

УДК 531.36;62–50

© 2005 г. М. С. Ефремов, А. Е. Поляков, В. В. Стрыгин

НОВЫЙ АЛГОРИТМ СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предлагается новый алгоритм синтеза релейного запаздывающего управления для отслеживания медленных движений одного класса механических систем. Найдены условия существования управления и даны примеры решения задачи слежения для перевернутого и двойного перевернутого маятников.

В системах с переменной структурой [1] функция управления, как правило, разрывна. Важным инструментом для построения робастного управления является метод скользящих режимов [2]. Впервые публикации, содержащие идеи, которые затем легли в основу метода управления при помощи скользящих режимов, появились в середине прошлого века [3]. Методы управления на основе скользящих режимов нашли широкое применение в задачах управления различными системами: электромеханическими [4], маятниковыми [5] и многими другими.

Для преодоления трудностей, вызванных наличием запаздывания в управлении, ниже будет предложен метод, использующий так называемую ϵ -стабилизацию решения [6].

Существует много работ, посвященных управлению электромеханическими системами. Были получены условия существования движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции при учете динамики исполнительных органов, найден вид законов управления и построено множество движений манипулятора [7]. Были приведены примеры задачи стабилизации программного многообразия манипулятора на подвижном основании и стабилизации программной ориентации преследуемого тела [8]. Рассмотрены управляемые плоские движения двузвенника по горизонтальной плоскости [9]. Было доказано [10], что в задаче управления n -звенным манипулятором, который обладает особым режимом порядка $2m$, оптимальные траектории выходят на особый режим за конечное время, причем оптимальное управление имеет бесконечное число переключений. Предложены алгоритмы управления асинхронным электроприводом на основе метода разделения движений в задачах управления и идентификации, рассмотрены задачи слежения по скорости и углу поворота вала двигателя [11].

В развитие этих результатов ниже предлагается новый алгоритм синтеза релейного управления для механических систем, который учитывает наличие в управлении запаздывания по времени, что не учитывалось ранее [7–11]. Управление выбрано релейным, как и в работах [7, 10], что обусловлено простотой его применения. Синтез управления с запаздыванием для механической системы основан на линеаризации [12] исходной системы в окрестности отслеживаемой траектории и последующем расщеплении системы уравнений второго порядка на две подсистемы уравнений первого порядка с желаемыми свойствами: устойчивую систему и неустойчивую систему, для которой строится управление и выход которой является входом для устойчивой системы. При расщеплении системы используется описанный ранее метод решения квадратного матричного уравнения [13]. Приводятся алгоритмы построения управления для механической системы в векторном и скалярном случае. Качество управления подтверждается результатами численного моделирования: в скалярном случае – управления перевернутым маятником, в векторном – управления двойным перевернутым маятником.

1. Постановка задачи слежения в общем случае. Рассмотрим систему вида

$$F(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{u}(t - h) \quad (1.1)$$

где $F: R^{3n} \rightarrow R^n$ – гладкое отображение, $\mathbf{x}(t)$ – n -мерная векторная функция, $\mathbf{u} \in R^n$ – вектор управления, R^n – n -мерное евклидово пространство, $h > 0$ – запаздывание по времени.

Систему (1.1) будем рассматривать вместе с начальной функцией

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \quad \text{при } t \in [-h, 0]; \quad \Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$$

Для описания класса обратных связей u введем в рассмотрение множество Q пар отображений $S: R^n \rightarrow R^k, G: R^k \rightarrow R^n$. Будем искать обратные связи в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t-h) &= G(\text{sign}S_1(\mathbf{x}(t-h)), \dots, \text{sign}S_k(\mathbf{x}(t-h))), \quad h > 0 \\ (S, G) &\in Q, \quad S = (S_1, \dots, S_k) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Предположим, что система должна осуществлять слежение за некоторым объектом. Для описания отслеживаемой траектории введем в рассмотрение отображение $\mathbf{x}^*(t): R \rightarrow R^n$, которое представляет собой вектор состояния отслеживаемого объекта. Задача слежения заключается в отыскании управления $\mathbf{u}(t-h)$, гарантирующего малое в некотором смысле отклонение решения системы (1.1) от отслеживаемой траектории в любой момент времени.

Определение. Будем говорить, что решение системы (1.1) отслеживает $\mathbf{x}^*(t)$, если для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдутся величины $\delta = \delta(\varepsilon)$, число $k \leq n$ и пара отображений $(S, G) \in Q$ такие, что при начальной функции $\Phi(t)$, удовлетворяющей условию $\|\Phi(0) - \mathbf{x}^*(0)\| < \delta$, для решения системы

$$F(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) = G(\text{sign}S_1(\mathbf{x}(t-h)), \dots, \text{sign}S_k(\mathbf{x}(t-h)))$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t), \quad -h \leq t \leq 0$$

справедливо неравенство

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

В качестве норм постоянной матрицы A и постоянного вектора \mathbf{b} примем

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|; \quad \|\mathbf{b}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i|$$

Для переменных матрицы $A(t)$ и вектора $\mathbf{b}(t)$ соответствующие нормы будут иметь вид

$$\|A\| = \max_{t \geq 0} \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|; \quad \|\mathbf{b}\| = \max_{t \geq 0} \max_{1 \leq i \leq n} |b_i|$$

2. Задача слежения для скалярной системы второго порядка.

Постановка задачи. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + u(t-h), \quad x \in R \tag{2.1}$$

где $f: R^2 \rightarrow R$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, u – запаздывающее управление. Пусть $\phi(t)$ – начальная функция, $\mathbf{x}^*(t)$ – отслеживаемая траектория. Необходимо указать ограничения, накладываемые на систему и объект слежения, а также по фиксированному $\varepsilon > 0$ и значению параметров подобрать управление в виде (1.2) таким образом, чтобы система отслеживала траекторию $\mathbf{x}^*(t)$ с ошибкой слежения, не превышающей ε .

Основная теорема. Преобразуем систему (2.1). Обозначим через $y(t) = x(t) - \mathbf{x}^*(t)$ ошибку слежения. В переменных y система (2.1) будет иметь вид

$$\ddot{y} = f(y + \mathbf{x}^*, \dot{y} + \dot{\mathbf{x}}^*) - \ddot{\mathbf{x}}^* + u(t-h), \quad y \in R \tag{2.2}$$

Линеаризуя последнюю систему, будем иметь

$$Ly \equiv \dot{y}(t) - a^*(t)\dot{y}(t) - b^*(t)y(t) = f^*(t) + g(y, \dot{y}) + u(t-h) \quad (2.3)$$

где

$$a^* = \partial f(x^*, \dot{x}^*)/\partial \dot{y}, \quad b^* = \partial f(x^*, \dot{x}^*)/\partial y, \quad f^*(t) = f(x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \dot{x}^*(t)$$

$g(y, \dot{y}) = o(y^2 + \dot{y}^2)$ – остаточный член разложения. Известно, что существует положительная постоянная N_1 , такая, что при $|y|^2 + |\dot{y}|^2 < v$ ($v > 0$) справедливо неравенство

$$|g(y, \dot{y})| \leq N_1(|y|^2 + |\dot{y}|^2) \quad (2.4)$$

При фиксированном t собственные значения оператора Ly имеют вид

$$\lambda_{1,2}(t) = [a^*(t) \pm \sqrt{(a^*(t))^2 + 4b^*(t)}]/2, \quad 0 \leq t \leq +\infty$$

Пусть собственные значения простые, вещественные и

$$\|\lambda_1(t)\| < \lambda_{\max} < +\infty, \quad \lambda_2(t) \leq -q < 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.5)$$

Будем рассматривать случай медленных движений x^* , что гарантирует малость $d\lambda_i(t)/dt$ ($i = 1, 2$). Обозначим $c_0 = 1 + 1/q$.

Лемма 1. Если для заданного $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$|\dot{y}(t) - \lambda_2(t)y(t)| < \varepsilon, \quad t \in [0, T] \quad (2.6)$$

то

$$|g(y(t), \dot{y}(t))| < N\varepsilon^2, \quad t \in [0, T]; \quad N = N_1(c_0^2 + (1 + \lambda_{\max}c_0)^2) \quad (2.7)$$

Доказательство. Из соотношения (2.6), учитывая обратное неравенство треугольника, заключаем, что справедлива оценка

$$|\dot{y}| < \varepsilon + \lambda_{\max}|y| \quad (2.8)$$

Оценивая решение системы

$$\dot{y}(t) - \lambda_2(t)y(t) = z(t); \quad y(0) = y_0 = \phi(0) - x^*(0) \quad (2.9)$$

с учетом второго неравенства (2.5), получим

$$|y| < e^{-qt}|y_0| + \int_0^t e^{-q(t-s)}|z(s)|ds < \left(e^{-qt} \frac{|y_0|}{\varepsilon} + \frac{1 - e^{-qt}}{q} \right) \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{q} \right) \varepsilon = c_0\varepsilon \quad (2.10)$$

Оценка (2.7) следует из оценок (2.4), (2.8), (2.10).

Перейдем непосредственно к построению управления. В силу малости $d\lambda_2(t)/dt$ левую часть уравнения (2.3) можно записать в виде $(d/dt - \lambda_1(t))(d/dt - \lambda_2(t))y(t)$. После замены

$$z(t) = \dot{y}(t) - \lambda_2(t)y(t)$$

получим следующую задачу:

$$\dot{z}(t) = \lambda_1(t)z(t) + f^*(t) + g + u(t-h), \quad t \geq 0 \quad (2.11)$$

$$z(t) = \phi_z(t) = (\dot{\phi} - \dot{x}^*) - \lambda_2(t)(\phi - x^*), \quad t \in [-h, 0]$$

Управление $u(t-h)$ будем искать в виде

$$u(t-h) = -p \operatorname{sign} z(t-h) \quad (2.12)$$

где $p > 0$ – параметр управления. Обозначим $\varepsilon_0 = \varepsilon/c_0$.

Теорема 1. Пусть задано число $\epsilon > 0$, справедливы соотношения (2.5) и следующие предположения:

1) существует такая положительная постоянная M , что

$$\|f^*(t)\| < M \tag{2.13}$$

2) начальная функция удовлетворяет неравенству

$$\max\{|y(0)|, |z(0)|\} < \delta \tag{2.14}$$

3) управление имеет вид (2.12);

4) величины λ_{\max} , M , δ удовлетворяют неравенствам

$$M < \frac{\lambda_{\max}}{2} \left(\frac{2 - e^{\lambda_{\max} h}}{e^{\lambda_{\max} h} - 1} - 2N\epsilon_0 \right) \epsilon_0 \tag{2.15}$$

$$\delta < \left(e^{-\lambda_{\max} h} - \left(\frac{2M}{\lambda_{\max} \epsilon_0} + \frac{2N\epsilon_0}{\lambda_{\max}} + 1 \right) (1 - e^{-\lambda_{\max} h}) \right) \epsilon_0$$

5) $p = \alpha' \epsilon_0$,

где

$$\lambda_{\max} + \frac{M}{\epsilon_0} + N\epsilon_0 < \alpha' < \lambda_{\max} \frac{\epsilon_0 - \delta e^{\lambda_{\max} h}}{\epsilon_0 (e^{\lambda_{\max} h} - 1)} - \frac{M}{\epsilon_0} - N\epsilon_0 \tag{2.16}$$

Тогда решение системы (2.1) отслеживает траекторию $x^*(t)$ посредством управления (2.12) с погрешностью слежения, не превосходящей ϵ .

Доказательство. Докажем, что

$$|z(t)| < \epsilon_0, \quad \forall t > 0 \tag{2.17}$$

Отметим, что последнее неравенство гарантирует оценку $|x(t) - x^*(t)| < c_0 \epsilon_0 = \epsilon$ (см. доказательство леммы 1), что доказывает теорему. Доказательство поведем от противного. Предположим, что существует момент времени $T > 0$, такой, что $|z(T)| = \epsilon_0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $z(T) > 0$ (случай $z(T) < 0$ доказывается аналогично). Тогда возможны два случая.

1°. Для любого момента времени $0 \leq t < T$ справедливо неравенство $0 < z(t) < \epsilon_0$. В таком случае из леммы 1, неравенства (2.13), уравнения (2.11) и ограниченности $\lambda_1(t)$ вытекает оценка

$$\dot{z}(t) \leq \lambda_{\max} z(t) + \delta_1, \quad \forall t \in [0, T]; \quad \delta_1 = M + N\epsilon_0^2 + \alpha' \epsilon_0$$

Учитывая неравенство (2.14), по лемме Гронуолла – Беллмана из последнего неравенства получаем в момент времени T

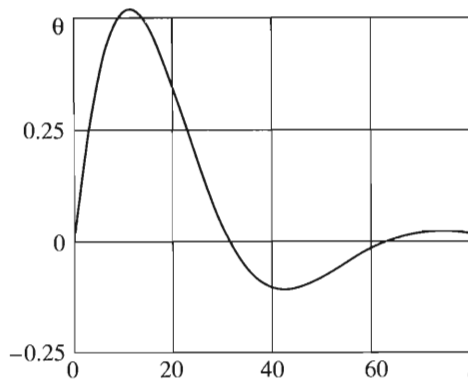
$$z(T) \leq (\delta + \delta_1 / \lambda_{\max}) e^{\lambda_{\max} T} - \delta_1 / \lambda_{\max}$$

Учитывая правое неравенство в (2.16), получаем

$$T \geq \frac{1}{\lambda_{\max}} \ln \frac{\lambda_{\max} \epsilon_0 + \delta_1}{\delta \epsilon_0 + \delta_1} > h$$

А это означает, что на отрезке $[h, T]$ справедлива оценка

$$\dot{z}(t) < \lambda_{\max} \epsilon_0 + \delta_1 - 2\alpha' \epsilon_0 < 0$$



Фиг. 1

если учесть левое неравенство в (2.16). Значит, $z(h) < \varepsilon_0$, и решение убывает на $[h, T]$. Отсюда $z(T) < \varepsilon_0$. Получили противоречие.

2°. Существует точка $t_0 < T$ такая, что $z(t_0) = \varepsilon_0$ и $0 < z(t) < \varepsilon_0$ для $t \in (t_0, T]$. Аналогично случаю 1° можно показать, что $z(T) < \varepsilon_0$. Снова получили противоречие.

Таким образом выполняется неравенство (2.17).

Алгоритм слежения. Суммируя сказанное выше, можно привести следующий алгоритм слежения для уравнения второго порядка. Предположим, что нам заданы максимальное запаздывание h в управлении, отслеживаемая траектория $x^*(t)$, удовлетворяющая условию (2.13) и первому условию (2.15), и начальная функция, удовлетворяющая условию (2.14) и второму условию (2.15). Алгоритм слежения выглядит следующим образом.

1°. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

2°. Находим $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$.

3°. Выбираем параметр управления, удовлетворяющий условию (2.16).

Задача слежения для перевернутого маятника. Уравнение управляемого перевернутого маятника имеет вид

$$\ddot{\theta}(t) + k\dot{\theta}(t) - p\sin\theta(t) = u(t-h), \quad p = \sqrt{gl} \quad (2.18)$$

где θ – угол отклонения маятника от вертикальной оси, k – коэффициент трения, l – длина маятника, u – управление, h – запаздывание.

Пусть $\theta^*(t)$ – отслеживаемая траектория. Тогда $a^*(t) = -k$, $b^*(t) = p\cos\theta^*(t)$. Собственные значения линеаризованной системы будут иметь вид

$$\lambda_{1,2}(t) = (-k \pm \sqrt{k^2 + 4p\cos\theta^*(t)})/2$$

Если подкоренное выражение положительно при всех t , то собственные значения линеаризованной системы ненулевые, простые и вещественные, причем $\lambda_2(t) \leq -q < 0$.

На фиг. 1 показан результат моделирования. Параметры имеют вид

$\theta^*(t) = \sin(0.1t)\exp(-0.05t)$, $k = 0.3$, $p = 0.04$, $h = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$, $\alpha' = 5.6$, $\phi(t) = 0.001$, $\lambda_{\max} = 0.1$, $q = 0.35$

Норма погрешности слежения равна 0.013.

3. Управление механической системой.

Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему вида

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}(t-h), \quad \mathbf{q} \in R^n \quad (3.1)$$

где \mathbf{q} – вектор обобщенных координат, $H(\mathbf{q})$ – матрица инерции масс звеньев, для нормы которой справедлива оценка

$$1/H^+ < \|H(\mathbf{q})\| < 1/H^-, \quad \mathbf{q} \in R^n; \quad 0 < H^- \leq H^+ \quad (3.2)$$

$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – матрица, включающая связь сил и моментов между массами, а также силы тяжести и трения, \mathbf{u} – вектор управления, $h > 0$ – постоянное запаздывание.

Обозначим через $\mathbf{q}^*(t) : R \rightarrow R^n$ вектор состояния отслеживаемого объекта. Будем полагать, что опорная траектория $\mathbf{q}^*(t)$ поступает на вход системы мгновенно (или с очень малым запаздыванием, которым можно пренебречь). Как и прежде будем полагать, что $\mathbf{q}^*(t)$ – медленное движение.

Пусть задана начальная функция $\Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$.

Следящая система может быть записана в виде

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}(t-h), \quad t > 0; \quad \mathbf{q}(t) = \Phi(t), \quad -h \leq t \leq 0 \quad (3.3)$$

Задача заключается в отыскании управления вида (1.2), обеспечивающего близость решения системы (3.3) к функции $\mathbf{q}^*(t)$.

Расщепление системы n уравнений второго порядка. Рассмотрим линейную систему

$$H\ddot{\mathbf{x}} + P\dot{\mathbf{x}} + W\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x} \in R^n; \quad \det H \neq 0 \quad (3.4)$$

где H, P, W – постоянные $(n \times n)$ -матрицы. Умножая обе части последнего уравнения слева на H^{-1} , получим

$$\ddot{\mathbf{x}} + H^{-1}P\dot{\mathbf{x}} + H^{-1}W\mathbf{x} = 0 \quad (3.5)$$

Пусть $\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)^T$. Переходя к системе $2n$ уравнений первого порядка, получим $\dot{\mathbf{y}} = M\mathbf{y}$, где M – блочная $(2n \times 2n)$ -матрица

$$M = \begin{vmatrix} O & I^n \\ -H^{-1}W & -H^{-1}P \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

Здесь O – нулевая $(n \times n)$ - матрица, I^n – единичная $(n \times n)$ -матрица.

Обозначим через $\sigma(M)$ спектр матрицы M . Пусть $\lambda_i \in \sigma(M)$ – вещественные собственные числа, лежащие в левой полуплоскости, а \mathbf{h}_i – соответствующие собственные векторы; $i = 1, 2, \dots, n$. Запишем \mathbf{h}_i в столбцы $(2n \times n)$ -матрицы U . Получим

$$U = (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n) = (U_1, U_2)^T$$

$$U_1 = \begin{vmatrix} h_1^1 & h_2^1 & \dots & h_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1^n & h_2^n & \dots & h_n^n \end{vmatrix}, \quad U_2 = \begin{vmatrix} h_1^{n+1} & h_2^{n+1} & \dots & h_n^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1^{2n} & h_2^{2n} & \dots & h_n^{2n} \end{vmatrix}$$

Лемма 2. Пусть все собственные значения матрицы M простые и пусть матрица U_1 обратима. Пусть

$$C_- = U_2 U_1^{-1}, \quad C_+ = -H^{-1}P - U_2 U_1^{-1} \quad (3.7)$$

Тогда система (3.5) представима в виде

$$(I^n d/dt - C_+)(I^n d/dt - C_-)\mathbf{x} = 0 \quad (3.8)$$

и справедливы соотношения

$$C_+ + C_- = -H^{-1}P, \quad C_+C_- = H^{-1}W \quad (3.9)$$

$$\sigma(C_+) \cup \sigma(C_-) = \sigma(M), \quad \sigma(C_-) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad (3.10)$$

Доказательство. Записывая систему (3.8) в виде

$$\ddot{\mathbf{x}} - (C_+ + C_-)\dot{\mathbf{x}} + C_+C_- \mathbf{x} = 0$$

и сравнивая с системой (3.5), получаем соотношения (3.9).

Из этих соотношений следует, что $X = C_-$ удовлетворяет квадратному матричному уравнению

$$X^2 + H^{-1}PX + H^{-1}W = 0 \quad (3.11)$$

Покажем, что матрица C_- , определяемая первым равенством (3.7), является решением этого уравнения. Рассмотрим матрицу (3.6) как матрицу оператора, действующего в пространстве R^{2n} . Подпространство L_n , натянутое на векторы $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$, является инвариантным этому оператору. Тогда для матрицы $M_L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ справедливо равенство

$$MU = UM_L$$

из которого, учитывая блочную структуру матриц M и U , заключаем, что выполняются равенства

$$U_2 = U_1M_L, \quad -H^{-1}WU_1 - H^{-1}PU_2 = U_2M_L$$

Умножая каждое из них справа на U_1^{-1} , получим

$$C_- = U_1M_LU_1^{-1}, \quad -H^{-1}W - H^{-1}PC_- = U_2M_LU_1^{-1} \quad (3.12)$$

Умножая первое равенство (3.12) слева на C_- и вычитая из полученного результата второе, приходим к равенству (3.11) при $X = C_-$. Из первого соотношения (3.9) следует, что $C_+ = -H^{-1}P - U_2U_1^{-1}$.

Докажем теперь соотношения (3.10). Учитывая, что $U_2 = U_1M_L$, получим $C_- = U_1M_LU_1^{-1}$. Отсюда вытекает второе соотношение (3.10). Преобразовав левую часть характеристического многочлена системы (3.5)

$$|\lambda^2 I^n + \lambda H^{-1}P + H^{-1}W| = |(\lambda I^n - C_+)(\lambda I^n - C_-)| = |\lambda I^n - C_+| |\lambda I^n - C_-| = 0$$

закключаем, что справедливо и первое соотношение (3.10).

Основная теорема. Умножая равенство (3.1) слева на $H^{-1}(\mathbf{q})$ и линеаризуя в полученном равенстве второе слагаемое в правой части в окрестности точки $Q = (\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*)$

$$H^{-1}(\mathbf{q})L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (f_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \dots, f_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))$$

придем к системе

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}(t) + P(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*)(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*) + W(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*)(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) &= \\ = -F^*(t) + g(\mathbf{q}, \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^*) + H^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{u}(t-h), \quad t \geq 0 & \\ F^*(t) = F(\mathbf{q}^*(t), \dot{\mathbf{q}}^*(t)) & \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$P(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j}(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) \right\|_{i,j=1}^n, \quad W(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) \right\|_{i,j=1}^n$$

g – остаточный член разложения.

Предположение 1. Матрица

$$M(t) = \left\| \begin{array}{cc} 0 & I^n \\ -W(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) & -P(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) \end{array} \right\|$$

невырождена при всех t .

Предположение 2. Спектр матрицы M состоит из простых, вещественных, ненулевых собственных значений, n из которых отрицательны.

Без ограничения общности можно считать, что отрицательны первые n собственных значений $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$. По лемме 2

$$C_-(t) = U_2(t)U_1^{-1}(t), \quad C_+(t) = -P(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) - U_2(t)U_1^{-1}(t) \quad (3.14)$$

где $U(t) = (U_1(t), U_2(t))^T$. Обозначим через $S_+(t)$ матрицу перехода к жорданову базису для матрицы $C_+(t)$.

Предположение 3. Для любого $\varepsilon > 0$ из неравенства $\|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^*(t)\| < \varepsilon$, следует

$$\|S_+^{-1}(t)H^{-1}(\mathbf{q}(t))H(\mathbf{q}^*(t))S_+(t) - I\| < \varepsilon, \quad t \geq 0$$

где I – единичная матрица соответствующей размерности.

Лемма 3. Пусть для фундаментальной матрицы $Y(t)$ однородной системы уравнений $\dot{\mathbf{y}}(t) = C_-(t)\mathbf{y}(t)$ справедливы оценки

$$\|Y(t)\| \leq K_1 e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0; \quad \|Y(t)Y^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\rho(t-s)}, \quad t \geq s \geq 0 \quad (3.15)$$

где K_1, K_2, σ, ρ – положительные постоянные. Тогда для решения задачи

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = C_-(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{r}(t); \quad \|\mathbf{r}(t)\| < \|S_+\|\varepsilon, \quad \mathbf{y}(0) = \Phi(0) - \mathbf{x}^*(0) \quad (3.16)$$

будет справедлива оценка

$$\|\mathbf{y}(t)\| < c_1 \varepsilon, \quad c_1 = K_1 + K_2 \|S_+\|/\rho, \quad t \geq 0 \quad (3.17)$$

Поскольку выполнено предположение 2, систему (3.13) можно представить в виде

$$\begin{aligned} (I^n d/dt - C_+(t))(I^n d/dt - C_-(t))(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) = \\ = F^*(t) - \ddot{\mathbf{q}}^*(t) + g(\mathbf{q}, \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^*) - (dC_-(t)/dt)(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) + H^{-1}(t)\mathbf{u}(t-h) \end{aligned}$$

Матрица $C_-(t)$ имеет отрицательные собственные значения (матрицы $C_+(t), C_-(t)$ определяются из соотношений (3.14)). После замены переменных

$$\mathbf{z}(t) = S_+^{-1}(t)(I^n d/dt - C_-(t))(\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^*(t))$$

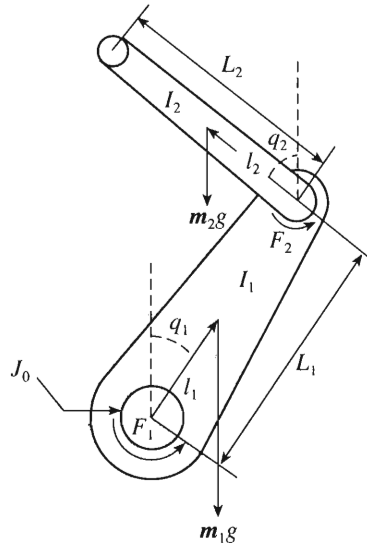
получим

$$\dot{\mathbf{z}} = J\mathbf{z} + S_+^{-1}[-F^*(t) - \ddot{\mathbf{q}}^*(t) + g_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^*) + H^{-1}\mathbf{u}(t-h)] \quad (3.18)$$

где

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g} - \frac{dC_-(t)}{dt}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) - \frac{dS_+(t)}{dt}\mathbf{z}$$

а $J(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ – жорданова форма матрицы $C_+(t)$



Фиг. 2

с начальными условиями

$$\mathbf{z}(t) = \Phi^z(t), \quad t \in [-h, 0]$$

Здесь

$$\mathbf{f}^z(t) = S_+^{-1}(t)(-\mathbf{F}^*(t) - \ddot{\mathbf{q}}^*(t)), \quad \mathbf{r}(t) = S_+^{-1} \mathbf{g}_1$$

\tilde{h}_{ij} – элементы матрицы $S_+^{-1} H^{-1}(\mathbf{q}) H(\mathbf{q}^*) S_+$.

Очевидно, $\|\mathbf{z}(t)\| < \epsilon$ при $t \geq 0$. Из леммы 3 вытекает, что

$$\|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^*(t)\| < c_1 \epsilon, \quad t \geq 0$$

Алгоритм слежения. Суммируя сказанное выше, можно привести следующий алгоритм слежения для механической системы. Пусть заданы максимальное запаздывание h в управлении системой и отслеживаемая траектория $\mathbf{q}^*(t)$. Пусть отслеживаемая функция удовлетворяет условиям (3.20), (3.24) а начальная функция – условиям (3.21), (3.25). Алгоритм выглядит следующим образом.

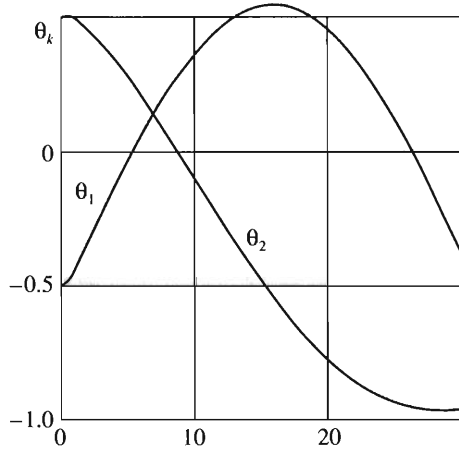
- 1°. Фиксируем $\epsilon > 0$.
- 2°. Находим собственные значения матрицы $M(t)$.
- 3°. Находим матрицы $C_-(t)$, $S_+(t)$.
- 4°. Выбираем α_i^l ($i = 1, 2, \dots, n$) из неравенств (3.26).

Задача слежения для двойного перевернутого маятника. Управляемое движение двойного перевернутого маятника (фиг. 2) описывается следующей системой [14]:

$$H\ddot{\boldsymbol{\theta}} + P\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{W} = \mathbf{F}; \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T, \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2)^T$$

Здесь

$$H = \begin{vmatrix} J_0 + I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 + I_2 \end{vmatrix}$$



Фиг. 3

$$P = \begin{vmatrix} 0 & \dot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ -\dot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} -g(m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \\ -g m_2 l_2 \sin \theta_2 \end{vmatrix}$$

где θ_k – угол между вертикальной осью и звеном маятника, m_k – масса звена, L_k – длина звена, l_k – расстояние от центра тяжести звена до точки опоры, I_k – момент инерции звена, J_0 – момент инерции вала привода, g – ускорение свободного падения, индекс $k = 1$ соответствует нижнему звену, $k = 2$ – верхнему звену.

Будем полагать, что верхнее звено также обладает приводом. Управляемыми будем считать крутящие моменты приводов F_1 и F_2 нижнего и верхнего звеньев соответственно.

Предположим, что максимальное запаздывание в системе $h = 0.03$, отслеживаемая функция имеет вид

$$\Theta^*(t) = \begin{vmatrix} \sin(0.1t) - 0.5, \\ \cos(0.1t)e^{-0.03t} - 0.5 \end{vmatrix}$$

начальная функция имеет вид $\Phi(t) = \Theta^*(t) + (0.001, 0.001)^T$.

Пусть механические параметры системы таковы:

$m_1 = 0.132$ кг, $m_2 = 0.088$ кг, $L_1 = 0.3032$ м, $L_2 = 0.3545$ м, $l_1 = 0.1274$ м, $l_2 = 0.1209$ м, $I_1 = 0.0562$ кг · м², $I_2 = 0.0314$ кг · м², $J_0 = 6 \cdot 10^{-6}$ кг · м², $g = 9.8$ м/с²

Параметры управления имеют вид

$$\lambda_{\max} = 2.42, \quad \varepsilon = 0.05, \quad \alpha'_1 = \alpha'_2 = 100.$$

На фиг. 3 приведены результаты моделирования. Норма погрешности слежения по координате θ_1 равна 0.02, по координате θ_2 – 0.025.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Недра, 1967. 335 с.
2. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974. 272 с.
3. *Долголенко Ю.В.* Скользящие режимы в релейных системах непрямого регулирования // Тр. 2-го Всесоюз. совещ. по теории автоматического регулирования. М.; Л.: Изд-во АН СССР. Т. 1. С. 421–438.
4. *Utkin V.I.* Sliding mode control design principles and applications to electric drives // IEEE Trans. Indust. Electronics. 1993. V. 40. № 1. P. 23–36.
5. *Slotine J.J., Sastri S.S.* Tracking control on nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators // Intern. J. Control. 1983. V. 38. № 2. P. 465–492.
6. *Стрыгин В.В., Фридман Л.М., Поляков А.Е.* Локальная стабилизация релейных систем с запаздыванием // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 5. С. 603–605.
7. *Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 67–81.
8. *Мухаметзянов И.А.* Построение систем с асимптотически устойчивыми программными связями // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 822–830.
9. *Черноусько Ф.Л.* Управляемые движения двузвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 578–591.
10. *Манита Л.А.* Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задачах управления манипуляторами // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 19–28.
11. *Уткин В.А.* Задачи управления асинхронным электроприводом // Автоматика и телемеханика. 1993. № 12. С. 53–65.
12. *Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С.* Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978. 416 с.
13. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 190 с.
14. *Ledgerwood T., Misawa E.* Controllability and nonlinear control of rotation inverted pendulum // Ed. E.A. Misawa. ASME. Winter Ann. Meeting Anaheim, Calif. 1992. V. 43. P. 81–88.

Воронеж
e-mail: mefremov@relex.ru

Поступила в редакцию
10.IV.2003