

УДК 539.3

© 2005 г. Л. М. Зубов, Д. Н. Шейдаков

О ВЛИЯНИИ КРУЧЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Исследуется влияние кручения на явление неустойчивости в виде образования шейки в растягиваемом стержне, имеющем форму кругового цилиндра. Устойчивость изучается на основе трехмерных уравнений нейтрального равновесия изотропного несжимаемого тела. Докритическое состояние описывается точным решением задачи нелинейной теории упругости о равновесии скрученного и растянутого цилиндра. После разделения переменных уравнения нейтрального равновесия приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численным методом. Численные результаты получены для материала Бидермана и материала со степенной зависимостью удельной энергии от деформации. В плоскости параметров нагружения, которыми являются продольное удлинение и угол закручивания, построена область устойчивости. Эта область сравнивается с областью выпуклости погонной энергии скрученного и растянутого цилиндра.

1. Равновесие цилиндра в докритическом состоянии. Изохорическая деформация кручения и растяжения (сжатия) сплошного кругового цилиндра [1] из изотропного несжимаемого упругого материала задается соотношениями

$$R = \alpha^{-1/2} r, \quad \Phi = \varphi + \psi z, \quad Z = \alpha z, \quad \alpha, \psi = \text{const} \tag{1.1}$$

Здесь r, φ, z – цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации, R, Φ, Z – цилиндрические координаты в текущей конфигурации, α – коэффициент растяжения по оси цилиндра, ψ – угол закручивания на единицу длины. Выражения мер деформации и инвариантов, соответствующие (1.1), будут такими:

$$\mathbf{F} = \alpha^{-1} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + f(R) \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + \alpha \psi R (\mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_Z \mathbf{e}_\Phi) + \alpha^2 \mathbf{e}_Z \mathbf{e}_Z \tag{1.2}$$

$$\mathbf{g} = \alpha (\mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi) - \psi R (\mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_Z \mathbf{e}_\Phi) + \alpha^{-1} f(R) \mathbf{e}_Z \mathbf{e}_Z$$

$$I_1 = 2\alpha^{-1} + \alpha^2 + \psi^2 R^2, \quad I_2 = 2\alpha + \alpha^{-2} + \alpha^{-1} \psi^2 R^2, \quad f(R) = \alpha^{-1} + \psi^2 R^2 \tag{1.3}$$

В этих формулах $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z$ – ортонормированный векторный базис цилиндрических координат в текущей конфигурации, \mathbf{g} – мера деформации Альманзи, $\mathbf{F} = \mathbf{g}^{-1}$ – мера деформации Фингера, I_1, I_2 – первый и второй инварианты тензора \mathbf{F} (третий инвариант равен единице в силу условия несжимаемости).

Определяющее соотношение для изотропного несжимаемого упругого тела [1] имеет вид

$$\mathbf{T} = \kappa_1(I_1, I_2) \mathbf{F} - \kappa_2(I_1, I_2) \mathbf{g} - p \mathbf{E}$$

$$\kappa_1(I_1, I_2) = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \kappa_2(I_1, I_2) = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \tag{1.4}$$

Здесь \mathbf{T} – тензор напряжений Коши, \mathbf{E} – единичный тензор, p – составляющая напряжения в несжимаемом теле, не определяемая деформацией, $W(I_1, I_2)$ – удельная потенциальная энергия деформации упругого цилиндра.

Из соотношений (1.2) и (1.4) и уравнений равновесия вытекает, что касательные напряжения τ_{RZ} и $\tau_{R\Phi}$ равны нулю, а остальные компоненты тензора \mathbf{T} в базисе $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z$ зависят только от координаты R .

Для случая, когда боковая поверхность цилиндра не загружена, выражения напряжений и функции p имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_R &= -\psi^2 \int_R^{R_0} \kappa_1(\rho) \rho d\rho, \quad R_0 = \alpha^{-1/2} r_0, \quad \sigma_\Phi = \sigma_R + \psi^2 \kappa_1(R) R^2 \\ \sigma_Z &= (\alpha^2 - \alpha^{-1}) \kappa_1(R) + [\alpha - \alpha^{-1} f(R)] \kappa_2(R) + \sigma_R \\ \tau_{\Phi Z} &= \psi R [\alpha \kappa_1(R) + \kappa_2(R)], \quad p(R) = \alpha^{-1} \kappa_1(R) - \alpha \kappa_2(R) - \sigma_R \end{aligned} \quad (1.5)$$

где r_0 и R_0 – радиусы цилиндра соответственно до деформации и после деформации. Значения функций $\kappa_i(R)$ получаются после подстановки в выражения для $\kappa_i(I_1, I_2)$ соотношений (1.3).

Напряжения, действующие в любом поперечном сечении цилиндра, приводятся к продольной силе P и крутящему моменту M . Для заданного материала величины P и M будут некоторыми известными функциями параметров α и ψ , определяемыми по формулам

$$P(\alpha, \psi) = 2\pi \int_0^{R_0} \sigma_Z(R) R dR, \quad M(\alpha, \psi) = 2\pi \int_0^{R_0} \tau_{\Phi Z}(R) R^2 dR \quad (1.6)$$

2. Линеаризованные уравнения равновесия. Рассмотрим возмущенное состояние равновесия, бесконечно близкое к докритическому и существующее при тех же внешних условиях. Положение частиц тела в возмущенном состоянии задается радиус-вектором $\mathbf{R} + \eta \mathbf{w}$, где \mathbf{R} – радиус-вектор в докритическом состоянии, \mathbf{w} – вектор добавочных перемещений, η – малый параметр. Линеаризованные уравнения равновесия несжимаемого тела, описывающие возмущенное состояние и называемые также уравнениями нейтрального равновесия, имеют вид [1, 2]

$$\nabla \cdot \Theta = 0, \quad \Theta = \mathbf{T}' - (\nabla \mathbf{w})^T \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T}' = \left[\frac{d}{d\eta} \mathbf{T}(\mathbf{R} + \eta \mathbf{w}) \right]_{\eta=0} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0; \quad \nabla = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\Phi \frac{\partial}{R \partial \Phi} + \mathbf{e}_Z \frac{\partial}{\partial Z} \quad (2.2)$$

Здесь Θ – линеаризованный тензор напряжений Пиолы, ∇ – набла-оператор в докритической деформационной конфигурации цилиндра. Уравнение (2.2) есть линеаризованное условие несжимаемости. Линеаризованные граничные условия на боковой поверхности цилиндра

$$\mathbf{e}_R \cdot \Theta = 0 \quad \text{при} \quad R = R_0 \quad (2.3)$$

выражают отсутствие поверхностной нагрузки в возмущенном состоянии.

При учете соотношения (1.4) выражение для тензора Θ преобразуется следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} \Theta &= \kappa_1(R) \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{w} + \kappa_2(R) [(\nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot (\nabla \mathbf{w})^T + (\nabla \mathbf{w})^T \cdot \mathbf{g}] + \\ &+ p(R) (\nabla \mathbf{w})^T + \kappa_1 \dot{\mathbf{F}} - \kappa_2 \dot{\mathbf{g}} + q \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \kappa_i' &= 2\kappa_{i1}(R)\text{tr}(\mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{w}) - 2\kappa_{i2}(R)\text{tr}(\mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{w}) \\ \kappa_{ij} &= \frac{d\kappa_i}{dI_j}, \quad q_i = -p'; \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для определения функций $\kappa_{ij}(R)$ следует подставить в выражения производных $\partial \kappa_i(I_1, I_2)/\partial I_j$ значения инвариантов меры деформации Фингера \mathbf{F} .

Запишем представление вектора \mathbf{w} в базисе цилиндрических координат:

$$\mathbf{w} = u\mathbf{e}_R + v\mathbf{e}_\Phi + w\mathbf{e}_Z$$

Подставляя выражение (2.4) в уравнение (2.1) и добавляя условие (2.2), получим систему четырех уравнений в частных производных относительно четырех неизвестных функций u, v, w, q . Эта система допускает решения вида

$$\begin{aligned} u &= U(R)\cos(n\Phi + \lambda Z), \quad v = V(R)\sin(n\Phi + \lambda Z) \\ w &= W(R)\sin(n\Phi + \lambda Z), \quad q = Q(R)\cos(n\Phi + \lambda Z); \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь λ – действительное число. Целочисленный параметр n определяет характер формы потери устойчивости цилиндра. Например, случай $n = 0$ соответствует осесимметричной форме потери устойчивости, а $n = 1$ – стержневой форме. Другие значения этого параметра отвечают формам более сложной структуры.

При помощи соотношений (2.6) в уравнениях нейтрального равновесия и граничных условиях (2.3) переменные Φ и Z разделяются, и возникает краевая задача для системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно U, V, W, Q .

Если положить $\lambda = \pi m/l$ ($m = 1, 2, \dots$), где l – длина деформированного цилиндра, то, как показано ранее [3], решения (2.6) будут соответствовать следующим условиям закрепления торцов цилиндра:

при $n = 0$ – заземлению цилиндра двумя гладкими плитами;

при $n = 1$ – шарнирному опиранию для перемещений в направлении оси u и скользящей заделке для перемещений вдоль оси x .

3. Материал Бидермана. Рассмотрим модель материала Бидермана [4], удельная потенциальная энергия деформации которого задается соотношением

$$\begin{aligned} W(I_1, I_2) &= d_0(I_2 - 3) + d_1(I_1 - 3) + d_2(I_1 - 3)^2 + d_3(I_1 - 3)^3 \\ d_0, d_1, d_2, d_3 &= \text{const} \end{aligned} \tag{3.1}$$

В этом случае

$$\kappa_1(I_1, I_2) = d_1 + 2d_2(I_1 - 3) + 3d_3(I_1 - 3)^2, \quad \kappa_2(I_1, I_2) = d_0$$

Достаточные условия выполнимости неравенства Адамара для данного материала имеют вид [5, 6]

$$d_0 \geq 0, \quad d_1 \geq 0, \quad d_3 \geq 0, \quad d_1 + d_3 \geq 0, \quad 3d_2 + \sqrt{15d_1d_3} \geq 0 \tag{3.2}$$

Рассмотрим случай $d_0 = 0$. Тогда $\kappa_2 \equiv 0$ и система уравнений (2.1), (2.2) при учете соотношений (2.6) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\left(p + \frac{\kappa_1}{\alpha} + \frac{2\kappa_{11}}{\alpha^2}\right)U''' + \left(p' + \frac{p}{R} + \frac{\kappa_1}{\alpha R} + \frac{\kappa_1'}{\alpha} + \frac{2\kappa_{11}}{\alpha^2 R} + \frac{2\kappa_{11}'}{\alpha^2}\right)U'' + \\ &+ \left(-\frac{p}{R^2} - \left[\frac{f}{R^2} + \frac{nf_1}{R} + \alpha\lambda\gamma\right]\kappa_1 + 2\left[\frac{f'}{\alpha} - \frac{f^2}{R}\right]\frac{\kappa_{11}}{R} + \frac{2f\kappa_{11}'}{\alpha R}\right)U + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{np}{R} + \frac{2f_1\kappa_{11}}{\alpha} \right) V' + \left(-\frac{np}{R^2} - \frac{2f_1\kappa_1}{R} + 2 \left[\frac{f_1'}{\alpha} + \frac{f_1}{\alpha R} - \frac{f_1 f_1'}{R} \right] \kappa_{11} + \frac{2f_1\kappa'_{11}}{\alpha} \right) V + \\
& + (p\lambda + 2\gamma\kappa_{11})W' + 2\gamma \left([1 - \alpha f] \frac{\kappa_{11}}{R} + \kappa'_{11} \right) W + Q' = 0 \\
& - \left(\frac{np}{R} + \frac{2f_1\kappa_{11}}{\alpha} \right) U' - \left(\frac{np'}{R} + \frac{np}{R^2} + \frac{2f_1\kappa_1}{R} + \frac{2f_1 f_1 \kappa_{11}}{R} \right) U + \frac{\kappa_1}{\alpha} V'' + \\
& + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha R} + \frac{\kappa'_1}{\alpha} \right) V' - \left(\frac{p'}{R} + \frac{n^2 p}{R^2} + \left[\frac{f}{R^2} + \frac{n f_1}{R} + \alpha \lambda \gamma \right] \kappa_1 + 2f_1^2 \kappa_{11} \right) V - \left(\frac{np\lambda}{R} + 2\alpha\gamma f_1 \kappa_{11} \right) W - \frac{n}{R} Q = 0 \\
& - (p\lambda + 2\gamma\kappa_{11})U' - \left(p'\lambda + \frac{p\lambda}{R} + \frac{2\alpha\gamma f_1 \kappa_{11}}{R} \right) U - \left(\frac{np\lambda}{R} + 2\alpha\gamma f_1 \kappa_{11} \right) V + \\
& + \frac{\kappa_1}{\alpha} W'' + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha R} + \frac{\kappa'_1}{\alpha} \right) W' - \left(p\lambda^2 + \left[\frac{n f_1}{R} + \alpha \lambda \gamma \right] \kappa_1 + 2\alpha^2 \gamma^2 \kappa_{11} \right) W - \lambda Q = 0 \\
& U' + \frac{1}{R} U + \frac{n}{R} V + \lambda W = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\gamma = \psi n + \alpha \lambda, \quad f_1(R) = \frac{f(R)n}{R} + \alpha \psi R \lambda$$

Граничные условия на боковой поверхности $R = R_0$ примут вид

$$\begin{aligned}
& \left(p + \frac{\kappa_1}{\alpha} + \frac{2\kappa_{11}}{\alpha^2} \right) U' + \frac{2f_1\kappa_{11}}{\alpha R_0} U + \frac{2f_1\kappa_{11}}{\alpha} V + 2\gamma\kappa_{11} W + Q = 0 \\
& \frac{pn}{R_0} U - \frac{\kappa_1}{\alpha} V' + \frac{p}{R_0} V = 0, \quad p\lambda U - \frac{\kappa_1}{\alpha} W' = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Исключив неизвестные функции W и Q из уравнений (3.3), получим систему шести уравнений первого порядка, записываемую в матричной форме

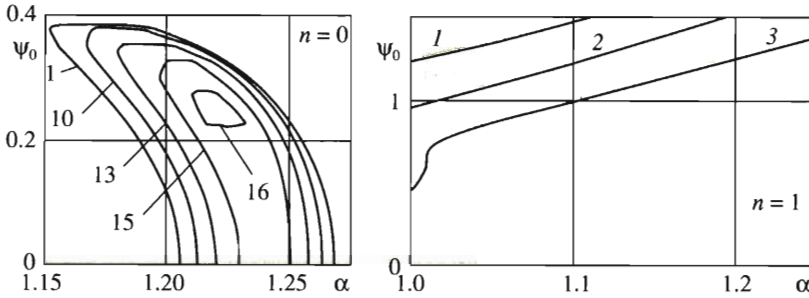
$$\mathbf{X}' + \mathbf{A}(R)\mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{X} = \begin{cases} \{U, U', U'', U''', V, V'\}, & n = 0 \\ \{U, U', U'', V, V', V''\}, & n > 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

где \mathbf{X} – вектор-столбец неизвестных функций, $\mathbf{A}(R)$ – матрица коэффициентов системы.

Для решения системы (3.5) необходимы еще три граничных условия, которые можно получить, потребовав ограниченности функций U, V, W, Q и их производных при $R = 0$ (в случае $n > 2$ можно взять любые три условия из четырех, указанных в (3.6)):

$$\begin{aligned}
n = 0: & \quad U(0) = U''(0) = V(0) = 0 \\
n = 1: & \quad U(0) + V(0) = 0, \quad U'(0) = V'(0) = 0 \\
n = 2: & \quad U(0) = V(0) = 0, \quad U'(0) + V'(0) = 0 \\
n > 2: & \quad U(0) = V(0) = U'(0) = V'(0) = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Система (3.5) решается конечно-разностным методом [3].



Фиг. 1

Приведенные ниже результаты получены для цилиндра с отношением диаметра к длине, равным 0.1 в недеформированном состоянии. Все кривые симметричны относительно оси $\psi_0 = 0$, поэтому показана лишь область $\psi_0 \geq 0$. На каждой кривой отмечено значение параметра m , которому она соответствует.

На фиг. 1 изображены бифуркационные кривые в плоскости параметров α и $\psi_0 = \psi r_0$ для материала Бидермана с набором констант $d_0 = 0, d_1 = 27, d_2 = -60, d_3 = 80$ для осесимметричной формы потери устойчивости ($n = 0$) и для стержневой формы неустойчивости ($n = 1$). Потеря устойчивости более сложной формы ($n > 1$) для данного материала не обнаружена. В осесимметричном случае бифуркация равновесия происходит лишь для первых нескольких значений параметра m (в данном случае для $m = 1, 2, \dots, 16$), в то время как для стержневой формы потери устойчивости бифуркационные кривые существуют при любых m . Пересечения кривых с осью α дают точки бифуркации при чистом растяжении цилиндра.

При чистом растяжении реализуется только осесимметричная форма потери устойчивости (образование шейки), причем все точки бифуркации лежат на ниспадающем участке диаграммы зависимости растягивающей силы P от коэффициента удлинения α .

Этот факт не случаен, а является свойством, присущим не только модели Бидермана, но и любому несжимаемому изотропному материалу. Именно, справедлива

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) изотропный несжимаемый материал удовлетворяет условию Адамара [1];
- 2) существует множество Γ полуоси $\alpha > 1$, на котором растягивающая сила $P(\alpha)$ является неубывающей функцией осевого удлинения цилиндра.

Тогда при $\alpha \in \Gamma$ вторая вариация потенциальной энергии упругого цилиндра строго положительна на любом виртуальном нежестком смещении из состояния простого растяжения

$$R = \alpha^{-1/2} r, \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \alpha z$$

что означает отсутствие нетривиальных решений линеаризованной краевой задачи (2.1)–(2.4) при $\psi = 0$ и устойчивость растянутого цилиндра относительно малых возмущений.

Доказательство. Выражение (1.6) для растягивающей силы при учете решения (1.5) запишется как

$$P = \pi r_0^2 (\alpha - \alpha^{-2}) (\kappa_1 + \alpha^{-1} \kappa_2) \tag{3.7}$$

Находя отсюда производную $dP/d\alpha$, получим условие неубывания растягивающей силы $P(\alpha)$

$$\left(\alpha^2 + \frac{2}{\alpha} \right) \kappa_1 + \frac{3}{\alpha^2} \kappa_2 + 2 \left(\alpha - \frac{1}{\alpha^2} \right)^2 (\alpha^2 \kappa_{11} + 2\alpha \kappa_{12} + \kappa_{22}) \geq 0 \tag{3.8}$$

Вторая вариация потенциальной энергии упругого тела имеет вид [2]

$$\delta^2 \Pi = \frac{d^2}{d\eta^2} \iiint_V W(\mathbf{R} + \eta \mathbf{w}) dV |_{\eta=0} = \iiint_V \boldsymbol{\Theta} \cdot \nabla \mathbf{w}^T dV$$

Отсюда при помощи соотношений (1.2), (1.3), (2.4), (2.5) получим

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi = & \iiint_V \left[\left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + \alpha \kappa_2 \right) \left(\left(\frac{\partial w}{\partial Z} + 2 \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R} + \frac{\partial u}{R \partial \Phi} \right)^2 \right) + \right. \\ & + \frac{1}{\alpha} \left(\kappa_1 + \frac{\kappa_2}{\alpha} \right) \left(\left(\frac{\partial w}{\partial R} + \frac{\partial u}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{R \partial \Phi} + \frac{\partial v}{\partial Z} \right)^2 + (\alpha^3 - 1) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right)^2 \right] \right) + \\ & \left. + \left(\left(\alpha^2 + \frac{2}{\alpha} \right) \kappa_1 + \frac{3}{\alpha^2} \kappa_2 + 2 \left(\alpha - \frac{1}{\alpha^2} \right)^2 (\alpha^2 \kappa_{11} + 2\alpha \kappa_{12} + \kappa_{22}) \right) \left(\frac{\partial w}{\partial Z} \right)^2 \right] dV \end{aligned} \quad (3.9)$$

Согласно полученным ранее результатам [5], из условия Адамара следуют неравенства

$$\kappa_1 + \alpha^{-1} \kappa_2 \geq 0, \quad \alpha^{-1} \kappa_1 + \alpha \kappa_2 \geq 0$$

причем $\kappa_1 + \alpha^{-1} \kappa_2 \geq 0$ может равняться нулю только при $\alpha = 1$, что видно из выражения (3.7) для растягивающей силы. Тогда из выражения (3.9) при $\alpha \in \Gamma$ (т.е. при выполнении условия (3.8)) получим, что $\delta^2 \Pi \geq 0$ для любых \mathbf{w} , причем равенство возможно лишь для векторных полей с компонентами вида

$$u = u_0 + u_1 R + u_2 \Phi, \quad v = v_0 + v_1 R + v_2 \Phi, \quad w = w_0 + w_1 Z$$

где u_i, v_i, w_j ($i = 0, 1, 2; j = 0, 1$) – некоторые постоянные. Но, поскольку поле перемещений \mathbf{w} должно удовлетворять условию несжимаемости (2.2) и кинематическому ограничению $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{w}|_{R=R_0} = 0$, а компоненты u, v должны удовлетворять условию $u|_{R=0} = v|_{R=0} = 0$, необходимо $u_0 = u_1 = u_2 = v_0 = v_2 = w_1 = 0$, т.е. $\mathbf{w} = \{0, v_1 R, w_0\}$, что соответствует жесткому смещению и повороту тела, не представляющим здесь интереса.

Теорема доказана.

В случае плоской деформации прямоугольного бруса из несжимаемого изотропного материала отсутствие смежных форм равновесия на возрастающем участке диаграммы растяжения стержня доказано ранее [6].

Для цилиндра из материала Бидермана с указанными выше значениями постоянных d_0, d_1, d_2, d_3 множество Γ состоит из отрезка $1 \leq \alpha \leq 1.206$ и луча $\alpha \geq 1.206$. Ниспадающему участку диаграммы растяжения, на котором согласно фиг. 1, возможна потеря устойчивости, соответствует отрезок $1.206 \leq \alpha \leq 1.269$.

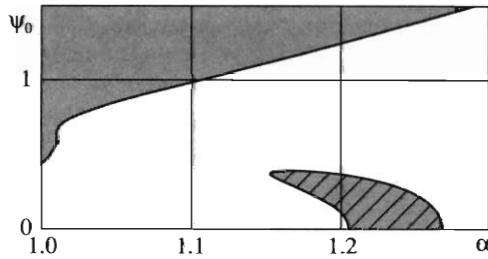
Погонная потенциальная энергия растянутого и скрученного стержня определяется формулой

$$\Pi_0(\alpha, \psi) = 2\pi \int_0^{r_0} r W(I_1, I_2) dr \quad (3.10)$$

В качестве I_1, I_2 сюда должны быть подставлены вытекающие из (1.1) выражения (1.3). Используя (1.4), (1.6), (3.10), а также решение (1.5) задачи кручения и растяжения кругового цилиндра, можно доказать справедливость соотношений

$$P(\alpha, \psi) = \partial \Pi_0(\alpha, \psi) / \partial \alpha, \quad M(\alpha, \psi) = \partial \Pi_0(\alpha, \psi) / \partial \psi \quad (3.11)$$

На основании выражений (3.11) условие строгой выпуклости погонной энергии стержня как функции осевого удлинения и угла закручивания можно представить в



Фиг. 2

форме постулата Друкера [7], т.е. требования положительности работы приращений обобщенных сил на малых приращениях обобщенных перемещений

$$dPd\alpha + dMd\psi > 0 \tag{3.12}$$

При простом растяжении, когда $\psi = 0$, неравенство (3.12) выполняется на возрастающих участках диаграммы растяжения и эквивалентно условию строгой выпуклости функции одной переменной $P_0(\alpha)$. Как установлено выше, потеря устойчивости растянутого цилиндра возможна только на ниспадающих участках диаграммы растяжения, т.е. вне области выпуклости погонной энергии. В связи с этим интересно в более общем случае скрученного и растянутого цилиндра сравнить область строгой выпуклости функции $P_0(\alpha, \psi)$ на плоскости параметров α, ψ с областью устойчивости, определяемой путем решения линеаризованной однородной краевой задачи (2.1)–(2.4). Указанное сравнение отражено на фиг. 2, где закрашена область неустойчивости, а заштрихована область, в которой потенциальная энергия перестает быть выпуклой. Необходимо отметить, что заштрихованная область немного шире замкнутой области осесимметричной неустойчивости и полностью содержит ее в себе. Область нарушения выпуклости энергии и область осесимметричной неустойчивости мало различаются и поэтому неразличимы на фиг. 2.

При комбинированном нагружении цилиндра растягивающей силой и крутящим моментом осесимметричные формы ($n = 0$) бифуркации равновесия могут существовать только в заштрихованной области, где утрачивается свойство выпуклости энергии $P_0(\alpha, \psi)$. Однако стержневая форма неустойчивости ($n = 1$), как видно на фиг. 2, возникает в области выпуклости функции $P_0(\alpha, \psi)$.

Анализируя область устойчивости, можно сделать вывод, что, используя кручение, можно обойти область неустойчивости и достигнуть большего удлинения без потери устойчивости, чем при чистом растяжении. Для цилиндров с другим отношением диаметра к длине область устойчивости отличается от приведенной незначительно.

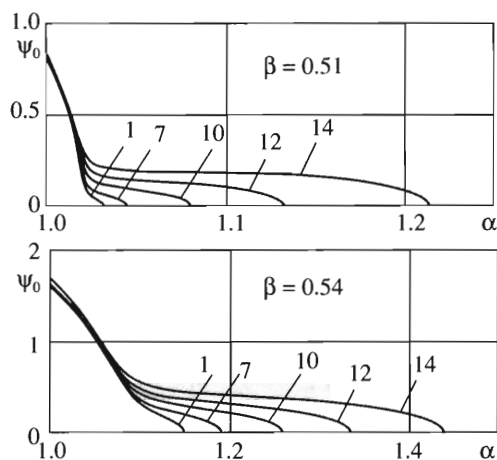
4. Степенной материал. Рассмотрим предложенную ранее [8] модель несжимаемого материала, удельная потенциальная энергия деформации которого задается соотношением

$$W(I_1, I_2) = d(I_1 - 3)^\beta, \quad d > 0, \quad \beta \geq 1/2 \tag{4.1}$$

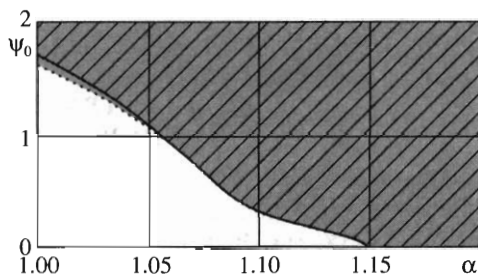
При значениях β , близких к $1/2$, диаграмма растяжения материала (4.1) мало отличается от диаграммы жестко пластического тела.

Значение материальной постоянной d не влияет на область устойчивости в плоскости параметров α, ψ_0 , поэтому далее будем считать $d = 1$.

Как показывают расчеты, для данной модели материала существует только осесимметричная форма потери устойчивости. На фиг. 3 приведены бифуркационные кривые для случая $\beta = 0.51$ и $\beta = 0.54$. В отличие от материала Бидермана для данной модели в осесимметричном случае бифуркация равновесия происходит для любого значения параметра m .



Фиг. 3



Фиг. 4

Сравнивая при $\beta = 0.54$ область выпуклости погонной потенциальной энергии и область устойчивости, приведенные на фиг. 4, видим, что при больших углах закручивания в части области выпуклости энергии реализуется осесимметричная форма потери устойчивости. В то же время указанные области почти совпадают, поэтому область выпуклости энергии, которую достаточно легко построить, можно использовать как приближение области устойчивости. Стоит отметить, что точность приближения при больших углах закручивания уменьшается с увеличением степени β .

Анализируя область устойчивости, можно сделать вывод, что для данной модели материала в отличие от материала Бидермана наибольшее удлинение цилиндра без потери устойчивости происходит при чистом растяжении, а дополнительное скручивание только вызовет потерю устойчивости на более ранней стадии растяжения.

Для цилиндров с другим отношением диаметра к длине область устойчивости, как и в случае материала Бидермана, отличается от приведенной незначительно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00638) и в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2113.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Зубов Л.М. Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 848–852.
3. Зубов Л.М., Моисеенко С.И. Выпучивание упругого цилиндра при кручении и сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 78–84.
4. Бидерман В.Л. Вопросы расчета резиновых деталей // Расчеты на прочность. М.: Машгиз, 1958. Вып. 3. С. 40–87.
5. Зубов Л.М., Рудев А.Н. О признаках выполнимости условия Адамара для высокоэластичных материалов // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 21–31.
6. Зубов Л.М., Рудев А.Н. О неустойчивости растянутого нелинейно-упругого бруса // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 786–798.
7. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
8. Зубов Л.М., Рудев А.Н. Об особенностях потери устойчивости нелинейно-упругого прямоугольного бруса // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 65–83.