

УДК 539.3:534.1

© 2005 г. В. И. Ерофеев, О. А. Шешенина

ВОЛНЫ В ГРАДИЕНТНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ С ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Рассматривается распространение различных типов упругих волн в градиентно-упругой среде с поверхностной энергией. В линейном приближении анализируются дисперсионные характеристики продольных и сдвиговых объемных волн, поверхностных волн Релея и антиплоских сдвиговых поверхностных волн, антиплоских сдвиговых волн в слое. Также исследуются антиплоские сдвиговые поверхностные волны с учетом геометрической нелинейности; рассматривается их модуляционная неустойчивость, приводящая к самомодуляции и образованию стационарных волн огибающих.

Обобщение классической теории упругости путем надления каждой точки континуума такими свойствами твердого тела, как вращение и деформация, восходит к классическим работам [1–3]. В обобщенных теориях сплошной среды взаимодействие двух частей тела, соприкасающихся по бесконечно малому элементу поверхности, характеризуется не только силовым вектором, но и действием вектора момента. Наиболее общие и полные теории сред с микроструктурой были представлены в работах Миндлина [4] и Эрингена [5].

В физике твердого тела, главным образом в материаловедении, получила признание концепция структурных уровней деформации [6, 7]. Согласно этой концепции каждая точка твердого тела представляет собой сложную систему взаимодействующих структур более низкого структурного уровня.

Теории континуумов с микроструктурой по своим гипотезам занимают промежуточное положение между классической теорией упругости и физикой твердого тела, стоящей на позиции существования структурных уровней. Материальная точка в континууме с микроструктурой имеет “разумную” степень сложности, что позволяет описывать и структуру материала (это недоступно для теории упругости), и волны деформации (это недоступно для материаловедения).

Теория градиентной упругости с поверхностной энергией была предложена Вардолакисом и Георгиадисом [8] и основана на теории Миндлина [4]. Рассматривался изотропный микрооднородный материал, в котором, во-первых, относительная дисторсия равна нулю, во-вторых, масса макроматериала единицы макрообъема равна нулю, в-третьих, постулируется функция плотности потенциальной энергии, которая помимо классических компонент имеет дополнительные слагаемые: градиент деформации (по Леру) и поверхностную энергию.

1. Основные уравнения. Рассматривается однородное пространство с микроструктурой. Положение каждого структурного элемента в этой среде определяет радиус-вектор в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Предполагаем, что микросреда сливается с макросредой, ρ – плотность макрообъема, микросреда занимает куб с ребром длиной $2h$.

Для решения задачи используем следующий постулат для функции плотности энергии деформации [8]:

$$W = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{qq} \varepsilon_{rr} + \mu \varepsilon_{qr} \varepsilon_{rq} + \mu c (\partial_m \varepsilon_{qr}) (\partial_m \varepsilon_{rq}) + \mu b_m \partial_m (\varepsilon_{qr} \varepsilon_{rq}) \quad (1.1)$$

где λ и μ – стандартные постоянные Ламе, c , b – модули упругости градиентной среды, $b_m = b \vartheta_m$, $\vartheta_m \vartheta_m = 1$, ∂_m означает дифференцирование по координате x_m , $\varepsilon_{qr} =$

$= (\partial_r U_q + \partial_q U_r)$ – компоненты тензора деформации, U_r – компоненты вектора перемещений \mathbf{U} , индексы q, r, m пробегает значения от 1 до 3.

Последний член в правой части равенства (1.1) относится к поверхностной энергии, поскольку в силу теоремы Гаусса – Остроградского он может быть записан в форме

$$\int_{\Omega} \partial_m (b_m \varepsilon_{qr} \varepsilon_{rq}) d\Omega = b \int_S (\varepsilon_{qr} \varepsilon_{rq}) (\vartheta_m n_m) dS$$

где n_m – компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности.

Заметим, что положительная определенность плотности потенциальной энергии следует из ограничений, налагаемых на постоянные среды:

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad c > 0, \quad -1 < b/c^{1/2} < 1$$

Коэффициент c зависит от размеров структурных элементов:

$$c = (h/4)^2 \tag{1.2}$$

Как было отмечено выше, относительная дисторсия равна нулю, поэтому микро-дисторсия не является независимой функцией и равна

$$\psi_{qr} = \partial_q U_r$$

Так как устраняются различия между микро- и макроплотностями, то плотность среды ρ совпадает с плотностью микроматериала.

Напряжения Коши и двойные напряжения равны соответственно

$$\tau_{qr} = \partial W / \partial \varepsilon_{qr}, \quad \mu_{qrm} = \partial W / \partial \chi_{qrm} \tag{1.3}$$

где $\chi_{qrm} = \partial_q \psi_{rm} = \partial_q \partial_r U_m$ – градиент микродисторсии.

Используя (1.1) и (1.3), можно выразить напряжения и двойные напряжения через компоненты тензора деформаций

$$\tau_{qr} = \lambda \delta_{qr} \varepsilon_{mm} + 2\mu \varepsilon_{qr} + 2\mu b_m (\partial_m \varepsilon_{qr}), \quad \mu_{mqr} = 2\mu [b_m \varepsilon_{qr} + c \varepsilon_{qr, m}] \tag{1.4}$$

Предполагаем, что объемные силы и двойные объемные силы отсутствуют. Из вариации потенциальной энергии, принимая за независимую вариацию δU_q , можно получить уравнения движения и граничные условия в напряжениях в случае гладкой границы

$$\begin{aligned} \partial_q \sigma_{qr} &= \rho \ddot{U}_r, \quad \partial_q \mu_{qrm} + \alpha_{rm} = I \ddot{\psi}_{rm} \\ n_r \tau_{rm} - n_q n_r n_m \partial_m \mu_{qrm} - 2n_r (\delta_{ql} - n_q n_l) \partial_l \mu_{qrm} + \\ &+ (n_q n_r n_l (\delta_{lq} - n_l n_j) \partial_j - n_q (\delta_{rl} - n_r n_l) \partial_l) \mu_{qrm} + I n_r \ddot{\psi}_{rm} = P_m \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$m_q n_r \mu_{qrm} = R_m$$

Точкой обозначена производная по времени t , δ_{qr} – символ Кронекера, $\sigma_{qr} = \tau_{qr} + \alpha_{qr}$ – компоненты суммарного тензора напряжений, α_{rm} – относительные напряжения, которые в градиентной теории с поверхностной энергией являются “стесненными”, P_m – поверхностная сила на единицу площади, R_m – двойная поверхностная сила без момента на единицу площади, $I = \rho h^2/3$ – момент инерции микроэлемента.

Используя соотношения (1.4) и (1.5), получим уравнение движения в перемещениях

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = I \Delta \ddot{\mathbf{U}} + (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{U} + (\lambda + \mu - \mu c \Delta) \text{rot rot } \mathbf{U} - 2\mu c \Delta^2 \mathbf{U} \tag{1.6}$$

или в инвариантном виде

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = I \Delta \ddot{\mathbf{U}} + (\lambda + \mu - \mu c \Delta) \text{grad div} \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U} - \mu c \Delta^2 \mathbf{U} \quad (1.7)$$

2. Продольные и сдвиговые волны. Рассматриваются плоские продольные волны, распространяющиеся в неограниченном пространстве по направлению оси x_1 . Описывающее их уравнение можно получить из уравнения (1.6) при подстановке $\mathbf{U} = (u(x_1, t), 0, 0)$. Имеем

$$(\lambda + 2\mu)u_{,11} - 2\mu c u_{,1111} + I \ddot{u}_{,11} - \rho \ddot{u} = 0 \quad (2.1)$$

Решение уравнения (2.1) будем искать в виде бегущей гармонической волны

$$u = A e^{i(kx_1 - \omega t)} + \text{с.с.} \quad (2.2)$$

где k – волновое число, ω – частота, с.с. означает комплексно-сопряженную величину.

Подставив выражения (2.2) в уравнение (2.1), получим дисперсионное уравнение

$$(\lambda + 2\mu)k^2 + 2\mu c k^4 - (Ik^2 + \rho)\omega^2 = 0 \quad (2.3)$$

из которого находим явную зависимость частоты от волнового числа

$$\omega = k \sqrt{\frac{c_l^2 + 2cc_\tau^2 k^2}{1 + h^2 k^2/3}}, \quad c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.4)$$

где c_l и c_τ – скорости, с которыми распространялись бы продольные и сдвиговые волны при отсутствии микроструктуры.

Будем обозначать буквой C фазовую скорость, указывая верхним индексом тип волны (l – для продольной волны, τ – для сдвиговой волны, R – для волны Релея, SH – для сдвиговой антиплоской волны). Введем нормированную частоту, волновое число и фазовую скорость

$$k_d = k\sqrt{c}, \quad \omega_d = \omega \frac{h}{\sqrt{3}c_\tau}, \quad C_d = \frac{\omega_d}{k_d} \quad (2.5)$$

которые в дальнейшем будем использовать при исследовании различных типов волн.

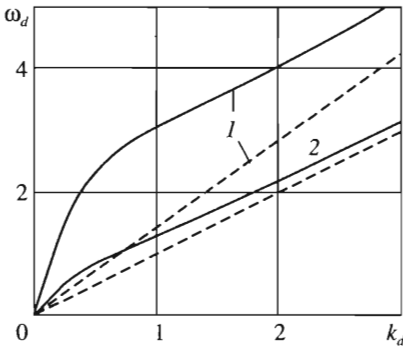
В нормированных величинах фазовая скорость продольной волны будет выглядеть следующим образом:

$$C_l^d = \sqrt{\frac{(c_l/c_\tau)^2 + 2k_d^2}{3/16 + k_d^2}}$$

При малых значениях волнового числа, когда размер микроэлемента не оказывает влияния на волновой процесс, дисперсия отсутствует. В этом случае фазовая скорость C^l совпадает со скоростью продольной волны в классической упругой среде. При $\omega \rightarrow \infty$ дисперсия также отсутствует и асимптотическое значение фазовой скорости продольной волны равно

$$C^l = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} c_\tau \approx 0.61 c_\tau, \quad C_d^l = \sqrt{2}$$

Заметим, что модель среды Коссера вообще не описывает дисперсию продольной волны, а модель среды Леру, описывая дисперсию, приводит к отсутствию асимптотического значения фазовой скорости при $\omega \rightarrow \infty$ [9].



Фиг. 1

Уравнение, описывающее распространение плоской сдвиговой волны, получается из уравнения (1.6) при подстановке $\mathbf{U} = (0, u(x_1, t), 0)$

$$\mu v_{,11} - \mu c v_{,1111} + k \ddot{v}_{,11} - \rho \ddot{v} = 0 \quad (2.6)$$

Аналогично, как и для продольной волны, находим дисперсионную зависимость частоты от волнового числа для размерных величин

$$\omega = kc_\tau \sqrt{\frac{1 + ck^2}{1 + h^2 k^2/3}} \quad (2.7)$$

Фазовая скорость сдвиговой волны, нормированная с помощью замены (2.5), будет выглядеть следующим образом:

$$C_d^\tau = \sqrt{\frac{1 + k_d^2}{3/16 + k_d^2}}$$

Совпадение дисперсионных зависимостей, построенных по приведенным формулам и по классической теории упругости, наблюдается при малых значениях k и ω . В этом случае дисперсия отсутствует и фазовая скорость $C^\tau = c_\tau$. При увеличении частоты фазовая скорость уменьшается и в пределе $\omega \rightarrow \infty$ имеет значение

$$C^\tau = \frac{\sqrt{3}}{4} c_\tau \approx 0.43 c_\tau, \quad C_d^\tau = 1$$

На фиг. 1 для среды с параметром $r = \lambda/\mu = 3$ представлены зависимости нормированной частоты от нормированного волнового числа продольной (кривая 1) и сдвиговой (кривая 2) волн и их асимптоты (штриховые прямые).

Дисперсионное уравнение для продольной волны в нормированных величинах содержит лишь один параметр r , необходимый для разрешения этого уравнения. Характер дисперсионной кривой при разных значениях r не изменяется, однако при увеличении r возрастает отношение фазовых скоростей продольной и поперечной волн.

Заметим, что в уравнении движения в перемещениях (1.6) нет слагаемых с параметром b . Скорости продольных и сдвиговых волн также не зависят от данного параметра, т.е. дополнительное слагаемое в выражении плотности потенциальной энергии, отвечающее за поверхностную энергию, не влияет на распространение объемных волн в исследуемой модели среды.

3. Поверхностные волны Релея. Пусть полупространство занимает область $x_2 \geq 0$, а оси декартовых координат x_1 и x_3 направлены по поверхности.

Рассмотрим плоскую гармоническую волну, распространяющуюся в направлении оси x_1 , амплитуда которой экспоненциально уменьшается с расстоянием от свободной поверхности $x_2 = 0$. Такого рода волна может возникнуть, если вызывающее ее возмущение не зависит от переменной x_3 . Вектор перемещения будет иметь две отличные от нуля компоненты $U_1(x_1, x_2)$ и $U_2(x_1, x_2)$. В неограниченном пространстве продольные и сдвиговые волны распространяются независимо друг от друга. Наличие границы, как известно, приводит к связи этих волн.

В предположении, что плоскость $x_2 = 0$ свободна от напряжений, имеем четыре условия

$$\sigma_{21}(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{22}(x_1, 0) = 0, \quad \mu_{221}(x_1, 0) = 0, \quad \mu_{222}(x_1, 0) = 0 \quad (3.1)$$

Разложим вектор смещений на потенциальную и соленоидальную составляющие

$$\mathbf{U} = \text{grad}\phi + \text{rot}\psi, \quad \text{div}\psi = 0 \quad (3.2)$$

Поскольку волна плоская и движение не зависит от x_3 , у векторного потенциала будет отлична от нуля только компонента по оси x_3 : $\psi = (0, 0, \psi_3)$.

Применим к уравнению (1.6) операцию div , а потом операцию rot . В результате получим систему уравнений

$$\rho\ddot{\phi} = I\Delta\dot{\phi} + (\lambda + 2\mu)\Delta\phi - 2\mu c\Delta^2\phi \quad (3.3)$$

$$\rho\ddot{\psi}_3 = I\Delta\dot{\psi}_3 + \mu\Delta\psi_3 - \mu c\Delta^2\psi_3 \quad (3.4)$$

Решение каждого из уравнений (3.3) и (3.4) будет состоять из двух убывающих от свободной поверхности компонент

$$\begin{aligned} \phi &= (Ae^{-\alpha_+x_2} + Be^{-\alpha_-x_2})e^{i(kx_1 - \omega t)} + \text{с.с.} \\ \psi_3 &= (De^{-p_+x_2} + Ee^{-p_-x_2})e^{i(kx_1 - \omega t)} + \text{с.с.} \\ \alpha_{\pm} &= \sqrt{k^2 - z_{\pm}} \quad p_{\pm} = \sqrt{k^2 \mp \sigma_{\pm}^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$z_{\pm} = \frac{1}{4\mu c} \left(-\lambda - 2\mu + I\omega^2 \pm \sqrt{(\lambda + 2\mu - I\omega^2)^2 + 8\mu c\rho\omega^2} \right)$$

$$\sigma_{\pm} = \sqrt{\frac{g \mp \chi}{2c}}, \quad g = \sqrt{\chi^2 + 4c\frac{\rho}{\mu}\omega^2}, \quad \chi = 1 - \frac{I}{\mu}\omega^2$$

где A, B, D, E – амплитудные функции.

Граничные условия, выраженные через компоненты вектора перемещения, будут следующими:

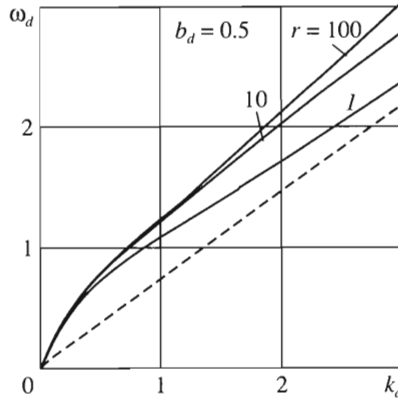
$$\begin{aligned} \sigma_{21}(x_1, 0) &= I\ddot{U}_{1,2} + \mu(U_{2,1} + U_{1,2}) - \mu c\Delta(U_{2,1} + U_{1,2}) = 0 \\ \sigma_{22}(x_1, 0) &= I\ddot{U}_{2,2} + \lambda(U_{1,1} + U_{2,2}) + 2\mu U_{2,2} - 2\mu c\Delta U_{2,2} = 0 \\ \mu_{221}(x_1, 0) &= \mu b_2(U_{2,1} + U_{1,2}) + \mu c(U_{2,12} + U_{1,22}) = 0 \\ \mu_{222}(x_1, 0) &= 2\mu b_2 U_{2,2} + 2\mu c U_{2,22} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Заметим, что граничные условия не содержат компонент b_1 и b_3 , поэтому предположим, что $b_1 = b_3 = 0, b_2 = b \neq 0$.

Подставляя выражения (3.5) в представление (3.2), а затем, используя условия (3.6), получаем однородную линейную систему из четырех уравнений с неизвестными амплитудными функциями A, B, D, E . Как известно, такая система имеет решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Данное условие и будет дисперсионным соотношением для волны Релея.

Чтобы записать дисперсионную зависимость через нормированные частоту и волновое число (2.5), понадобятся следующие величины, с которыми в дальнейшем удобно оперировать:

$$b_d = \frac{b}{\sqrt{c}}, \quad \sigma_{\pm d} = \sigma_{\pm}\sqrt{c}, \quad z_{\pm d} = z_{\pm}c \quad (3.7)$$



Фиг. 2

Тогда

$$\alpha_{\pm d} = \sqrt{k_d^2 - z_{\pm d}}, \quad p_{\pm d} = \sqrt{k_d^2 \mp \sigma_{\pm d}^2}$$

$$z_{\pm d} = \frac{1}{4} \left(-\frac{\lambda}{\mu} - 2 + \omega_d^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 - \omega_d^2 \right)^2 + \frac{3}{2} \omega_d^2} \right) \quad (3.8)$$

$$\sigma_{\pm d} = \sqrt{\frac{g \mp \chi}{2}}, \quad g = \sqrt{\chi^2 + \frac{3}{4} \omega_d^2}, \quad \chi = 1 - \omega_d^2$$

Дисперсионное соотношение в нормированных координатах будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{vmatrix} -2z_{-d} - \frac{3}{16}(C_d^R)^2 - \frac{\lambda}{\mu} & -2z_{+d} - \frac{3}{16}(C_d^R)^2 - \frac{\lambda}{\mu} & -p_{+d}(1+g) & -p_{-d}(1-g) \\ \alpha_{+d}(\omega_d^2 - 2 - 2z_{+d}) & \alpha_{-d}(\omega_d^2 - 2 - 2z_{-d}) & k_d^2 \left(1 + g - \frac{3}{16}(C_d^R)^2 \right) & k_d^2 \left(1 - g - \frac{3}{16}(C_d^R)^2 \right) \\ \alpha_{+d}^2(b_d - \alpha_{+d}) & \alpha_{-d}^2(b_d - \alpha_{-d}) & -k_d^2 p_{+d}(b_d - p_{+d}) & -k_d^2 p_{-d}(b_d - p_{-d}) \\ -2\alpha_{+d}(b_d - \alpha_{+d}) & -2\alpha_{-d}(b_d - \alpha_{-d}) & (k_d^2 + p_{+d}^2)(b_d - p_{+d}) & (k_d^2 + p_{-d}^2)(b_d - p_{-d}) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.9)$$

Как и в случае продольной волны, для разрешения дисперсионного уравнения необходимо задать отношение $r = \lambda/\mu$. Дополнительно нужно присвоить значение параметру b_d .

Дисперсионные кривые были построены для сред с различными сочетаниями значений r и b_d . Оказалось, что дисперсионные зависимости для сред с фиксированным значением параметра r и различных значениях b_d близки друг к другу настолько, что их графики сливаются. Поэтому можно предположить, что введение дополнительного слагаемого в выражение плотности потенциальной энергии, отвечающего за поверхностную энергию, незначительно влияет на характер распространения поверхностной волны Релея.

На фиг. 2 приведены дисперсионные зависимости нормированной частоты от нормированного волнового числа при $b_d = 0.5$ и разных значениях r . Все они имеют общую асимптоту.

По дисперсионным кривым можно сделать вывод, что скорость волны Релея зависит от частоты, т.е. имеет место дисперсия. Если разложить дисперсионное уравнение в ряд Тейлора в окрестности $\omega = 0$, то легко показать, что значение фазовой скорости C^R совпадает со значением фазовой скорости поверхностной волны Релея в классической теории упругости. Аналогичным способом находится асимптотическое значение фазовой скорости при $\omega \rightarrow \infty$ для материалов с любыми параметрами r и b_d . Приведем уравнение

$$C_d^{R14} - 18C_d^{R12} + 123C_d^{R10} - 406C_d^{R8} + 757C_d^{R6} - 748C_d^{R4} + 356C_d^{R2} - 64 = 0$$

корень которого является асимптотическим значением нормированной фазовой скорости. Итак, при $\omega \rightarrow \infty$

$$C^R \approx \frac{\sqrt{3}}{4} 0.73c_\tau = 0.32c_\tau, \quad C_d^R \approx 0.73$$

4. Сдвиговая антиплоская (SH) поверхностная волна. Будем рассматривать антиплоские сдвиговые (т.е. горизонтально поляризованные или SH) движения в градиентно-упругом полупространстве с поверхностной энергией. Впервые этот тип волн в исследуемой модели среды рассматривался Вардолакисом и Георгиадисом [8]. Как и в предыдущей задаче, пусть полупространство занимает область $-\infty < x_1, x_3 < \infty, x_2 \geq 0$. Частицы среды перемещаются в направлении оси x_3 . В этом случае задача двумерная, и решение зависит только от x_1, x_2 .

Также примем, что $b_1 = b_3 = 0, b_2 = b \neq 0$. Для рассматриваемого случая SH-движений имеем $\mathbf{U} = (0, 0, w(x_1, x_2, t))$.

Уравнение, описывающее поверхностную SH-волну, совпадает с уравнением для соленоидальной составляющей поверхностной волны Релея (3.4) (надо просто заметить ϕ_3 на w).

Граничные условия в перемещениях имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{23}(x_1, 0) &= I\dot{w}_{,2} + \mu w_{,2} - \mu c w_{,211} - \mu c w_{,222} = 0 \\ \mu_{223}(x_1, 0) &= \mu c w_{,22} + \mu b w_{,2} = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Решение уравнения движения состоит из двух убывающих компонент

$$w = [Ae^{-p_+x_2} + Be^{-p_-x_2}]e^{i(kx_1 - \omega t)} + \text{с.с.} \tag{4.2}$$

где A и B – амплитудные функции, p_+ и p_- удовлетворяют соотношениям (3.5).

Было получено [8] дисперсионное соотношение

$$\sigma_{+d}^2 \sqrt{k_d^2 - \sigma_{+d}^2} + \sigma_{-d}^2 \sqrt{k_d^2 + \sigma_{-d}^2} - b_d (\sigma_{+d}^2 + \sigma_{-d}^2) = 0 \tag{4.3}$$

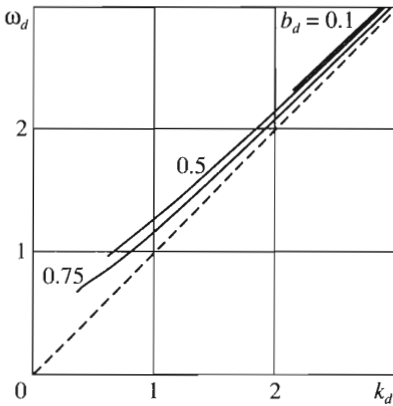
из которого можно выразить волновое число через частоту

$$k_d = \sqrt{b_d^2 - \chi + \frac{3}{16} \frac{\omega_d^2}{\chi^2} (\sqrt{b_d^2 - \chi} - b_d)^2} \tag{4.4}$$

Заметим, что соотношение (4.4) выполняется не при любых ω_d . Начало диапазона действительных частот определяет частоту среза, которую можно найти из условия

$$k_d^2 - \sigma_{+d}^2 = 0 \tag{4.5}$$

Заметим, что чем больше величина параметра, характеризующего поверхностную энергию b_d , тем шире частотный диапазон, в котором эти волны могут существовать.



Фиг. 3

На фиг. 3 отображены зависимости нормированной частоты от волнового числа для сред при разных значениях параметра b_d .

Для данной задачи дополнительное слагаемое в выражении плотности потенциальной энергии позволяет теоретически доказать существование поверхностных SH-волн в случае однородной среды, занимающей полупространство. Экспериментально эти волны наблюдаются, например, в кристаллоакустике [10], однако в рамках классической теории упругости они не могут быть описаны. Рассматриваемый случай – подтверждение влияния слагаемого в выражении плотности потенциальной энергии, отвечающего за поверхностную энергию.

Поверхностные SH-волны в полупространстве однородного материала обладают дисперсией. Дисперсионное соотношение в нормированных координатах не зависит от свойств среды, поэтому для всех сред дисперсионные кривые будут подобны кривым, построенным на фиг. 3. При $\omega \rightarrow \infty$ асимптотическое значение фазовой скорости равно

$$C^{\text{SH}} = \frac{\sqrt{3}}{4}c_\tau \approx 0.43c_\tau, \quad C_d^{\text{SH}} = 1$$

5. Распространение SH-волн в слое. Будем рассматривать сдвиговые антиплоские волновые движения в слое в направлении оси x_1 . Слой ограничен плоскостями $x_2 = 0$ и $x_2 = d$. Задача двумерная, и решение зависит только от x_1, x_2 . Также примем, что $b_1 = b_3 = 0, b_2 = b \neq 0$. Для SH-движений в слое имеем

$$U_1 = U_2 = 0, \quad U_3 = w(x_1, x_2, t) \neq 0$$

Уравнение движения будет тем же, что и для поверхностных SH-волн, но число граничных условий будет в два раза больше, поскольку появляется вторая граница $x_2 = d$, на которой ставятся условия, аналогичные (4.1).

Решение уравнения движения будет состоять уже из четырех компонент

$$w = [A \sin(Px_2) + B \cos(Px_2) + D \text{sh}(p_-x_2) + E \text{ch}(p_-x_2)] e^{i(kx_1 - \omega t)} + \text{с.с.}$$

$$P = \sqrt{\sigma_+^2 - k^2}$$

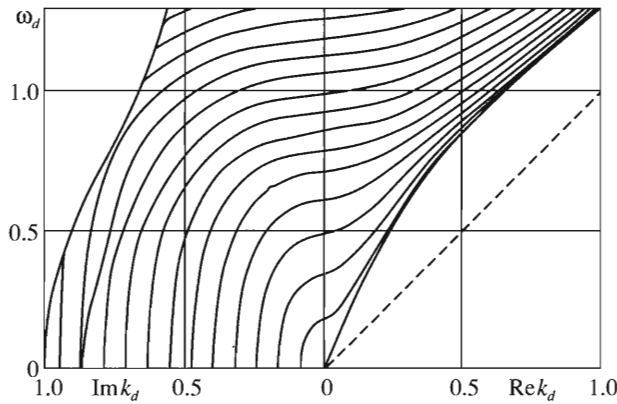
где A, B, D и E – амплитудные функции.

Вводя нормированные величины (3.8), аналогично предыдущему случаю, придем к следующему дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{8} \omega_d^2 P_d p_{-d} (1 - \cos(P_d H_d) \text{ch}(p_{-d} H_d)) + \sin(P_d H_d) \text{sh}(p_{-d} H_d) \times \\ & \times \left(-k_d^2 \left(1 - \frac{13}{8} \omega_d^2 + \omega_d^4 \right) - 1 + \frac{39}{16} \omega_d^2 - \frac{39}{16} \omega_d^4 + \omega_d^6 + b_d^2 g^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$P_d = P \sqrt{c}, \quad H_d = d / \sqrt{c}$$

Дисперсионное соотношение (5.1) в нормированных координатах, как и в предыдущей задаче, не зависит от свойств среды. На фиг. 4 изображены зависимости нормированной частоты от нормированного волнового числа при $d = 10h, b_d = 0.5$.



Фиг. 4

Анализ показывает, что нулевая мода сдвиговой волны в слое по своим дисперсионным свойствам идентична сдвиговой волне в неограниченной градиентно-упругой среде (2.7).

Асимптотические значения фазовых скоростей всех мод в слое совпадают с асимптотическим значением фазовой скорости сдвиговой и поверхностной SH-волн.

6. Нелинейные поверхностные SH-волны. В разд. 4 уже рассматривались поверхностные антиплоские сдвиговые волны. Ниже исследуется тот же тип волн, но с учетом геометрической нелинейности. В отличие от линейных задач уравнения движения получаем, используя точное выражение для компонент тензора деформации

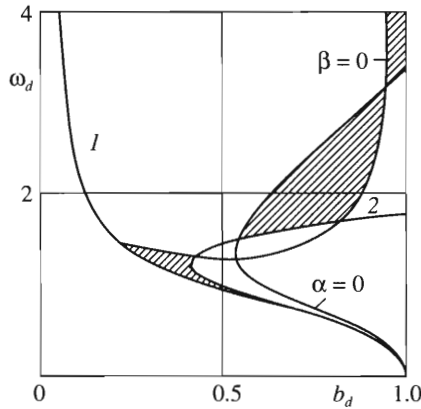
$$\epsilon_{qr} = (\partial_r U_q + \partial_q U_r + \partial_r U_m \partial_q U_m), \quad r, q, m = 1, 2, 3 \tag{6.1}$$

Подставляя выражения (6.1) в соотношение (1.1) и учитывая выражения (1.3), получаем нелинейные соотношения для компонент тензора напряжений и тензора двойных напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{qr} &= \lambda \delta_{qr} \epsilon_{mm} + 2\mu \epsilon_{qr} + 2\mu b_m (\partial_m \epsilon_{qr}) \\ \mu_{mqr} &= 2\mu [b_m \epsilon_{qr} + c \epsilon_{qr, m} + (b_m \epsilon_{qn} + c \epsilon_{qn, m}) U_{r, n}] \end{aligned} \tag{6.2}$$

Далее, как и в разд. 4, имеем $\mathbf{U} = (0, 0, w(x_1, x_2, t))$. Подставляя выражения (6.2) в уравнения (1.5), получаем уравнение для антиплоской сдвиговой компоненты перемещения

$$\begin{aligned} \nabla^2 w - c \nabla^4 w + I \mu^{-1} \nabla^2 \ddot{w} - c \tau^{-2} \ddot{w} &= c \{ w_{,1111} (2w_{,1}^2 + w_{,2}^2) + w_{,1122} (3w_{,1}^2 + 3w_{,2}^2) + \\ &+ 2w_{,1} w_{,2} (w_{,1222} + w_{,1112}) + w_{,2222} (w_{,1}^2 + 2w_{,2}^2) + w_{,111} (12w_{,1} w_{,11} + 6w_{,2} w_{,12} + w_{,1} w_{,22}) + \\ &+ w_{,112} (6w_{,2} w_{,11} + 16w_{,1} w_{,12} + 7w_{,2} w_{,22}) + w_{,122} (7w_{,1} w_{,11} + 16w_{,2} w_{,12} + 6w_{,1} w_{,22}) + \\ &+ w_{,222} (6w_{,1} w_{,12} + 12w_{,2} w_{,22} + w_{,2} w_{,11}) + w_{,11} (4w_{,11}^2 + 11w_{,12}^2 + w_{,22}^2) + \\ &+ w_{,22} (4w_{,22}^2 + 11w_{,12}^2 + w_{,11}^2) \} + b \{ w_{,112} (3w_{,1}^2 + w_{,2}^2) + 4w_{,122} w_{,1} w_{,2} + \\ &+ w_{,222} (3w_{,2}^2 + w_{,1}^2) + 6w_{,1} w_{,11} w_{,12} + 2w_{,2} w_{,11} w_{,22} + 4w_{,2} w_{,12}^2 + 6w_{,1} w_{,12} w_{,22} + 6w_{,2} w_{,22}^2 \} \end{aligned} \tag{6.3}$$



Фиг. 5

Условия на границе (4.1) в перемещениях выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 w_{,2} - cw_{,211} - cw_{,222} + I\mu^{-1}\ddot{w}_{,2} &= c\{w_{,111}w_{,1}w_{,2} + w_{,112}(w_{,1}^2 + 2w_{,2}^2) + w_{,122}w_{,1}w_{,2} + \\
 &+ w_{,222}(w_{,1}^2 + 2w_{,2}^2) + w_{,2}w_{,211}^2 + 3w_{,1}w_{,11}w_{,12} + 5w_{,2}w_{,212}^2 + 3w_{,1}w_{,12}w_{,22} + 4w_{,2}w_{,22}^2\} + \\
 &+ b\{w_{,22}w_{,1}^2 + 3w_{,22}w_{,2}^2 + 2w_{,1}w_{,2}w_{,12}\} \\
 -cw_{,22} - bw_{,2} &= c\{w_{,1}w_{,2}w_{,12} + w_{,22}w_{,1}^2 + 2w_{,22}w_{,2}^2\} + b\{w_{,2}^3 + w_{,2}w_{,1}^2\}
 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Как уже отмечалось, в линейном случае решение дисперсионного уравнения существует, если частота волны превосходит частоту среза, которая определяется из уравнения (4.5). На фиг. 5 кривой 1 показано решение названного выше уравнения.

Снова обратимся к линейному случаю, когда решение уравнения движения состоит из двух компонент (4.2). Пользуясь условиями (4.1), заключаем, что их отношение

$$\frac{Ae^{-p_+x_2}e^{i(kx_1 - \omega t)}}{Be^{-p_-x_2}e^{i(kx_1 - \omega t)}} = \frac{p_-\sigma_+^2}{p_+\sigma_-^2}e^{-(p_+ - p_-)x_2} \quad (6.5)$$

принимает минимальное значение на границе $x_2 = 0$, поскольку $p_- > p_+$. С ростом глубины x_2 отношение (6.5) увеличивается.

Пусть на поверхности первая компонента больше второй, например, в 20 раз; этому условию удовлетворяют точки кривой 2 на фиг. 5. Во внешней области кривой 2 отношение двух компонент всегда больше 20. В этом случае первая компонента в выражении (4.2) преобладает над второй, которую в дальнейшем можно опустить.

Решение в нелинейном случае будем искать в виде одной гармоники с медленно меняющейся комплексной амплитудой A

$$w(x_1, x_2, t) = A(\xi, \tau)e^{-p_+x_2}e^{i(kx_1 - \omega t)} + \text{с.с.} \quad (6.6)$$

где

$$\xi = \varepsilon\left(x_1 - v_*t + i\frac{dp_+}{dk}x_2\right), \quad \tau = \varepsilon^2t$$

$$\frac{dp_+}{dk} = \frac{1}{p_{+d}}\left(k_d - \frac{\sqrt{3}\omega_d\Theta v_*}{4c_\tau g}\right), \quad \Theta = \frac{16}{3}\sigma_{+d}^2 + 1$$

$$v_* = \frac{(\sqrt{3}/4)c_\tau \omega_d k_d \chi}{\omega_d^2 \chi + (k_d^2 - b_d^2 + \chi)(1 - b_d \omega_d^2 (b_d^2 - \chi)^{-1/2})}$$

$v_* = d\omega/dk$ – групповая скорость, ε – малый параметр.

Подставляя выражение (6.6) в уравнение (6.3) и приравнявая к нулю коэффициенты при разных степенях малого параметра ε , при ε^3 получаем нелинейное параболическое уравнение Шрёдингера [11, 12], описывающее эволюцию комплексной амплитуды квазигармонической волны,

$$\beta A_{\xi\xi} + iA_\tau - \alpha|A|^2 A = 0 \tag{6.7}$$

где

$$\alpha = \left(\frac{2\sqrt{3}}{hc_\tau} c^2 \Theta \omega_d \right)^{-1} (2k_d^6 - 33k_d^4 p_{+d}^2 - 17k_d^2 p_{+d}^4 + 42p_{+d}^6 + b_d(9k_d^4 p_{+d} - 6k_d^2 p_{+d}^3 - 27p_{+d}^5)) e^{-2p_+ x_2}$$

$$\beta = \left(\frac{2\sqrt{3}}{hc_\tau} \Theta \omega_d \right)^{-1} \left\{ -g \left(\left(\frac{dp_+}{dk} \right)^2 - 1 \right) + \frac{v_*^2}{c_\tau^2} \Theta \left(-1 - \frac{4}{g} (1 - \chi) + \frac{3\Theta \omega_d^2}{g^2} \right) \right\}$$

Из теории нелинейных волн известно, что при определенных условиях квазигармоническая волна неустойчива по отношению к разбиению на отдельные волновые пакеты (модуляционная неустойчивость). Для ответа на вопрос о возможности модуляционной неустойчивости сдвиговых поверхностных волн воспользуемся критерием Лайтхилла [12], согласно которому модуляционная неустойчивость возможна в системе, в которой

$$\alpha\beta < 0 \tag{6.8}$$

Необходимо отметить, что произведение $\alpha\beta$ выражается только через нормированные переменные, поэтому область модуляционной неустойчивости будет подобна приведенной ниже для всех материалов. На фиг. 5 искомая область в плоскости параметров ω_d и b_d заштрихована.

При разных значениях безразмерного параметра b_d будет один, два или три интервала частот ω_d , при которых возникает модуляционная неустойчивость. Необходимо отметить, что кривые 1 и 2 на фиг. 5 при увеличении b_d до единицы сближаются, но не сливаются. Поэтому между ними есть область модуляционной неустойчивости.

Для того чтобы определить вид волновых пакетов, на которые разбивается поверхностная сдвиговая волна в результате модуляционной неустойчивости, проанализируем стационарные волны огибающих. В рассмотрение введем вместо комплексной амплитуды A действительные амплитуду a и фазу φ : $A = ae^{i\varphi}$. Тогда уравнение (6.7) можно переписать в виде системы уравнений гидродинамического типа

$$\frac{\partial a^2}{\partial \tau} + \frac{\partial a^2 G}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \tau} + G \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\tilde{\beta}^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} \right) - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\beta}}{2} \frac{\partial a^2}{\partial \xi} = 0 \tag{6.9}$$

$$G = \tilde{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

где $\tilde{\beta} = 2\beta$ – параметр дисперсии, $\tilde{\alpha} = -2\alpha$ – параметр нелинейности.

Будем искать решение системы (6.9), зависящее от одной переменной $\eta = \xi - V\tau$, где $V = \text{const}$ – скорость стационарной волны. В этом случае фаза волны G выражается через ее амплитуду a

$$G = Q/a^2 + V \quad (6.10)$$

где Q – постоянная интегрирования, а изменение амплитуды описывается нелинейным уравнением ангармонического осциллятора

$$d^2 a/d\eta^2 + m_1 a + m_2 a^3 + m_3 a^{-3} = 0 \quad (6.11)$$

$$m_1 = V^2/\tilde{\beta}^2, \quad m_2 = \tilde{\alpha}/\tilde{\beta}, \quad m_3 = -d^2/\tilde{\beta}^2$$

Заметим, что коэффициент при a всегда положителен, при a^{-3} всегда отрицателен. Знак же коэффициента при a^3 может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от свойств материала и частотного диапазона. Области модуляционной неустойчивости будет соответствовать положительное значение этого коэффициента.

Перейдя к новым переменным

$$\zeta = \sqrt{m_1}\eta, \quad f = \sqrt{m_2/m_1}a \quad (6.12)$$

запишем первый интеграл уравнения (6.11)

$$(df/d\zeta)^2 + \Pi(f) = E; \quad \Pi(f) = f^2 + f^4/2 - Df^{-2}, \quad D = m_3 m_2^2/m_1^3$$

где E – постоянная интегрирования.

Были найдены и проанализированы аналитические решения уравнения (6.11) [13]. Амплитуда волн огибающих описывается выражением

$$f(\zeta) = \pm \sqrt{-\frac{2}{3} + 2A_0 \frac{1+s^2}{3s^2} - 2A_0 \text{sn}^2(k_0 \zeta, s)} \quad (6.13)$$

$$A_0 = \frac{R_1 - R_2}{2}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{R_1 - R_3}{2}}, \quad s^2 = \frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_3}$$

Здесь A_0 – амплитуда стационарной волны огибающей, k_0 – аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции. Через R_i ($R_3 \leq R_2 \leq R_1$) обозначены корни полинома $ER - R^2 - R^3/2 + D$.

Решение (6.13) описывает периодические движения, форма которых в общем случае несинусоидальна и определяется модулем s , $s \in (0, 1/2)$. Период квазигармонических колебаний равен $T = 2\mathbf{K}(s)/k_0$, где $\mathbf{K}(s)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Периодическая последовательность волновых пакетов, на которые в результате модуляционной неустойчивости разбивается сдвиговая волна, качественно (при $s^2 \approx 1/2$) изображена на фиг. 6.

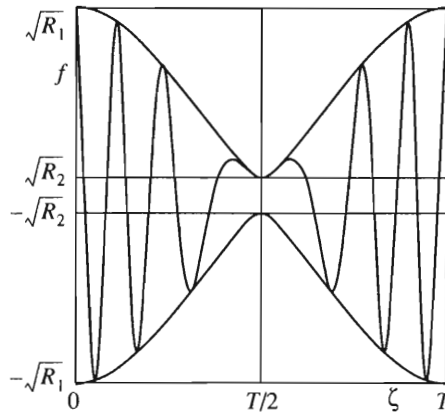
В частном случае $D = 0$ уравнение (6.11) является уравнением Дуффинга, решение которого в переменных (6.12)

$$f(\zeta) = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 2E} \text{cn}((1 + 2E)^{1/4} \zeta, s)}$$

при $s^2 \rightarrow 0$ близко к синусоидальному, при $s^2 \rightarrow 1/2$ имеет пилообразную форму.

Таким образом, квазигармоническая сдвиговая волна, промодулированная по периодическому закону, описывается выражением

$$w(x_1, x_2) = \pm \frac{V}{2\sqrt{-\alpha\beta}} G e^{-p_+ x_2} e^{i(kx_1 - \omega t + \varphi)} + \text{с.с.}$$



Фиг. 6

где

$$\varphi = \frac{V}{2\beta}\eta - \frac{2Q\alpha}{V^2} \int \frac{d\eta}{G^2}$$

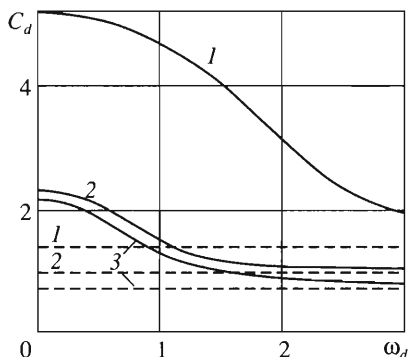
G – радикал в правой части равенства (6.13) ($\zeta = V\eta/(2\beta)$).

Формально стационарные волны огибающих могут существовать и в отсутствие модуляционной неустойчивости (такая ситуация рассматривалась [14]), однако механизм их формирования при этом неочевиден.

7. Заключение. Итак, при нулевой частоте для продольных, сдвиговых волн, SH-волн в слое и поверхностных волн значения фазовых скоростей совпадают с соответствующими значениями фазовых скоростей, вычисленными в рамках классической теории упругости. Как и в классической теории упругости, совпадают между собой дисперсионные кривые нулевой моды антиплоской (SH) волны в слое и объемной сдвиговой волны. Дисперсионные уравнения для всех рассматриваемых здесь типов волн записаны через нормированную частоту и волновое число (2.5). Полученные дисперсионные зависимости дополнительно могут включать лишь параметры $r = \lambda/\mu$ и b_d . Благодаря дополнительному слагаемому в выражении плотности потенциальной энергии, с которым связан параметр b_d , доказываемое существование антиплоских (SH) поверхностных волн. На дисперсионные же зависимости других типов волн это слагаемое оказывает слабое влияние. Хотя параметр r вносит некоторые количественные изменения в дисперсионные кривые, их характер остается неизменным.

Приведем асимптотические значения фазовых скоростей для всех рассматриваемых типов волн, выраженные через скорость объемной сдвиговой волны, известную из классической теории упругости (в скобках приведены значения, соответствующие классической теории упругости):

продольная волна	$0.61c_\tau$	(c_l)
сдвиговая волна	$0.43c_\tau$	(c_τ)
поверхностная волна Релея	$0.32c_\tau$	(c_R^{cl})
сдвиговая антиплоская поверхностная волна	$0.43c_\tau$	(не существует)
сдвиговая антиплоская волна в слое	$0.43c_\tau$	(c_τ)



Фиг. 7

На фиг. 7 даны зависимости нормированной фазовой скорости от нормированной частоты для продольной (кривая 1), сдвиговой (кривая 2) и релейской волны (кривая 3) и их асимптоты при $b_d = 0.5$, $r = 3$. В масштабе фиг. 7 кривая для поверхностной SH-волны совпадает с кривой 2.

Учет нелинейных слагаемых в уравнении для поверхностных антиплоских сдвиговых движений при некоторых частотах может привести к модуляционной неустойчивости и существованию стационарных волн огибающих.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-02-16924).

ЛИТЕРАТУРА

1. Voigt W. Theoretische studient über die elasticitätsverhältnisse der Krystalle // Abn. Gess. Wess. Göttingen. 1887. V. 34. 100 S.
2. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des Corps Deformables. Paris: Hermann, 1909. 226 p.
3. Le Roux. Étude géométrique de la torsion et de la flexion // Ann. L'École Norm. Sup. Paris, 1911. V. 28. 57 p.
4. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. Analysis, 1964. V. 16. № 1. P. 51–78.
5. Eringen A.C. Theory of micropolar elasticity // Fracture / Ed. H. Liebowitz. V. 2. New York; London: Acad. Press, 1968. P. 621–729.
6. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В. Структурные уровни деформации твердых тел. Новосибирск: Наука, 1985. 229 с.
7. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Под ред. В.Е. Панина. Новосибирск: Наука, 1995. Т. 1. 298 с.; Т. 2. 320 с.
8. Vardoulakis I.G., Georgiadis H.G. SH surface waves in a homogeneous gradient-elastic half-space with surface energy // J. Elasticity. 1997. V. 47. № 2. P. 147–165.
9. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 327 с.
10. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
11. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
12. Whitham Y.B. Linear and Nonlinear Waves. N. Y. etc.: Wiley, 1974 = Уизем Дж.В. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
13. Ерофеев В.И., Кажаяв В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях: Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 207 с.
14. Erofeyev V.I., Semerikova N.P. Nonlinear modulated waves in the Timoshenko beam // Wave Mechanical Systems / Ed. K. Ragulskis, Kaunas: Technologija, 1996. P. 12–15.