  ( $s = 2, 3$ ),  $j$ -компоненты которых определяются решением неоднородных задач

$$\mathbf{Y}_j^{s1} = \mathbf{A}_j(0, \Omega_c) \mathbf{Y}_j^s + \mathbf{Y}_j^{s-1}$$

$$y_{j3}^s(0) = 0, \quad y_{j4}^s(0) = 0, \quad y_{j3}^s(1) = 0, \quad y_{j4}^s(1) = 0$$

В этом случае существует еще пара элементарных решений с более высоким степенным ростом [4, 7].

Заметим, что резонансные моды не переносят энергии вдоль полосы, поскольку их удельный средний за период поток энергии через поперечное сечение полосы равен

$$P^0(\mathbf{w}^0) = \frac{ih\mu_1\omega}{2} \int_0^1 \mathbf{w}^0 \cdot \mathbf{J} \mathbf{w}^0 d\zeta = 0, \quad \mathbf{w}^0 = \{ \mathbf{w}_1^0, \mathbf{w}_2^0 \}$$

Это свойство резонансных мод, как будет видно из дальнейшего, оказывается важным в проблеме локализации колебаний в окрестности конечной области приложения внешней нагрузки  $\sigma_{122}|_{\zeta=0} = \mu_1 g(\xi)$ .

В заключение этого раздела заметим, что для каждой резонансной частоты уравнение (2.3) имеет конечное число  $2N$  вещественных корней  $\alpha_n^\pm = \pm\alpha_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ;  $\alpha_n > 0$ ) и счетное симметричное множество комплексных  $\gamma_k$ . Хорошо известно [7, 8], что потоки энергии мод, соответствующих вещественным корням (однородным модам), отличны от нуля, потоки энергии, соответствующие комплексным корням (неоднородным модам), равны нулю. Поэтому только однородные моды “ответственны” за перенос энергии в неограниченном волноводе.

**3. Квазикритические и квазиоднородные моды и локализация колебаний.** Вернемся к исходной задаче. Предположим, что амплитуда заданного при  $\zeta = 0$  давления  $\mu_1 g(\xi)$  отлична от нуля в области  $-a \leq \xi \leq a$ . Прежде чем перейти к анализу интегрального представления решения (1.14), исследуем предварительно уравнение

$$F(\gamma, \Omega) = q_0 F^0 - i\epsilon \Omega^2 F^1 = 0 \quad (3.1)$$

в предположении, что параметр  $\epsilon \ll 1$ . В этом случае распределение корней этого уравнения, зная распределение корней уравнения (2.3), можно определить методами теории возмущений.

Пусть  $\Omega = \Omega_c$ . В этом случае уравнение (3.1) имеет кратные волновые числа  $\gamma_0 = 0$  только при  $\Omega_c = \Omega_{1r}$ , поскольку идеальная жидкость не оказывает влияния на продольные колебания полосы, что также подтверждается анализом уравнения (3.1). При  $\Omega_c = \Omega_{2r}$  кратность утрачивается, и при малых  $\epsilon$  появляется пара (в случае кратности равной 2) комплексных волновых чисел вида

$$\begin{aligned} \gamma_0^\pm &= \pm \epsilon^{1/2} |\alpha_0|^{1/2} (1 + i \operatorname{sign} \alpha_0) + O(\epsilon^{3/2}) \\ \alpha_0 &= -q_0 \Omega_c^2 F^1(0, \Omega_c) / F_{,\gamma}^0(0, \Omega_c) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Эти волновые числа будем называть квазикритическими, соответствующие моды – квазикритическими модами. Приближенные численные значения, определяемые на основе формулы (3.2), легко уточняются численными методами. Из формулы (3.2) вытекает, что квазикритические моды данного типа являются затухающими с коэффициентом затухания пропорциональным  $\epsilon^{1/2}$ .

В отличие от квазикритических квазиоднородные моды, которые возникают в результате возмущения однородных мод, затухают значительно медленнее. Соответствующие им волновые числа при малых  $\epsilon$  определяются следующими аналитическими выражениями:

$$\gamma_n^\pm = \pm \alpha_n \mp i\epsilon \Omega_c^2 F^1(0, \Omega_c) / F_{,\gamma}^0(0, \Omega_c) + O(\epsilon^2) \quad (3.3)$$

Из формул (3.2), (3.3) видно, что из пары квазикритических волновых чисел одно имеет положительную мнимую часть, второе – отрицательную, аналогичными свойствами обладает множество  $\gamma_n^\pm$ . В дальнейшем  $\gamma_n^+$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) означает, что  $\operatorname{Im} \gamma_n^+ > 0$ . Аналогичные обозначения принимаются и для остальных корней уравнения (3.1), которые при  $\epsilon \rightarrow 0$  стремятся к комплексным корням уравнения (2.3).

Пусть  $\Omega = \Omega_{2r}$ . Рассмотрим произвольную полевую характеристику, например  $u_2$ . Интеграл в правой части равенства (1.14) преобразуем с помощью теории вычетов. Учитывая, что подынтегральное выражение имеет точки ветвления  $\gamma_*^\pm = \pm \Omega_{2r} / \theta$ , для  $\xi \geq a$  имеем

$$u_2 = \sum_{n=0}^N \frac{U_2(\zeta, \gamma_n^+)}{F_{,\gamma}(\gamma_n^+)} C_n' \exp(i\gamma_n^+ \xi) + \sum_k \frac{U_2(\zeta, \gamma_k^+)}{F_{,\gamma}(\gamma_k^+)} C_k' \exp(i\gamma_k^+ \xi) + \int_{\Gamma^+} \frac{U_2(\zeta, \gamma)}{F(\gamma)} g^* \exp(i\gamma \xi) d\gamma \quad (3.4)$$

$$C_p^r = \int_{-a}^a g(\xi) \exp(-i\gamma_n^+ \xi) d\xi, \quad p = n, k$$

$\Gamma^+$  – контур в виде уходящей на бесконечность петли, расположенной в верхней полуплоскости, с вершиной в точке  $\gamma = \gamma_*^+$  [8]. Поскольку при  $\epsilon \rightarrow 0$  интеграл по петле исчезает, то, как следует из формулы (3.4), для локализации колебаний в окрестности приложения нагрузки достаточно выбрать функцию  $g(\xi)$  таким образом, чтобы  $C_n^r = 0$  ( $n = 1, \dots, N$ ), т.е., иными словами, “запереть” квазиоднородные моды. Очевидно, что такая задача имеет неединственное решение и предоставляет некоторую свободу выбора функции  $g(\xi)$  для управления характеристиками направленности звукового поля в жидкости.

В данной работе нагрузка отыскивалась в виде

$$g(\xi) = g_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^N l_i \xi^{2i} \right) \tag{3.5}$$

Коэффициенты  $l_i$  определялись решением алгебраической системы, вытекающей из условий

$$C_n = \int_{-a}^a \cos(\alpha_n \xi) g(\xi) d\xi = 0, \quad n = 1, \dots, N \tag{3.6}$$

Замена условий  $C_n^r = 0$  ( $n = 1, \dots, N$ ) на условия (3.6) при малых  $\epsilon$  мало влияет на конечные результаты, но приводит к алгебраической системе с вещественными коэффициентами.

**4. Характеристика направленности.** Для построения характеристики направленности поля давления в дальнем поле обратимся к формуле (1.15).

Используя замену

$$\xi = \rho \cos \tau, \quad \zeta = 1 + \rho \sin \tau, \quad \tau \in (0, \pi), \quad \rho \in (0, \infty)$$

преобразуем интеграл к виду

$$p(\rho, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\gamma) \exp[ipK(\gamma, \tau)] d\gamma \tag{4.1}$$

где

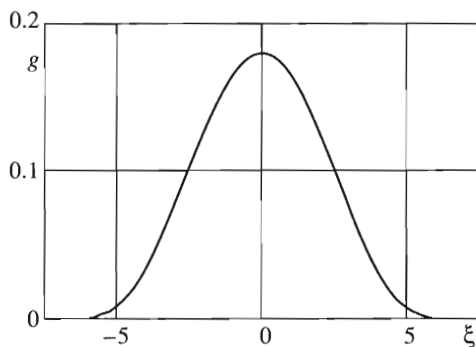
$$U(\gamma) = \frac{P_0 f(\gamma)}{2\pi i F(\gamma)} g^*, \quad K(\gamma, \tau) = \gamma \cos \tau - \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} \sin \tau$$

Используя метод стационарной фазы [9], определим точку  $\gamma_{st}$ , в которой фаза принимает стационарное значение. Имеем

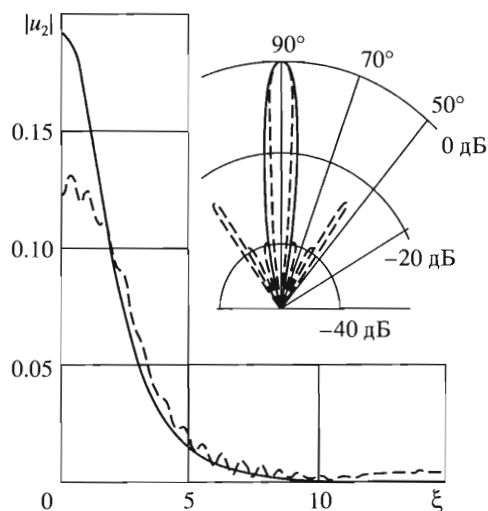
$$\gamma_{st} = -\Omega_{2r} |\cos \tau| / \theta \tag{4.2}$$

Преобразуя выражение (4.1) с учетом выражения (4.2), получаем асимптотическую формулу для вычисления звукового давления

$$p(\rho, \tau) = \sqrt{\frac{2\pi\Omega_{2r}}{\rho\theta}} U\left(-\frac{\Omega_{2r} |\cos \tau|}{\theta}\right) \sin \tau \exp\left(-\frac{i\rho\Omega_{2r}}{\theta} + \frac{i\pi}{4}\right) + O(\rho^{-1}) \tag{4.3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Получаем также формулу для построения характеристики направленности

$$d(\tau) = 8.6859 \ln \left| \frac{p(\rho, \tau)}{p(\rho, \pi/2)} \right| = 8.6859 \ln \left| \frac{U(-\Omega_{2r} |\cos \tau|) / \theta}{U(0)} \sin \tau \right| \quad (4.4)$$

**5. Результаты расчетов.** Приведем некоторые результаты численного исследования задачи. Расчеты проводились для системы сталь–резина–вода со следующими значениями параметров:

$$h = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad h_1 = h_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \mu_1 = 7.84 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \mu_2 = 3.92 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2,$$

$$v_1 = 0.29, \quad v_2 = 0.45, \quad \rho_1 = 7.18 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_2 = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad c_0 = 1490 \text{ м/с}, \quad a = 6$$

и для первой критической частоты  $\Omega_{21} = 2.3845$ . При этом волновые числа квазикритических мод

$$\gamma_c = \mp 0.1794 \pm 0.1823i$$

волновые числа однородных мод при отсутствии жидкости

$$\alpha_1 = 2.631, \quad \alpha_2 = 2.903, \quad \alpha_3 = 5.546$$

волновые числа квазиоднородных мод

$$\gamma_1^\pm = \mp 2.633 \pm 0.0403i, \quad \gamma_2^\pm = \mp 2.902 \pm 0.0106i, \quad \gamma_3^\pm = \mp 5.547 \pm 0.0298i$$

Мнимые части  $\gamma_c^\pm, \gamma_n^\pm$  наглядно иллюстрируют разницу в скорости затухания квазикритической и квазиоднородных мод. Заметим, что в данной задаче затухание выбранных мод обусловлено излучением звуковой энергии в полуограниченную акустическую среду (в воду).

На фиг. 1 приведен график распределения амплитуды внешнего давления  $g(\xi)$  (использована нормировка  $\int_{-a}^a g(\xi) d\xi = 1$ ), при котором амплитуды однородных мод в областях  $|\xi| \geq a$  равны нулю.

На фиг. 2 приведены графики  $|\mu_{22}(\xi, 1)|$ ; сплошная линия соответствует распределению давления  $g(\xi)$  и иллюстрирует локализацию колебаний в окрестности области приложения внешней нагрузки, штриховая линия соответствует распределению давления  $g^0(\xi) = 0.08333$  ( $|\xi| \leq a$ ).

В правой верхней части фиг. 2 изображена характеристика направленности поля давления в дальнем поле, соответствующая распределению давления  $g(\xi)$  при  $\Omega = \Omega_{21}$  (сплошная линия) и распределению давления  $g^0(\xi) = 0.08333$  ( $|\xi| \leq a$ ) (штриховая линия). Видно, что в первом из этих случаев колебания в жидкости локализованы вдоль вертикальной оси и имеют характер остро направленного луча.

Авторы благодарят И.П. Гетмана за внимание к работе и советы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00454, 04-01-00069) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-2113.2003.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Устинов Ю.А. О затухании волн Лэмба в окрестности критических частот и локализация колебаний в слое. // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 3. С. 330–333.
2. Карпинский И.Д., Устинов Ю.А. О критических частотах и модах и их затухании в пластине, лежащей на поверхности сжимаемой жидкости // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 179–187.
3. Устинов Ю.А. О критических модах неоднородной пластины // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 4. С. 473–476.
4. Диденко Е.В., Устинов Ю.А. Критические моды колебаний поперечно-неоднородной пластины периодической структуры // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 481–490.
5. Краснушкин П.Е. О возбуждении нормальных и присоединенных волн в бесконечной слоистой упругой полосе // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 877–886.
6. Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
7. Гетман И.П., Устинов Ю.А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1993. 144 с.
8. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. Думка, 1981. 283 с.
9. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Ростов-на-Дону  
e-mail: alex4285@mail.ru  
ustinov@math.rsu.ru

Поступила в редакцию  
27.11.2003