

УДК 531/539:534.1

© 2005 г. Г. В. Манучарян, Ю. В. Михлин

## ПОСТРОЕНИЕ ГОМО- И ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Для построения гомо- и гетероклинических траекторий нелинейных систем используются Паде- и квази-Паде-аппроксимации. Использование условия сходимости Паде-аппроксимаций, а также условий на бесконечности позволяет решить поставленную задачу с достаточно высокой точностью. Конкретные расчеты проведены для неавтономного уравнения Дуффинга, уравнения колебаний математического маятника с параметрическим возбуждением и уравнения Ван дер Поля – Дуффинга с нелинейной упругой характеристикой.

Образование гомо- и гетероклинических траекторий (ГТ) принимается в качестве одного из критериев перехода от регулярного к хаотическому поведению решений динамической системы ([1, 2] и др.). Для построения этих траекторий следует определить соответствующие начальные условия, величину сдвига неустойчивого положения равновесия, а также функциональную взаимозависимость некоторых параметров рассматриваемой системы (например, это может быть зависимость амплитуды внешнего периодического воздействия от параметра, определяющего диссипацию в системе). Авторы многочисленных работ, посвященных образованию ГТ, используют известное условие Мельникова ([3–6] и др.), которое не позволяет определить все неизвестные параметры, в связи с чем в этих работах в условии Мельникова используется сепаратриса порождающего автономного уравнения Дуффинга. В общем случае задача эффективной аналитической аппроксимации ГТ сложна и не решена до сих пор.

В данной работе предлагается новый подход к построению ГТ в нелинейных динамических системах с фазовым пространством размерности два. Паде- и квази-Паде-аппроксимации используются для аппроксимации как ГТ в фазовом пространстве, так и соответствующего решения в виде функции от времени. Заметим, что и квази-Паде-аппроксимации, содержащие степени и экспоненциальные функции некоторого параметра, были рассмотрены ранее [7]. Условие сходимости, использовавшееся в теории нелинейных нормальных колебаний [8–10], а также условие на бесконечности позволили решить граничную задачу, сформулированную для ГТ, и вычислить начальные значения с допустимой точностью. Существенно, что реализованная в данной работе процедура построения ГТ и соответственно определения начала перехода к хаотическому поведению системы является более точной, чем обычно используемый критерий Мельникова, так как здесь не нужно использовать сепаратрису автономного уравнения Дуффинга. Заметим, что аппроксимации Паде были успешно использованы ранее для построения ГТ в нелинейном уравнении Шредингера и системе Лоренца [11–14].

**1. Необходимое условие сходимости аппроксимаций Паде.** Предположим, что получено локальное разложение решения по степеням некоторого параметра  $c$  в виде ряда

$$y^{(0)} = \alpha_0 + \alpha_1 c + \alpha_2 c^2 + \dots$$

(возможно, что получено также разложение по степеням  $c^{-1}$  при предельно больших значениях параметра:  $y^{(\infty)} = \beta_0 + \beta_1 c^{-1} + \beta_2 c^{-2} + \dots$ ). Заметим, что этот параметр может быть амплитудным значением решения или энергией системы. Для аналитического продолжения решения (или для сращивания двух предельных локальных разло-

жений) используются дробно-рациональные диагональные аппроксимации Паде (АП) [15] вида (суммирование от  $j = 0$  до  $j = s$ )

$$АП_s = \frac{\sum a_j c^j}{\sum b_j c^j} = \frac{\sum a_j c^{j-s}}{\sum b_j c^{j-s}}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Сравнивая выражения (1.1) с локальными разложениями и удерживая в последних только члены до порядка  $r$  ( $r = 2s + 1$  в случае аналитического продолжения или  $r = s$  в случае сращения локальных разложений) по параметрам  $c$  и  $c^{-1}$ , получим систему  $2s + 2$  линейных однородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_j, b_j$ . Так как в общем случае определитель системы  $\Delta_s$  не равен нулю, система имеет единственное тривиальное точное решение. Будем разыскивать АП с ненулевыми коэффициентами  $a_j, b_j$ . Не теряя общности, можно предположить, что для такой АП  $b_0 = 1$ . Теперь система алгебраических уравнений для определения  $a_j, b_j$  становится переопределенной. Все неизвестные коэффициенты могут быть определены из  $\Delta_s$  (или  $2s + 1$ ) уравнений, в то время как “невязка” этого приближенного решения может быть получена путем подстановки всех коэффициентов в оставшееся уравнение. Очевидно, что “невязка” (или “ошибка”) определяется значением  $\Delta_s$ , так как ненулевое решение и, следовательно, точная АП могут быть получены в данном приближении по  $c$  только в случае, когда  $\Delta_s = 0$ . Отсюда получаем необходимое условие сходимости последовательности АП (1.1) при  $s \rightarrow \infty$  к дробно-рациональной функции  $АП_\infty$ .

$$\lim \Delta_s = 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

Условие (1.2) можно применить и для квази-Паде-аппроксимаций, которые содержат степени и экспоненциальные функции некоторого неизвестного параметра. Кроме того, можно использовать условие (1.2) для получения неизвестных параметров, содержащихся в локальных разложениях.

Заметим, что условие сходимости АП (1.2) использовалось ранее в некоторых задачах теории нелинейных колебаний [8–10, 13].

**2. Неавтономное уравнение Дуффинга.** Рассмотрим неавтономное уравнение Дуффинга

$$y'' + \Delta y' + ky + \gamma y^3 = B \cos \omega t \quad (2.1)$$

Уравнению Дуффинга, которое появляется в многочисленных прикладных задачах (например, при дискретизации динамических моделей нелинейных стержней, пластин или оболочек), посвящено большое число работ. Хаотическое поведение решений этого уравнения может быть обнаружено при выборе различных видов упругих характеристик: мягкой ( $k > 0, \gamma < 0$ ) [16–18], жесткой ( $k > 0, \gamma > 0$ ) [19], с нулевой ( $k = 0, \gamma > 0$ ) [20, 21] и отрицательной ( $k < 0, \gamma > 0$ ) [4, 22, 23] линейной жесткостью.

Полагаем, что некоторыми заменами переменных уравнение приведено к виду

$$y'' + \delta y' - y + y^3 = f \cos \omega t \quad (2.2)$$

Для построения ГТ нужна информация о начальной точке  $(a_0, a_1)$ , соответствующей  $t = 0$ , и о соотношении между параметрами системы, а именно между  $\omega, f$  и  $\delta$ . Также необходимо узнать смещение  $b_0$  седловой точки автономного уравнения Дуффинга. Таким образом, следует получить систему четырех уравнений для определения этих неизвестных величин.

Для аналитического представления искомой траектории используется АП, а для аналитического представления соответствующего решения как функции времени используется квази-Паде-аппроксимация. Используется также необходимое условие сходимости (1.2).

Введем также условие на бесконечности: требуется, чтобы искомая траектория достигала неустойчивого положения равновесия, т.е.  $(y, y') \rightarrow (b_0, 0)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Кроме того, предположим, что  $y(t)$  – аналитическая функция вдоль ГТ, в таком случае можем использовать разложение  $y(t)$  в ряд Тейлора в окрестности нуля

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots \quad (2.3)$$

где

$$a_2 = (a_0 - a_0^3 + f - \delta a_1)/2, \quad a_3 = (-3a_0^2 a_1 + a_1 - 2\delta a_2)/6$$

$$a_4 = (-6a_0 a_1^2 - 6a_0^2 a_2 + 2a_2 - f\omega^2 - 6\delta a_3)/24, \dots$$

$a_0, a_1$  – произвольные постоянные.

Умножив уравнение (2.1) на  $y'(t)$  и проинтегрировав в пределах от  $t = 0$  до произвольного  $t$  вдоль любой траектории, получим

$$\int_0^t (y'' - y + y^3 + \delta y' - f \cos \omega t) y' dt = -\frac{y^2(t)}{2} + \frac{a_0^2}{2} + \frac{y^4(t)}{4} - \frac{a_0^4}{4} + \frac{y^2(t)}{2} - \frac{a_1^2}{2} + M(0, t) = 0 \quad (2.4)$$

где

$$M(p, q) = \int_p^q (\delta y' - f \cos \omega t) y' dt$$

Равенство (2.4) определяет произвольную фазовую траекторию неавтономного уравнения Дуффинга.

Рассмотрим теперь ГТ, которая достигает неустойчивого положения равновесия  $(b_0, 0)$  на бесконечности. Проинтегрировав равенство (2.4) в пределах от  $t = 0$  до  $t = \pm\infty$ , получим

$$\int_0^{\pm\infty} (y'' - y + y^3 + \delta y' - f \cos \omega t) y' dt \equiv N_0 - \frac{a_1^2}{2} + M(0, \pm\infty) = 0 \quad (2.5)$$

где

$$N_0 = -\frac{b_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{2} + \frac{b_0^4}{4} - \frac{a_0^4}{4}$$

Интересно, что интегрирование вдоль замкнутой ГТ в пределах от  $t = -\infty$  до  $t = +\infty$  дает известное условие Мельникова

$$M(-\infty, +\infty) = 0$$

Условие Мельникова может рассматриваться как условие сохранения энергии неавтономной динамической системы в среднем вдоль замкнутой ГТ. В дальнейшем условие Мельникова непосредственно не используется.

Рассмотрим интеграл  $M(0, t)$ . После подстановки локального разложения (2.3) и интегрирования получаем

$$\begin{aligned} M(0, t) &= At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + Et^5 + \dots \\ A &= (\delta a_1 - f) a_1, \quad B = (2(\delta a_1 - f) a_2 + 2\delta a_1 a_2)/2 \\ C &= (3(\delta a_1 - f) a_3 + 4\delta a_2^2 + (f\omega^2/2 + 3\delta a_3) a_1)/3 \\ D &= (4(\delta a_1 - f) a_4 + 4\delta a_1 a_4 + 6\delta a_2 a_3 + 2(f\omega^2/2 + 3\delta a_3) a_2)/4, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Перестроим теперь разложение (2.6) в АП

$$АП_3 = \frac{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3}{1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3} \quad (2.7)$$

Сравнивая АП<sub>3</sub> в форме (2.7) и локальное разложение (2.6), получим

$$\alpha_2 = [-2ABD^2 + AB^2F + AC^2D - A^2CF + A^2DE - BC^3 + 2B^2CD - B^3E]/\Lambda$$

$$\alpha_3 = [-2ABCF + 2ABDE - 2ACD^2 + 2AC^2E + A^2DF - A^2E^2 + 3BC^2D - 2B^2CE - B^2D^2 + B^3F - C^4]/\Lambda$$

$$\beta_1 = [-ACF + ADE - BCE - BD^2 + B^2F + C^2D]/\Lambda$$

$$\beta_2 = [ADF - AE^2 - BCF + BDE - CD^2 + C^2E]/\Lambda$$

$$\beta_3 = [-BDF + BE^2 - 2CDE + C^2F + D^3]/\Lambda$$

$$\Lambda = ACE - AD^2 + 2BDC - B^2E - C^3$$

Переходя к пределу на бесконечности в равенстве (2.6) с учетом представления (2.7), получим уравнение

$$N_0 - a_1^2/2 + \alpha_3/\beta_3 = 0 \quad (2.8)$$

Дополнительное уравнение получается, если использовать условие сходимости (1.2) для АП<sub>3</sub> в форме (2.7)

$$-ACF^2 + ACEG + 2ADEF - AD^2G - AE^3 + 2BCDG - 2BCEF + 2BDE^2 - 2BD^2F - B^2EG + B^2F^2 - 3CD^2E + 2C^2DF + C^2E^2 - C^3G + D^4 = 0 \quad (2.9)$$

Для аналитического продолжения локального разложения (2.3) на бесконечность перестроим локальное разложение (2.3) в квази-Паде-аппроксимацию, которая выбирается в форме, подобной форме соответствующего решения (решения на сепаратрисе) автономного уравнения Дуффинга. Имеем

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \cong e^{-t}(\alpha_0 + \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t})/(1 + \beta_2 e^{2t}) \quad (2.10)$$

Оправданность такого представления, которое удачно описывает поведение траектории на бесконечности, подтверждается и проверочными численными расчетами с использованием метода Рунге – Кутты (РК), которые представлены ниже.

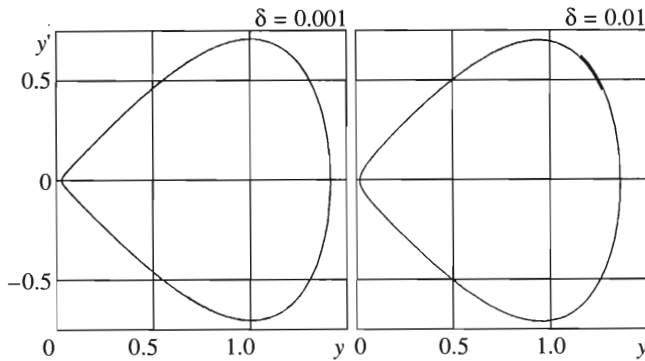
Из соотношения (2.10) следует, что

$$b_0 = \alpha_3/\beta_2. \quad (2.11)$$

Коэффициенты  $\alpha_i, \beta_j$  определяются из уравнения (2.10) путем разложения экспоненциальных функций по степеням  $t$  и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях.

Наконец, можно получить условие сходимости в форме (1.2) для квази-Паде-аппроксимации вида (2.10)

$$-\frac{1}{10}a_1^2 - \frac{4}{15}a_1a_2 - \frac{7}{10}a_1a_3 - 4a_1a_4 + 2a_1a_5 + \frac{5}{6}a_2^2 + 4a_2a_3 - 8a_2a_4 + 12a_2a_5 + 6a_3^2 - 12a_3a_4 + 24a_3a_5 - 24a_4^2 = 0 \quad (2.12)$$



Фиг. 1

Уравнения (2.8), (2.9), (2.11) и (2.12) образуют систему четырех нелинейных алгебраических уравнений для вычисления  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$  и  $f = f(\delta)$  при фиксированной частоте  $\omega$ .

Алгебраическая система решена с использованием метода Ньютона для  $\omega = 1$ .

Ниже представлены полученные из указанной системы алгебраических уравнений значения  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$  и амплитуды  $f$  как функции коэффициента трения  $\delta$

$\delta \cdot 10^4$	1	5	10	30	50	100
$(a_0 - 1.21) \cdot 10^5$	498	503	508	530	553	609
$(a_1 - 0.621) \cdot 10^6$	807	803	819	848	876	943
$f \cdot 10^6$	87.6	438	876	2630	4386	8784
$b_0 \cdot 10^6$	58.2	291	582	1744	2906	5808

Если использовать значения  $(a_0, a_1)$  как начальную точку при численном расчете ГТ с использованием метода РК, то эти численные расчеты демонстрируют хорошую точность аналитических результатов.

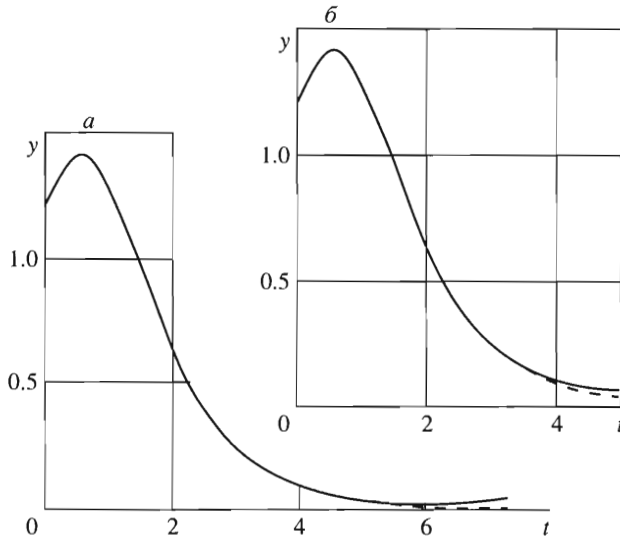
Некоторые примеры ГТ в фазовом пространстве, построенных при помощи метода РК с использованием начальных условий, полученных из системы алгебраических уравнений, показаны на фиг. 1 для двух наборов параметров: а)  $\delta = 0.001$ ,  $a_0 = 1.21508$ ,  $a_1 = 0.621819$ ,  $b_0 = 0.00058$ ,  $f = 0.00087$  и б)  $\delta = 0.01$ ,  $a_0 = 1.21609$ ,  $a_1 = 0.621943$ ,  $b_0 = 0.0058$ ,  $f = 0.00878$ ; в случае б) заметна незамкнутость фазовой траектории, что определяется некоторой погрешностью аналитического расчета. На фиг. 2 дано сравнение траекторий, построенных с использованием метода РК (сплошная кривая) и квази-Паде-аппроксимации (2.10) (штриховая кривая) для указанных выше наборов параметров а и б. На фиг. 3 приведены кривые в плоскости параметров  $(\delta, f)$ , которые отвечают ГТ, причем сплошная кривая получена изложенным здесь методом, а штриховая кривая – методом Мельникова.

Однако при изменении частоты внешнего воздействия  $\omega$  обнаруживается неустойчивость решений системы нелинейных алгебраических уравнений (2.8), (2.9), (2.11) и (2.12), что связано с большими порядками этих уравнений, поэтому для получения зависимости амплитуды вынуждающей силы  $f$  от частоты  $\omega$  процедура определения основных параметров ГТ несколько модифицируется.

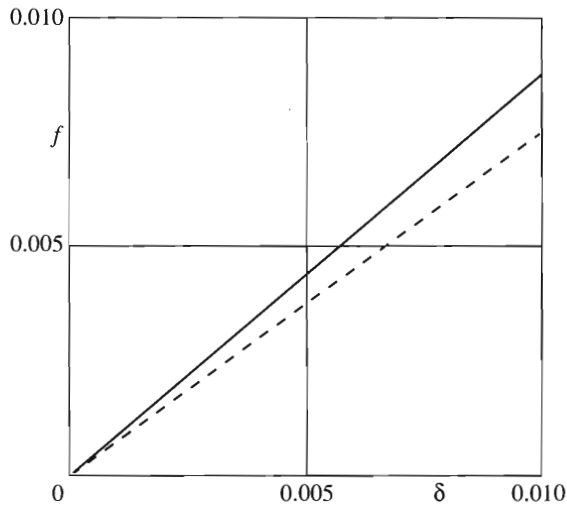
Перепишем неавтономное уравнение Дуффинга в виде

$$y'' + \delta y' - y + y^3 = \delta f \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.13)$$

В данном случае  $f$  имеет смысл коэффициента пропорциональности между коэффициентом трения  $\delta$  и амплитудой вынуждающей силы, а введение фазы  $\varphi$  позволит выбирать в качестве начальной точку с координатами  $(a_0, 0)$ . Полагаем, что значение  $\delta$  мало.



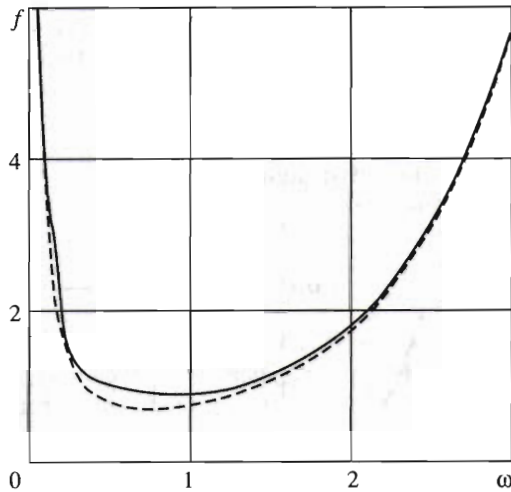
Фиг. 2



Фиг. 3

Вернемся к выражению (2.5), записав отдельно равенства, полученные при интегрировании от  $t = 0$  до  $t = +\infty$  и от  $t = 0$  до  $t = -\infty$ , а также внеся поправки в связи с изменением вида уравнения:

$$\begin{aligned}
 N_0 + \delta \int_0^{+\infty} (y' - f \cos(\omega t + \varphi)) y' dt &= 0 \\
 N_0 + \delta \int_0^{-\infty} (y' - f \cos(\omega t + \varphi)) y' dt &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$



Фиг. 4

Линеаризуя все разрешающие уравнения относительно малой величины  $\delta$ , вычислим интегралы в выражениях (2.14) вдоль сепаратрисы автономного уравнения Дуффинга,  $y_0 = \sqrt{2}/\text{ch}t$ . Получим

$$\int_0^{\pm\infty} (y_0' - f \cos(\omega t + \varphi)) y_0' dt = \int_0^{\pm\infty} y_0'^2 dt - \cos \varphi \int_0^{\pm\infty} f \cos \omega t y_0' dt + \sin \varphi \int_0^{\pm\infty} f \cos \omega t y_0' dt$$

$$\int_0^{+\infty} y_0'^2 dt = \int_{-\infty}^0 y_0'^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin \omega t y_0' dt = \int_{-\infty}^0 \sin \omega t y_0' dt = -\frac{\omega \sqrt{2} \pi}{2} \left( \text{ch} \frac{\omega \pi}{2} \right)^{-1}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos \omega t y_0' dt = -\int_{-\infty}^0 \cos \omega t y_0' dt = -\sqrt{2} + \omega \sqrt{2} \left( -\frac{\pi}{2} \text{th} \frac{\omega \pi}{2} + 4\omega \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + (1 + 4k)^2} \right)$$

Подставив значения интегралов в равенства (2.14), получим алгебраические уравнения, которые вместе с соотношениями (2.11), (2.12) образуют систему для определения неизвестных  $a_0$ ,  $\varphi$ ,  $b_0$  и  $f = f(\omega)$  при фиксированном коэффициенте трения  $\delta$ .

Ниже представлены значения  $a_0$ ,  $\varphi$  и  $f$  как функций частоты  $\omega$  при  $\delta = 0.001$ , полученные из системы указанных алгебраических уравнений в предположении  $b_0 = 0$

$\omega$	0.2	0.5	1.0	1.5	2	3
$(a_0 + 1.41) \cdot 10^6$	-4446	-4392	-4606	-4911	-5416	-7837
$\varphi$	-4.994	-5.390	-5.279	-5.079	-4.972	-4.862
$f$	1.640	1.020	0.893	1.141	1.800	5.632

Фиг. 4 показывает зависимости между параметрами  $\omega$ ,  $f$ , отвечающие ГТ и полученные описанным здесь методом (сплошная кривая) и методом Мельникова (штри-

ховая кривая) при  $\delta = 0.001$ . Заметим, что граница области, отвечающей хаотическому поведению, в плоскости параметров, полученная представленным здесь методом, находится выше той, что получена методом Мельникова, т.е. она расположена ближе к реальной области хаотического поведения, определяемой разными исследователями путем численных экспериментов.

**3. Уравнение Ван дер Поля – Дуффинга.** Рассмотрим уравнение, которое описывает, в частности, панельный флаттер в установившемся сверхзвуковом воздушном потоке [24–28]

$$\dot{x} + \delta(\alpha - \beta x^2)\dot{x} - x + x^3 = 0; \quad \alpha, \beta > 0, \quad 0 < \delta \ll 1 \quad (3.1)$$

Для построения гомоклинической траектории используется процедура, аналогичная использованной для неавтономного уравнения Дуффинга. Выделим вначале локальные разложения решения вблизи неустойчивой особой точки, полученные методом малого параметра:

$$x = c_{\pm} e^{k_{\pm} t} - c_{\pm}^3 \frac{1 - k_{\pm} \delta \beta}{9k_{\pm}^2 + 3\delta \alpha k_{\pm} - 1} e^{3k_{\pm} t} + \dots, \quad t \rightarrow \pm\infty \quad (3.2)$$

где  $k_{\pm} = (-\delta\alpha \mp \sqrt{\delta^2 \alpha^2 + 4})/2$  – корни характеристического уравнения  $k^2 + \delta\alpha k - 1 = 0$ , а  $c_{\pm}$  – произвольные постоянные. Запишем также локальное разложение  $x(t)$  в ряд Тейлора в окрестности нуля

$$x = a_0 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \quad (3.3)$$

где

$$a_2 = (a_0 - a_0^3)/2, \quad a_3 = -\delta(-\alpha + \beta a_0^2) a_0 (a_0^2 - 1)/6, \dots$$

$a_0$  – произвольная постоянная.

Таким образом, для построения искомой гомоклинической траектории необходимо найти значения трех указанных постоянных  $c_{\pm}, a_0$  (фиг. 5). В дальнейшем эти значения можно будет приближенно определить из системы трех нелинейных алгебраических уравнений.

Воспользуемся условием потенциальности, проинтегрировав предварительно умноженное на  $\dot{x}(t)$  уравнение (3.1) в пределах от  $t = 0$  до  $t = \infty$ . Получим

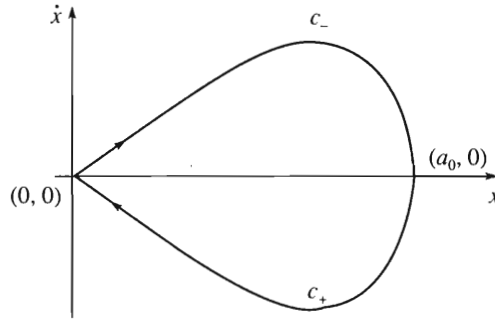
$$\frac{a_0^2}{2} - \frac{a_0^4}{4} + \delta \int_0^{\pm\infty} (\alpha - \beta x^2) \dot{x}^2 dt = 0$$

Подставив под знак интеграла локальное разложение (3.3) и перестроив проинтегрированное выражение в АП

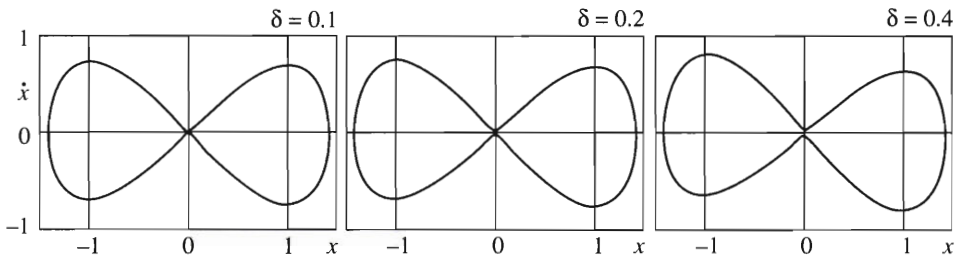
$$\int_0^t (\alpha - \beta x^2) \dot{x}^2 dt = At^3 + Bt^4 + Ct^5 + \dots = \frac{\alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4}{1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \beta_4 t^4}$$

получим в пределе при  $t \rightarrow \pm\infty$

$$\frac{a_0^2}{2} - \frac{a_0^4}{4} + \delta \frac{\alpha_4}{\beta_4} = 0 \quad (3.4)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Учитывая вид локальных разложений  $x(t)$  на бесконечности (3.2), сравним эти разложения с разложением (3.3), используя квази-Паде-аппроксимации

$$P_{\pm\infty} = e^{k_{\pm}t} \frac{\alpha_0 + \alpha_2 e^{2k_{\pm}t} + \alpha_4 e^{4k_{\pm}t}}{1 + \beta_2 e^{2k_{\pm}t} + \beta_4 e^{4k_{\pm}t}} \quad (3.5)$$

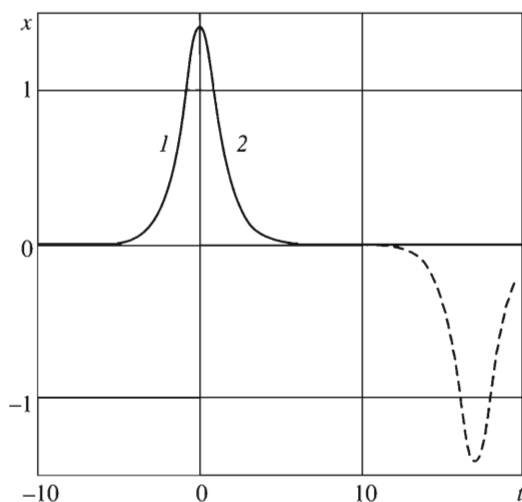
Коэффициенты аппроксимаций  $P_{+\infty}$ ,  $P_{-\infty}$  вычисляются путем сравнения с разложениями (3.2) и (3.3).

Таким образом, получаем представление решения как для положительных, так и для отрицательных значений  $t$ , а также два уравнения, появляющихся при использовании необходимого условия сходимости (1.2) для аппроксимаций  $P_{+\infty}$ ,  $P_{-\infty}$ . Эти уравнения вместе с условием (3.4) образуют систему алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных в локальных разложениях.

Ниже даны значения  $a_0$ ,  $c_{\pm}$ , полученные из системы трех нелинейных алгебраических уравнений, при разных значениях параметра  $\delta$  и при  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 1$

$\delta \cdot 10^4$	1	10	100	1000	2000	4000
$(a_0 - 1.41) \cdot 10^6$	4214	4214	4216	4450	5160	8052
$(c_+ - 2.8) \cdot 10^5$	2670	2863	3045	4792	65760	97111
$(c_- - 2.8) \cdot 10^5$	2660	2763	2058	-4849	-12197	-25881

На фиг. 6 представлены примеры траекторий, полученных методом РК при разных значениях параметра  $\delta$  с начальными значениями, полученными из системы алгебраических уравнений. На фиг. 7 представлено сравнение траектории, полученной



Фиг. 7

методом РК (штриховая кривая), с квази-Падде-аппроксимациями  $P_{-\infty}$  (кривая 1) и  $P_{+\infty}$  (кривая 2) согласно соотношениям (3.5) при  $\delta = 0.01$ . Видно, что даже незначительная погрешность метода РК приводит к тому, что соответствующая траектория проходит мимо неустойчивой особой точки и уходит в левую полуплоскость.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. N. Y.: Springer, 1993. 459 p.
2. Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. N. Y., etc.: Springer, 1990. 672 p.
3. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. общества. 1963. Т. 12. С. 3–52.
4. Holmes P.J. A nonlinear oscillator with a strange attractor // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1978. V. 292. № 1394. P. 419–448.
5. Moon F.C. Chaotic Vibrations. N. Y.: Wiley, 1987. 309 p.
6. Sanders J.A. Melnikov's method and averaging // Celest. Mech. V. 28. № 1–2. 1982. P. 171–181.
7. Martin P., Baker G.A. Two-point quasifractional approximant in physics. Truncation error // J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 6. P. 1470–1477.
8. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
9. Mikhlin Yu.V. Matching of local expansions in the theory of non-linear vibrations // J. Sound and Vibration. 1995. V. 182. № 4. P. 577–588.
10. Vakakis A.F., Manevitch L.I., Mikhlin Yu.V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A. Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. N. Y.: Wiley, 1996. 568 p.
11. Emaci E., Vakakis A.F., Andrianov I.V., Mikhlin Yu.V. Study of two-dimensional axisymmetric breathers using Padé approximants // Nonlinear Dynamics. 1997. V. 13. № 4. P. 327–338.
12. Vakakis A.F., Azeez M.F.A. Analytic approximation of the homoclinic orbits of the Lorenz system at  $\sigma = 10.6$ ,  $b = 8/3$  and  $\rho = 13.926$  // Nonlinear Dynamics. 1998. V. 15. P. 245–257.
13. Mikhlin Yu.V. Analytical construction of homoclinic orbits of two- and three-dimensional dynamical systems // J. Sound and Vibration. 2000. V. 230. № 5. P. 971–983.

14. *Mikhlin Yu.V., Manucharyan G.V., Savenkova S.N.* Analysis of homoclinic trajectories in mechanical systems with several equilibrium positions // Proc. of the 6th Conference on Dynamical Systems. Theory and Applications. Lodz. 2001. P. 309–316.
15. *Baker G.A., Graves-Morris P.* Pade Approximants. London: Addison-Wesley, 1981. Pt. 1. 325 p. Pt. 2. 215 p. = *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
16. *Желудев Н.И., Макаров В.А., Матвеева А.В., Свирко Ю.П.* Структура хаоса при возбуждении нелинейного осциллятора гармонической внешней силой // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1984. Т. 25. № 5. С. 106–109.
17. *Chui S.T., Ma K.B.* Nature of some chaotic states for Duffing's equation // Phys. Rev. A. 1982. V. 26. № 4. P. 2262–2265.
18. *Elgin J.N., Forster D., Sarkar S.* Mechanism for chaos in the Duffing equation // Phys. Lett. Ser. A. 1983. V. 94. № 5. P. 195–197.
19. *Крюков Б.И., Середович Г.И.* О “странном” поведении решений уравнения Дуффинга // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 2. С. 311–314.
20. *Beirsdorfer P., Wersinger J.M., Treve Y.* Topology of the invariant manifolds of period-doubling attractors for some forced nonlinear oscillators // Phys. Lett. Ser. A. 1983. V. 96. № 6. P. 269–272.
21. *Kawakami H.* The bifurcation pattern of periodic solutions observed in Duffing's equation // Тр. 9-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1981. Киев: Наук. думка, 1984. Т. 2. С. 162–165.
22. *Arecchi F.T., Lisi F.* Hopping mechanism generating 1/f noise in nonlinear systems // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. № 2. P. 94–98.
23. *Moon F.C., Li G.-X.* The fractal dimension of the two-well potential strange attractor // Physica D. 1985. V. 17. № 1. P. 99–108.
24. *Holmes P.J.* Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: A finite dimensional analysis // J. Sound and Vibration. 1977. V. 53. № 4. P. 471–503.
25. *Holmes P.J., Mersden J.E.* Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: A finite dimensional analysis // Automatica. 1978. V. 14. P. 367–384.
26. *Holmes P.J.* Averaging and chaotic motions in forced oscillations // SIAM Journal Appl. Math. 1980. V. 38. № 1. P. 65–80.
27. *Greenspan B., Holmes P.* Repeated resonance and homoclinic bifurcation in a periodically forced family of oscillators // SIAM Journal Math. Anal. 1984. V. 15. № 1. P. 69–97.
28. *Smith P.* The multiple scales method, homoclinic bifurcation and Melnikov's method for autonomous systems // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1998. V. 8. № 11. P. 2099–2105.

Харьков

e-mail: [muv@kpi.kharkov.ua](mailto:muv@kpi.kharkov.ua)

[gayane@kpi.kharkov.ua](mailto:gayane@kpi.kharkov.ua)

Поступила в редакцию

13.III.2003