

УДК 539.3:534.1

© 2005 г. Е. И. Свешникова

ВОЛНЫ РИМАНА В УПРУГОЙ СРЕДЕ С МАЛОЙ КУБИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Рассматриваются волны Римана в слабонелинейном слабоанизотропном упругом материале, обладающем свойством кубической симметрии. Упругий потенциал взят в виде разложения в ряд по деформациям до четвертого порядка малости. Анизотропия в этом разложении представлена кубическими членами с малым коэффициентом. Для такой модели получено и исследовано решение в виде квазипоперечных волн Римана, распространяющихся вдоль главной диагонали куба. Найдены характеристические скорости, построены интегральные кривые на фазовой плоскости, указано направление изменения параметров вдоль интегральных кривых, которое ведет к опрокидыванию профиля решения.

1. Постановка задачи. Задание упругого потенциала. В упругой среде с упругим потенциалом Φ отыскиваются непрерывные решения уравнений движения в виде плоских волн Римана. Рассмотрение ведется в лагранжевых переменных в декартовой системе начального состояния. Ось $x_3 = x$ ортогональна фронту волны, оси x_1, x_2 лежат в плоскости фронта. Деформации характеризуются компонентами $\partial w_i / \partial x_k$ ($i, k = 1, 2, 3$) градиента вектора перемещений \mathbf{w} и считаются малыми $\sim \varepsilon$. В плоской волне меняются только $\partial w_i / \partial x = u_i(x, t)$, остальные компоненты $\partial w_i / \partial x_\alpha$, ($\alpha = 1, 2$) постоянны и приняты равными нулю.

Уравнения движения имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x \partial u_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial t}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

где $v_i = \partial w_i / \partial t$ – компоненты вектора скорости, $\Phi = \rho_0 U$ – упругий потенциал, где U – внутренняя энергия единицы массы, ρ_0 – плотность среды, которая вследствие предполагаемой однородности постоянна и далее будет принята единицей. Энтропия в волне Римана считается постоянной, так что $\Phi = \Phi(u_i)$. Функцию Φ вследствие малости деформаций можно представить рядом по u_i , сохраняя в нем столько степеней u_i , чтобы проявились эффекты нелинейности среды. Известно [1, 2], что для этого достаточно ограничиться четвертыми степенями u_i . Из-за нелинейности чисто продольные и чисто поперечные упругие волны становятся квазипродольными и квазипоперечными. Далее, как более интересные, рассматриваются только квазипоперечные волны, в которых изменение продольной компоненты u_3 на порядок меньше, чем u_1 и u_2 . Это учитывается при разложении функции Φ в ряд. Для квазипоперечных нелинейных волн в изотропной среде у функции Φ оказываются существенными следующие члены разложения:

$$\Phi_{is} = \Phi_0 = \frac{f_0}{2}(u_1^2 + u_2^2) + \frac{d}{2}u_3^2 + bu_3(u_1^2 + u_2^2) + \frac{h}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2 \quad (1.2)$$

где f, b, d, h – упругие постоянные среды.

Было показано [2], что новые качественные свойства приобретают квазипоперечные волны в среде с малой анизотропией (что на практике всегда имеет место). Чтобы эффекты нелинейности и анизотропии проявились в их взаимодействии, нужно, чтобы в разложении Φ члены, учитывающие анизотропию, были того же порядка, что и нелинейные, т.е. четвертого по u_i . Если названные свойства среды будут представлены слагаемыми разного порядка, то влияние одного из них подавит другое. В случае анизотропии общего вида следующий член в разложении (1.2) имеет вид $g(u_2^2 - u_1^2)$, где коэффициент $g \sim \varepsilon^2$. Именно такой член естественным образом появляется уже в изотропной среде в присутствии постоянной предварительной деформации в плоскости фронта волны. Изучению нелинейных волн в такой среде посвящены многие работы, в том числе [2], а волны Римана описаны еще и в [3].

Однако большой интерес всегда вызывало появление малой анизотропии другого вида. В среде без предварительной деформации, например, может случиться, что в разложении функции Φ квадратичные по u_i слагаемые отсутствуют и тогда анизотропию могут представлять кубические по u_i члены с малым коэффициентом $g \sim \varepsilon$. Оказывается такие свойства при определенных условиях имеет упругий потенциал среды, обладающей кубической симметрией. Упругий потенциал кубического кристалла был представлен [4] разложением до третьих степеней по компонентам ε_{ij} тензора деформаций Грина в осях, привязанных к осям симметрии кристалла. Для целей дальнейшего анализа следует преобразовать его выражение к новым, повернутым на соответствующий угол, осям, так чтобы ось x_3 шла по направлению распространения плоской волны, а сами ε_{ij} выразить через компоненты u_i . Такое преобразование было выполнено [5] для трех специальных направлений движения волны:

вдоль ребра куба

$$\Phi_{\text{cub}}^{(r)} = \alpha(u_1^2 + u_2^2) + \beta u_3^2 + A u_3^3 + B u_3(u_1^2 + u_2^2)$$

вдоль диагонали грани

$$\Phi_{\text{cub}}^{(d)} = \alpha_1(u_1^2 + u_2^2) + \alpha_2(u_1^2 - u_2^2) + \beta u_3^2 + A u_3^3 + u_3(B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2)$$

вдоль главной диагонали куба

$$\Phi_{\text{cub}}^{(dm)} = \alpha(u_1^2 + u_2^2) + \beta u_3^2 + A(3u_1^2 u_2 - u_2^3) + u_3(B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2 + B_3 u_3^2)$$

Видно, что функция $\Phi_{\text{cub}}^{(r)}$ содержит только изотропные члены и в рассматриваемой здесь задаче интереса не представляет. В выражении для $\Phi_{\text{cub}}^{(d)}$ член $\alpha_2(u_1^2 - u_2^2)$, представляющий анизотропию, имеет тот же вид, что в [2, 3]. Поэтому далее рассматривается только случай движения волны вдоль главной диагонали куба. При этом последние два слагаемые будут включены в функцию $\Phi_{is} = \Phi_0$. Так как анизотропия предполагается малой, в общем разложении функции Φ дополнительное слагаемое $\Phi_{\text{cub}}^{(dm)}$ должно входить с малым множителем $g \sim \varepsilon$. Учитывая, что для квазипоперечных волн $u_3 \sim \varepsilon^2$, в выражении $\Phi_{\text{cub}}^{(dm)}$ следует сохранить только первое из кубических слагаемых. В результате для квазипоперечных волн с малой кубической анизотропией упругий потенциал имеет вид

$$\Phi = \Phi_0 + g(3u_1 u_2^2 - u_1^3) \quad (1.3)$$

Заметим, что малое отличие направления распространения волн от указанного может привести к появлению новых членов в упругом потенциале, в частности, ани-

зотропных, квадратичных по u_i членов с малыми коэффициентами. Если отклонения направления распространения волны достаточно малы, то можно использовать представление для Φ , данное формулой (1.3).

Было показано в [2], что для нелинейных квазипоперечных волн малой амплитуды из уравнений (1.1) изменение продольной компоненты u_3 можно выразить через изменения поперечных компонент u_1, u_2 , после чего упругий потенциал удастся записать как функцию только поперечных компонент u_1 и u_2 . Так как добавленный анизотропный член в формуле (1.3) не содержит u_3 , то указанное свойство функции Φ остается прежним и для кубического кристалла. Это позволяет для квазипоперечных волн упругий потенциал Φ заменить функцией $H(u_1, u_2)$ только двух переменных, которую можно трактовать как упругий потенциал эквивалентной несжимаемой среды, в которой распространяются две чисто поперечные волны. Функция $H(u_1, u_2)$ имеет вид

$$H(u_1, u_2) = \frac{f}{2}(u_1^2 + u_2^2) - \frac{\kappa}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2 + g(3u_1u_2^2 - u_1^3) \quad (1.4)$$

Здесь f, κ, g – упругие постоянные. Коэффициент f (он включил в себя и изотропные члены из функции $\Phi_{\text{cub}}^{(dm)}$) имеет смысл квадрата скорости линейной поперечной волны в изотропной среде. Коэффициент $\kappa = h - 2b^2/(d - f_0)$ служит параметром нелинейности, от знака которого зависит поведение волн. Коэффициент $g \sim \epsilon$ представляет параметр анизотропии, который с помощью изменения нумерации осей всегда можно сделать положительным.

Нетрудно показать, что функция $H(u_1, u_2)$, заданная формулой (1.4), обладает симметрией: если оси u_1, u_2 повернуть как целое на угол $2\pi/3$, то в новых переменных ее вид не изменится. Кроме того, она обладает симметрией относительно оси u_1 .

Итак, система уравнений (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = H_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \quad H_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 H}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (1.5)$$

Функция $H(u_1, u_2)$ задана формулой (1.4) и принято $\rho_0 = 1$.

2. Характеристические скорости и интегральные кривые волн Римана. Для системы (1.5) ищем решение вида $u_\alpha = u_\alpha(\theta(x, t)), v_\alpha = v_\alpha(\theta(x, t))$, где $\theta(x, t)$ – некоторая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + c(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

Такое решение представляет волну Римана. Система (1.5) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $du_\alpha/d\theta$

$$\begin{aligned} (H_{11} - c^2) \frac{du_1}{d\theta} + H_{12} \frac{du_2}{d\theta} &= 0 \\ H_{12} \frac{du_1}{d\theta} + (H_{22} - c^2) \frac{du_2}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Система имеет нетривиальное решение, если $|H_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \lambda| = 0$. Корни этого уравнения являются собственными значениями λ_1 и λ_2 матрицы $\|H_{\alpha\beta}\|$ (совпадающими с квадратами скоростей волн Римана $\lambda_\alpha = c_\alpha^2$), а ее собственный вектор определяет в каждой точке фазовой плоскости u_1, u_2 направление интегральных кривых (ИК) искомого решения.

Характеристические скорости вычисляются по формулам

$$\lambda_{1,2} = c_{1,2}^2 = f - 2\kappa(u_1^2 + u_2^2) \mp |\kappa|Q \quad (2.2)$$

$$Q = \sqrt{(u_1^2 - u_2^2 + 2Gu_1)^2 + 4u_2^2(u_1 - G)^2}, \quad G = g/\kappa$$

Знак перед корнем в формуле (2.2) выбираем так, чтобы $c_1 \leq c_2$. Волны Римана, соответствующие характеристической скорости c_1 , называем медленными, другие, соответствующие c_2 , – быстрыми. Выбор знака в формуле (2.2), а следовательно, и поведение решения зависят от знака κ . Для определенности все рассуждения будем проводить для $\kappa > 0$ и в формуле (2.2) и дальнейших всегда выбирать верхний знак для медленных волн (c_1) и нижний для быстрых (c_2). Для сред, которым отвечает $\kappa < 0$, исследование проводится аналогичным образом и его результаты приведены в конце разд. 4.

Система (2.1) дает уравнения для направлений двух семейств ИК, ортогональных вследствие симметрии матрицы $\|H_{\alpha\beta}\|$

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - H_{11}}{H_{12}} = \frac{u_1^2 - u_2^2 - 2Gu_1 \pm Q}{2u_2(u_1 - G)} \quad (2.3)$$

Это уравнение зависит от параметров нелинейности κ и анизотропии g только в виде их отношения $G = g/\kappa$. Это позволяет изменением масштабов по осям u_1 и u_2 , т.е. положив $u_1 = u'_1 G$, $u_2 = u'_2 G$, получить в новых переменных универсальный вид уравнений ИК, не зависящий от параметров κ и g (штрих далее опускаем),

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_1^2 - u_2^2 - 2u_1 \pm Q_1}{2u_2(u_1 - 1)} \quad (2.4)$$

$$Q_1 = \sqrt{(u_1^2 - u_2^2 + 2u_1)^2 + 4u_2^2(u_1 - 1)^2}$$

Характеристические скорости в этих переменных имеют вид

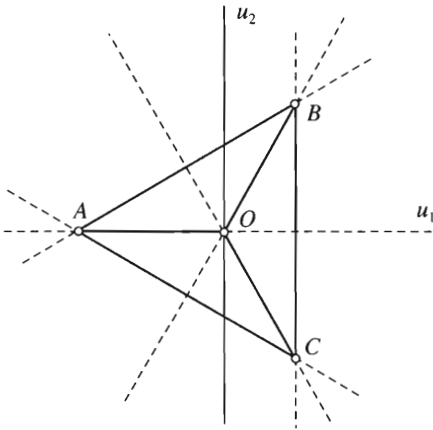
$$\lambda_{1,2} = f - \kappa G^2 \{2(u_1^2 + u_2^2) \pm Q_1\} \quad (2.5)$$

и в отличие от ИК имеют различное поведение при разных знаках κ .

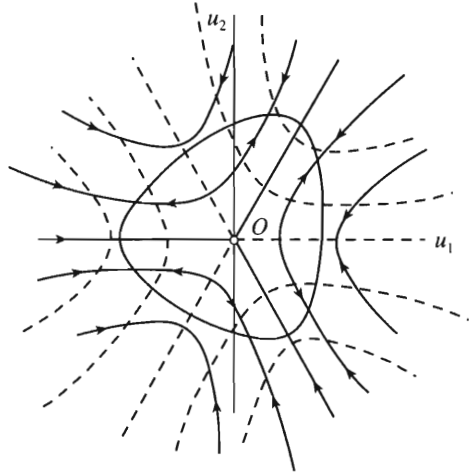
3. Интегральные кривые на фазовой плоскости u_1, u_2 . Отмеченная в разд. 1 симметрия упругого потенциала делает формулы (2.4) для ИК симметричными относительно поворота на угол $2\pi/3$ и относительно оси u_1 , поэтому на плоскости u_1, u_2 достаточно исследовать картину ИК внутри угла $\pi/3$.

При $u_\alpha \gg 1$ (т.е. когда параметр анизотропии g очень мал) уравнения (2.4) дают окружности с центром в начале координат для быстрых волн и лучи для медленных, как и положено в изотропной среде. В общем случае линии (2.4) имеют на плоскости u_1, u_2 четыре особые точки с координатами $O(0, 0)$, $A(-2, 0)$, $B, C(1, \pm\sqrt{3})$ (фиг. 1).

Проследим за наклоном интегральных линий (2.4) на прямых, проходящих через особые точки A, B, C . На отрезке прямой $u_1 = 1$ в диапазоне $|u_2| < \sqrt{3}$, т.е. на стороне треугольника BC для медленных (индекс s) волн Римана получим $(du_2/du_1)_s = 0$, для быстрых (индекс f) $(du_2/du_1)_f = \infty$. Значит, сторона треугольника BC – одна из интегральных линий семейства быстрых волн, а по симметрии и две другие стороны AB и AC обладают этим свойством. ИК медленных волн ортогональны сторонам треугольника. В точках их пересечения с отрезком BC функции $u_2 = u_2(u_1)$, представляю-



Фиг. 1



Фиг. 2

щие ИК, имеют экстремум, а именно, минимум. По симметрии этим же свойством обладают ИК медленного семейства при пересечении других сторон треугольника AB и AC . В области $|u_2| > \sqrt{3}$ на прямой $u_1 = 1$, наоборот,

$$(du_2/du_1)_s = \infty, \quad (du_2/du_1)_f = 0$$

и продолжение стороны треугольника BC (и всех остальных сторон) во внешнюю (от треугольника ABC) область служит ИК медленных волн, а ИК быстрого семейства ортогональны им и в точках пересечения с прямой $u_1 = 1$ представляющие их функции $u_2 = u_2(u_1)$ имеют максимум.

Аналогичным образом выясняется, что участок оси u_1 между особыми точками $A(-2, 0)$ и $O(0, 0)$ является ИК быстрых волн, а вся остальная ось u_1 – медленных. По симметрии и другие отрезки, соединяющие начало координат с вершинами треугольника, принадлежат семейству быстрых волн, а их продолжения – медленных. На фиг. 1 сплошными линиями изображены прямолинейные ИК семейства быстрых волн, а штриховыми – медленных.

Рассмотрим поле ИК около особых точек. В окрестности точки O можно считать $u_\alpha \ll 1$ и заменить уравнение (2.4) приближенным

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_1 \pm \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{u_2} \tag{3.1}$$

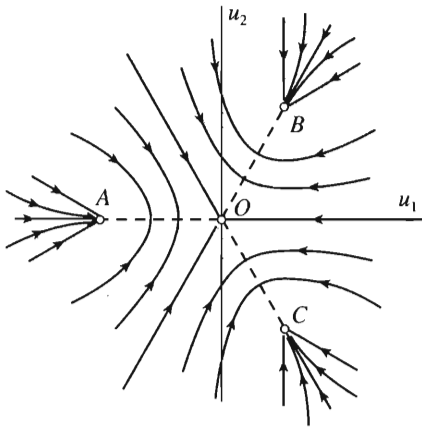
Интегрирование с использованием полярных координат r, θ ($u_1 = r \cos \theta, u_2 = r \sin \theta$) дает

$$r^3 = \frac{C}{(\cos \theta \mp 1)(\cos \theta \pm 1/2)} \tag{3.2}$$

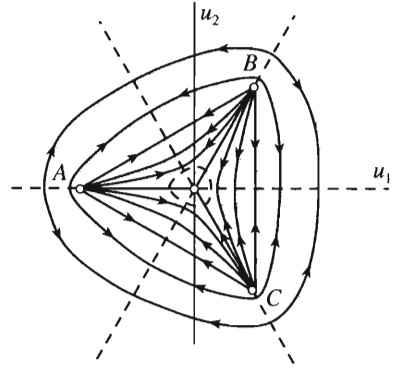
где верхний знак берется для медленных волн, нижний – для быстрых.

Таким образом ИК двух семейств ортогональны между собой и похожи на гиперболы с асимптотами, идущими по лучам $\theta = 0, \theta = \pm 2\pi/3$ для медленных волн и $\theta = \pm \pi/3, \theta = -\pi$ для быстрых (фиг. 2).

Из остальных особых точек достаточно (вследствие симметрии) рассмотреть одну, например точку $A(-2, 0)$. Перейдем в систему координат x, y , связанную с этой



Фиг. 3



Фиг. 4

точкой, положив $u_1 = x - 2$, $u_2 = y$, и рассмотрим малую окрестность точки A. Уравнения ИК (2.4) в линейном приближении примут вид

$$dy/dx = (-x \mp \sqrt{x^2 + 9y^2})/(3y) \tag{3.3}$$

Как всегда, верхний знак в формуле соответствует медленным волнам, нижний – быстрым. ИК обоих семейств могут входить в эту особую точку только по направлениям, для которых радиус-вектор совпадает с касательной к ИК $y/x = dy/dx$. Отсюда с использованием равенства (3.3) получим $y = 0$, т.е. ось u_1 , и $y = \pm\sqrt{3}x$, т.е. направления сторон треугольника AB и AC и их продолжения за вершину A . ИК быстрых волн, идущая вдоль оси u_1 , выходит из особой точки A и входит в другую особую точку O .

В области, примыкающей к оси u_1 , можно считать $x_2 \gg 9y^2$. Тогда для медленных (быстрых) волн в окрестности точки A получим

$$y = \pm Cx^{3/2} \text{ в области } x < 0 \ (x > 0), \text{ т.е. при } u_1 < -2 \ (u_1 > -2)$$

$$x^2 + \frac{3}{2}y^2 = C \text{ в области } x > 0 \ (x < 0), \text{ т.е. при } u_1 > -2 \ (u_1 < -2)$$

C – постоянная интегрирования; ИК входят в особую точку, касаясь оси u_1 , ИК другого семейства огибают ее дугами эллипсов. ИК $y = \pm Cx^{3/2}$, выходящие из особой точки A , остаются внутри угла между лучами, идущими из точки A под углом $\pm\pi/6$ к оси u_1 . Каждая из ИК быстрого семейства входит затем в другую особую точку B или C , касаясь луча, идущего из начала координат в эту особую точку.

Прямые, ограничивающие указанный угол, тоже являются ИК и проходят через особые точки, образуя треугольник ABC . Поведение соседних к ним ИК проследим на примере окрестности прямой $u_1 = 1$. Положим $u_1 - 1 = x$, считая x малым. Для бы-

стрых волн получим $x = \pm C\sqrt{3 - v^2}$. При подходе к особым точкам эти линии переходят в касательные к лучам, идущим из начала координат в особые точки, или стыкуются с дугами эллипсов, огибающих особые точки. Общая картина ИК на плоскости (u_1, u_2) представлена на фиг. 3 для медленных волн и на фиг. 4 для быстрых.

4. Изменение профиля возмущения в волне Римана. Так как характеристические скорости c_α (2.3) зависят от решения u_α , то при распространении возмущения его

форма меняется. Если c_α увеличивается при изменении u_α вдоль своей ИК, то волна имеет тенденцию к опрокидыванию. Укажем (стрелками на фиг. 3 и 4) направления увеличения c вдоль ИК, что ведет к опрокидыванию волн. Вместо характеристических скоростей будем использовать их квадраты $\lambda_\alpha = c_\alpha^2$, а элемент длины ИК обозначать dl . Нужно определить знак величины $d\lambda_\alpha/dl$ и нанести линии перемены ее знака на поле ИК на плоскости (u_1, u_2) . Для определенности считаем, что параметр нелинейности $\kappa > 0$, для $\kappa < 0$ направления стрелок на фигурах поменяются на противоположные.

Вместо $d\lambda_\alpha/dl$ можно вычислять вдоль ИК величину

$$\frac{d\lambda_\alpha}{du_1} = \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial u_1} + \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial u_2} \frac{du_2}{du_1}$$

используя формулы (2.4) и (2.5). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{1,2}}{du_1} &= \frac{-\kappa}{q(u_1 - 1)} \{ (q(3u_1^2 + 3u_2^2 - 14u_1 + 2) \pm \\ &\pm (3(u_1^2 + u_2^2)^2 + 8(2u_1^3 + 2u_1^2 + 2u_2^2 - u_1 - 5u_1u_2^2))) \} \\ q &= \sqrt{(u_2^2 - u_1^2)^2 + 4u_2^2(u_1 - 1)^2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Эти формулы годятся всюду, кроме областей, где направление интегральных линий близко к параллельному с осью u_2 . Там формулы (4.1) надо заменить такими же для

$$\frac{d\lambda_\alpha}{du_2} = \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial u_2} + \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial u_1} \frac{du_1}{du_2}$$

Укажем сначала направление роста λ_1 на ИК семейства медленных волн. Вдоль оси u_2 , т.е. при $u_1 = 0$ на всех ИК медленного семейства $d\lambda_1/du_1 > 0$. При $u_2 = 0$ (вдоль оси u_1 , которая при $u_1 < -2$ и $u_1 > 0$ сама есть ИК)

$$q = |u_1(u_1 + 2)| d\lambda_1/du_1 = -2\kappa(1 + 3u_1)$$

т.е. $d\lambda_1/du_1 < 0$ при $u_1 > 0$ и $d\lambda_1/du_1 > 0$ при $0 > u_1 > -2$. В диапазоне $-2 < u_1 < 0$, где ИК ортогональны оси u_2 ,

$$d\lambda_1/dl = d\lambda_1/du_2 = -Bu_2$$

где $B > 0$ – некоторый коэффициент. Таким образом, отрезок $-2 < u_1 < 0$ служит линией перемены знака у $d\lambda_1/dl$, в верхней полуплоскости $d\lambda_1/dl < 0$, в нижней $d\lambda_1/dl > 0$. Согласно симметрии и другие отрезки лучей OB и OC тоже служат линиями перемены знака для $d\lambda_1/dl$.

На линии, соединяющей особые точки, например B и C , при $u_1 = 1$, $|u_2| < \sqrt{3}$ получим

$$d\lambda_1/du_1 = -8\kappa < 0$$

т.е. на всех сторонах треугольника ABC у $d\lambda_1/dl$ перемены знака нет. На продолжении этих линий за вершины треугольника ($|u_2| > \sqrt{3}$)

$$d\lambda_1/du_2 = -6\kappa u_2$$

т.е. $d\lambda_1/du_2 < 0$ выше точки B и $d\lambda_1/du_2 > 0$ ниже точки C . Таким образом, λ_1 растет вдоль своих ИК в сторону начала координат. Изменение направления роста происходит на отрезках лучей из начала координат в особые точки.

Для семейства быстрых волн при пересечении их ИК с прямыми, проходящими через особые точки A, B, C , например прямой $u_1 = 1$, в области $|u_2| > \sqrt{3}$ получим

$$d\lambda_2/du_1 = -20\kappa < 0$$

Эта же прямая $u_1 = 1$ при $|u_2| < \sqrt{3}$ служит ИК рассматриваемого семейства и на ней

$$d\lambda_2/dl = d\lambda_2/du_2 = -6\kappa u_2$$

что означает, что на оси u_1 производная $d\lambda_2/dl$ меняет знак с отрицательного в верхней полуплоскости на положительный в нижней. В окрестности всей оси абсцисс, кроме отрезка $-2 < u_1 < 0$,

$$d\lambda_2/dl = d\lambda_2/du_2 = Bu_2(1 - 4u_1), \quad B > 0$$

Таким образом, вся ось u_1 , за исключением указанного отрезка (а вместе с ней и все лучи в особые точки), служит линией перемены направления роста λ_2 . Знак $d\lambda_2/dl$ меняется с минуса в верхней полуплоскости на плюс в нижней на участке оси $u_1 > 1/4$, на других участках $0 < u_1 < 1/4$ и $u_1 < -2$ – наоборот. На отрезке $-2, 0$ оси абсцисс, который идет вдоль ИК,

$$d\lambda_2/dl = -2\kappa(3u_1 + 1)$$

и изменение направления роста λ_2 происходит в точке $u_1 = -1/3$.

Таким образом, линиями перемены знака для $d\lambda_2/dl$ служат медианы треугольника ABC из особых точек и их продолжения за пределы треугольника, за исключением отрезков от вершин до начала координат. Кроме того, в окрестности начала координат имеется еще одна линия перемены знака в виде замкнутой кривой вокруг точки O , пересекающая указанные медианы на расстоянии $1/3$ в сторону вершины и $1/4$ в сторону основания. Уравнение этой кривой можно записать, например, в виде $d\lambda_2/du_1 = 0$. Направления роста характеристических скоростей $c_1^2 = \lambda_1$ и $c_2^2 = \lambda_2$ изображены стрелками для медленных и быстрых волн Римана соответственно на фиг. 3 и фиг. 4 для сред с $\kappa > 0$. Штрихами изображены линии перемены знака у $d\lambda_\alpha/dl$. В увеличенном масштабе замкнутая линия перемены знаков для скорости быстрых волн представлена на фиг. 2 тонким контуром. Стрелками указаны направления роста характеристической скорости.

При $\kappa < 0$ всюду в формулах для $c_{1,2}^2$ и du_2/du_1 верхний знак следует приписывать быстрым волнам, а нижний медленным. Вид ИК на плоскости (u_1, u_2) остается прежним, только фиг. 3 дает картину быстрых волн, а фиг. 4 – медленных, и направления стрелок следует поменять на противоположные.

Напомним, что вся картина на плоскости (u_1, u_2) изображалась в нормированных переменных u'_α/G , где G – малая величина. Возвращаясь к физическим переменным, видим, что особые точки A, B, C , находятся на малом расстоянии $2\sqrt{G}$ от начала координат, и вся сложность поведения интегральных кривых проявляется в области малых u_1, u_2 .

5. Волны Римана в упругом кубическом кристалле. Сложная картина поведения ИК и большое число особых точек вызвано тем, что в нелинейной упругой среде имеется малая анизотропия. Если же анизотропия не мала и коэффициент g при кубических степенях в формуле (1.4) конечен, то нелинейным членом с κ можно пренебречь. При $\kappa = 0$ получим задачу о нелинейных волнах малой амплитуды, распро-

страняющихся вдоль главной диагонали в кубическом кристалле. Выражения для характеристических скоростей и уравнения ИК примут вид

$$c_{1,2}^2 = \lambda_{1,2} = f \mp 2g\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_1 \pm \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{u_2}$$

Именно такие ИК были представлены выше в окрестности особой точки $O(0, 0)$ уравнением (3.1) и изображены на фиг.2 в окрестности начала координат. Только теперь эта картина действует во всей плоскости (u_1, u_2) . Изменение величин λ_1 и λ_2 происходит так же, как внутри замкнутой кривой перемены знаков около начала координат (фиг. 3, 4).

Автор благодарит А.Г. Куликовского за обсуждение и советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00219, 05-01-00375) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1697.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bland D.R.* Nonlinear Dinamic Elasticity. Toronto, etc. Waltham, 1969 = *Бленд Д.Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
2. *Куликовский А.Г., Свешикова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
3. *Свешикова Е.И.* Простые волны в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 642–646.
4. *Birch F.* Finite elastic strain of cubic crystals // Phys. Rev. 1947. V. 47. № 11. P. 809–824.
5. *Domanski W.* Asymptotic equations for weakly nonlinear elastic waves in a cubic crystal // Intern. Ser. Numeri. Math. 1999. V. 129. P. 233–241.

Москва
e-mail: sveshn@mech.math.msu.su
kulik@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
22.V.2003