УДК (531.36;62–50):534.1

© 2005 г. Л. Д. Акуленко

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Рассматривается задача оптимального управления колебаниями при помощи малых управляющих воздействий. Предполагается, что в первом приближении метода усреднения изменения медленного фазового вектора не происходит. Разработана схема усреднения второй степени, позволяющая решить задачу управления на интервале времени, длина которого обратно пропорциональна квадрату малого параметра, т.е. на "удлиненном интервале времени". Получены оценки точности по фазовой траектории, краевым условиям, функционалу и управлению. Приведены результаты для частного случая линейно-квадратической задачи управления с периодическими коэффициентами. Рассмотрены модельные примеры управления фазой и амплитудой нелинейных колебательных систем.

1. Постановка задачи. Метод усреднения [1, 2] эффективен при исследовании слабоуправляемых колебательных систем [3]. Однако ряд задач динамики и управления часто приводит к нестандартной ситуации, когда описываемая система уравнений для оскулирующих переменных имеет вид

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 F(t, x, u), \quad x(t_0) = x^0, \quad |\varepsilon| \le \varepsilon_0 \tag{1.1}$$

Здесь X, F – 2π-периодические кусочно-непрерывные функции аргумента (времени) t, $t \ge t_0$, достаточно гладкие по фазовому n_x-вектору x и управляющему n_u-вектору u; возможная непрерывная зависимость от малого параметра ε не указывается для краткости. Области допустимых значений $x \in D_x$, $u \in D_u$ могут быть ограниченными или неограниченными, открытыми или (и) замкнутыми [1–3].

Известно, что в первом приближении метода усреднения эволюция медленного вектора x определяется свойствами первого слагаемого εX в системе (1.1). Существенное изменение $\Delta x = |x - x^0| \sim 1$ при изменении аргумента $\Delta t = t - t_0 \sim 1/\varepsilon$ имеет место, если среднее $\langle X \rangle$ по t функции X не равно нулю тождественно (и при этом $\langle X(t, x^0) \rangle \ne 0$). В противном случае $\Delta x \sim \varepsilon$ для $\Delta t \sim 1/\varepsilon$.

Рассмотрим управляемую систему (1.1) при условии $\langle X \rangle \equiv 0$. Тогда можно установить с помощью простых оценок, что представляющее интерес существенное изменение переменной x в ситуации общего положения может произойти на "удлиненном" интервале времени $\Delta t \sim \varepsilon^{-2}$. Стандартная процедура метода усреднения неприменима на указанном интервале, требуется разработка модифицированного подхода и его обоснование при помощи методов многомасштабных разложений [4] или усреднения [5]. Такая процедура для задачи Коши изложена и протестирована [5] решением содержательных задач механики для случая неуправляемой системы (1.1), когда $u \equiv 0 \in D_u$. Она также применима, если известна и задана функция управления $u = u^*(t, x)$, которая является 2π-периодической по t и гладкой по $x \in D_x$.

Кратко изложим схему построения решения первого приближения (с погрешностью $O(\varepsilon)$) второй степени (на интервале времени $\Delta t \sim \varepsilon^{-2}$).

Схема усреднения второй степени [5] предлагает стандартную замену x на y, близкую к тождественной [1–6], и приведение задачи Коши (1.1) к специальному виду с коэффициентом ε^2 в правой части уравнения для y

$$x = y + \varepsilon X^0(t, y), \quad X^0(t, y) \equiv \int_{t_0}^{t} X(s, y)ds, \quad X^0(t + 2\pi, y) \equiv X^0(t, y)$$

$$\dot{y} = \varepsilon^2 Y(t, y) + \varepsilon^3 W(t, y), \quad y(t_0) = x^0, \quad y \in D_x \tag{1.2}$$

$$Y(t, y) \equiv X'_y(t, y)X^0(t, y) + F^*(t, y), \quad F^*(t, y) \equiv F(t, y, u^*(t, y))$$

Функции Y, W получаются стандартным образом в результате дифференцирования по t замены (1.2) с учетом уравнения (1.1) при $F = F^*$. Выражение для функции W через X, X^0, F^* не выписывается вследствие громоздкости. Следует отметить, что она 2π-периодическая по t, достаточно гладкая и ограниченная по $y \in D_x$ и может непрерывно зависеть от ε.

Далее рассматривается задача Коши (1.2) на интервале $\Delta t \sim \varepsilon^{-2}$. Установлено [5], что эволюция системы определяется усеченным усредненным уравнением и начальным условием вида

$$\xi^{\bullet} = Y_0(\xi), \quad \xi(\tau_0) = x^0, \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad \Delta\tau = \tau - \tau^0 \sim 1, \quad Y_0(y) \equiv \langle Y(t, y)\rangle \tag{1.3}$$

Точкой сбоку обозначена производная по медленному аргументу ("времени") τ. Система (1.3) существенно проще для аналитического и численного исследования, чем (1.2). Она не содержит явно времени (автономна), а ее решение $\xi \in D_x$ зависит от $\Delta\tau$. Конечно, при этом предполагается, что функция $Y_0(\xi)$ строится достаточно просто.

Доказано [5], что между решениями задач Коши (1.1)–(1.3) имеет место ε-близость на рассматриваемом удлиненном промежутке времени $\Delta t \sim \varepsilon^{-2}$

$$\begin{aligned} &\left|x(t, t_0, x^0, \varepsilon) - \xi(\Delta\tau, x^0)\right| \le \varepsilon C; \quad 0 \le \Delta t \le L\varepsilon^{-2}, \quad x, y, \xi \in D_x \\ &\left|y(t, t_0, x^0, \varepsilon) - \xi(\Delta\tau, x^0)\right| \le \varepsilon C; \quad L, C = \text{const} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Постоянная C определяется конструктивно [5] на основе леммы Гронуолла.

Уточнение приближенного решения ξ проводится стандартным образом при помощи процедуры метода усреднения с учетом явного выражения функции W. При этом, однако, требуется более высокая степень гладкости функций X, F^*. В дальнейшем ограничимся построением и исследованием решения ξ первого приближения второй степени, т.е. с погрешностью $O(\varepsilon)$ на удлиненном интервале $\Delta t \sim \varepsilon^{-2}$.

Изложенную процедуру естественно применить для приближенного решения задач оптимального управления движениями колебательной системы (1.1), которая в рамках стандартного подхода [3] слабо управляема: $\Delta x \sim \varepsilon$ при $\Delta t \sim \varepsilon^{-1}$ для ограниченных воздействий u, $|u| \sim 1$. Рассмотрим представляющие прикладной интерес постановки задач с интегральным функционалом J на фиксированном интервале времени $t \in [t_0, t_f]$ вида

$$\begin{aligned} &J[u] \to \min_u, \quad u \in U \\ &J = J_1[u] \equiv g(x(t_f)) + \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_f} G(t, x, u)dt \quad (\text{задача } 1) \\ &g(x(t_f)) = 0, \quad J = J_2[u] \equiv \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_f} G(t, x, u)dt, \quad t_f = \frac{\Theta}{\varepsilon^2} \quad (\text{задача } 2) \\ &\varepsilon^2 t_0 = \tau_0 \sim 1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь G – скалярная в обеих задачах функция, 2π-периодическая по t и достаточно гладкая относительно x, u. Множитель ε^2 перед интегралами в (1.5) взят с целью нормировки: при $G \sim 1$ соответствующие члены будут также величинами порядка единицы. Функция g – скаляр в задаче 1 и n_2-вектор в задаче 2; она характеризует требования к конечным значениям фазового вектора $x(t_f)$ и предполагается достаточно гладкой. В частности, функция g определяет меру требуемого значения $x(t_f) = x^f$ (величина x^f задана):

$$g \equiv (x(t_f) - x^f)^T N_1(x(t_f) - x^f) \text{ в задаче 1}$$
$$g \equiv N_2(x(t_f) - x^f) \text{ в задаче 2} \tag{1.6}$$

Здесь N_1 – $(n_x \times n_x)$-матрица (симметричная), предполагаемая неотрицательно определенной, N_2 – $(n_2 \times n_x)$-матрица, где $1 \le n_2 \le n_x$; при $n_2 = n_x$ и $\det N_2 \ne 0$ второе условие (1.5) согласно выражениям (1.6) принимает вид $x(t_f) = x_f$, что соответствует двухточечной задаче управления [3, 6].

Итак, далее рассматриваются задачи оптимального управления (1.1), (1.5). Требуется построить приближенные решения с погрешностью $O(\varepsilon)$ по траектории x и функционалам J. В случае гладкого (нерелейного) управления u оно должно быть построено с погрешностью $O(\varepsilon)$ в виде программы $u_p(t)$ или синтеза $u_s(t, x)$. Для релейного управления указанная близость должна иметь место по интегральной метрике или соответствующему функционалу [3].

2. Приближенное решение задач оптимального управления. Применим необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума [6] (аналогично указанному ранее [3])

$$H = \varepsilon(X, p) + \varepsilon^2[(F, p) - G] \to \max_u, \quad u \in U$$
$$u = u^*(t, x, p), \quad H^* = \varepsilon(X, p) + \varepsilon^2[(F^*, p) - G^*] \tag{2.1}$$

Здесь H – функция Гамильтона управляемой системы (1.1), (1.5), p – сопряженная фазовому вектору x переменная (импульс). Функция u^* определяется из условия максимума (2.1); она является 2π-периодической или продолжаемой периодически функцией t. По переменным x, p в некоторой области $(x, p) \in D_x \times D_p$ требуется гладкость, а по времени t можно ограничиться свойством кусочной гладкости или непрерывности [3].

Исходная фазовая переменная x и импульс p находятся из решения краевой задачи принципа максимума с соответствующими (1.1), (1.5) условиями при $t = t_0$, t_f:

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 F^*(t, x, p), \quad x(t_0) = x^0$$
$$\dot{p} = -\varepsilon(X, p)'_x - \varepsilon^2[(F, p)'_x - G'_x]^*, \quad t_0 \le t \le t_f = \Theta\varepsilon^{-2} \tag{2.2}$$

$$p(t_f) = -g'_x(x(t_f)) \text{ в задаче 1}$$
$$g(x(t_f)) = 0, \quad p(t_f) = (\lambda, g(x(t_f)))'_x \text{ в задаче 2} \tag{2.3}$$

Здесь λ – n_2-вектор множителей Лагранжа, которые вычисляются совместно с $2n_x$ постоянными интегрирования гамильтоновой системы (2.2).

Исследование краевых задач (2.2), (2.3) представляется весьма затруднительным в аналитическом и численном аспектах.

Правые части уравнений (2.2) периодичны по t, что позволяет применить процедуру замены, аналогичную (1.2), (1.3) (принцип усреднения). Поскольку по предположению $\langle X\rangle \equiv 0$, то при условии гладкости $\langle (X, p)'_x \rangle \equiv 0$. Посредством совместной замены $(x, p) \to (y, q)$ вида (1.2)

$$x = y + \varepsilon X^0(t, y), \quad p = q - \varepsilon(q, X_y^{0'}(t, y)) \tag{2.4}$$

уравнения (2.2) приводятся к виду, аналогичному (1.3),

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varepsilon^2 Y(t, y, q) + \varepsilon^3 \Delta Y, \quad Y \equiv X'_y X^0 + F^* \\ \dot{q} &= \varepsilon^2 Q(t, y, q) + \varepsilon^3 \Delta Q, \quad Q \equiv -(q, X''_{y^2} X^0) + (q, X^0)'_y - [(q, F)'_y - G'_y]^* \end{aligned} \tag{2.5}$$

Далее члены $O(\varepsilon^3)$ в (2.5) отбрасываются, поскольку они приводят к погрешности $O(\varepsilon)$ искомого решения для $\Delta t \sim \varepsilon^{-2}$. Это допущение заведомо выполняется, если функции Y, Q удовлетворяют условиям Липшица, а ΔY, ΔQ равномерно ограничены в некоторой области $y \in D_x$, $q \in D_p$. Оценка погрешности проводится с помощью интегрального неравенства (леммы Гронуолла). Отметим, что замена (2.4) и система (2.5) не канонические.

Приближенная процедура метода усреднения заключается в отбрасывании возмущений $O(\varepsilon^3)$ и усреднении функций Y, Q по явно входящему времени t. Эта операция аналогична замене [5]

$$\begin{aligned} y &= \xi + \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t} [Y(t', \xi, \eta) - Y_0(\xi, \eta)] dt', \quad Y_0 = \langle Y \rangle \\ q &= \eta + \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t} [Q(t', \xi, \eta) - Q_0(\xi, \eta)] dt', \quad Q_0 = \langle Q \rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

в уравнениях (2.5) и отбрасыванию в системе для ξ, η членов $O(\varepsilon^3)$. В результате получается усредненная система уравнений, позволяющая избавиться от множителя ε^2,

$$\xi^{\bullet} = Y_0(\xi, \eta), \quad \eta^{\bullet} = Q_0(\xi, \eta), \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad \tau_0 \le \tau \le \Theta \tag{2.7}$$

Автономная система (2.7) должна быть проинтегрирована на интервале изменения медленного времени порядка единицы, что существенно упрощает вычисления. Заметим, что хотя укороченная система (2.5) негамильтонова, усредненная система (2.7) будет канонической с функцией Гамильтона

$$H_0(\xi, \eta, \varepsilon) = \varepsilon^2 h(\xi, \eta), \quad h \equiv (\eta, \langle X'_\xi X^0 + F^* \rangle) - \langle G^* \rangle \tag{2.8}$$

Это свойство устанавливается построением схемы канонического усреднения второго по ε приближения [3] для системы (2.2). Оно может быть также получено предварительным преобразованием типа (1.2) переменной x в исходной задаче оптимального управления (1.1), (1.5) (см. ниже, формулы (2.12)–(2.14)).

Итак, далее интегрируется аналитически или численно система канонических уравнений (2.7), для которой имеет место интеграл $h = \text{const}$, см. (2.8). Решение $\xi(\tau, x^0, p^0)$, $\eta(\tau, x^0, p^0)$ соответствующего семейства задач Коши ($p^0 \in D_p$ – неизвестный параметр) при условии $(\xi, \eta) \in D_x \times D_p$ для $\tau_0 \le \tau \le \Theta$ удовлетворяет условиям ε-близости типа (1.4)

$$(|x - \xi| + |p - \eta|) \le C\varepsilon; \quad t_0 \le t \le \Theta\varepsilon^{-2}$$

$$(|y - \xi| + |q - \eta|) \le C\varepsilon; \quad \Theta, C = \text{const}$$

Если при фиксированном x^0 семейство решений ξ, η, зависящих от параметра p^0, построено, то неизвестные p^0 или (p^0, λ), определяющие решения краевых задач 1 или 2 соответственно, находятся из системы конечных уравнений

$$\eta(\Theta, x^0, p^0) = -q'_x(\xi(\Theta, x^0, p^0)), \quad p^0 = p^0(\Theta, x^0) \text{ в задаче 1}$$

$$g(\xi(\Theta, x^0, p^0)) = 0, \quad \eta(\Theta, x^0, p^0) = (\lambda, g(\xi(\Theta, x^0, p^0))'_x \text{ в задаче 2} \tag{2.9}$$

$$p^0 = p^0(\Theta, x^0), \quad \lambda = \lambda(\Theta, x^0)$$

Считается, что корни p^0 или (p^0, λ) уравнений (2.9) определены и являются простыми, т.е. якобианы неявных функций для рассматриваемых x^0, Θ отличны от нуля для найденных значений. Тогда можно аналогично сказанному ранее [3] утверждать следующее.

Теорема. Решения краевых задач (2.2), (2.3) и (2.7), (2.9) ε-близки по траекториям, а также краевым условиям. Стационарные значения функционала J (1.5) будут также близкими, если вместо x, u подставить приближенные выражения

$$x = \xi(\tau, x^0, p^0), \quad u = u^*(t, \xi, \eta) \tag{2.10}$$

Имеем

$$|J[u^*(t, x, p)] - J[u^*(t, \xi, \eta)]| \le C\varepsilon$$

При наличии нескольких корней p^0 или (p^0, λ) критерием отбора служит величина функционала J. Близость решений точной и приближенной задач по управлению имеет место в случае равномерной гладкости функции u^* по x, p.

Примерами таких постановок являются линейно квадратичные задачи с 2π-периодическими по t коэффициентами без ограничений на управления [3] (см. разд. 3 и примеры в разд. 4). Выражения u^* (2.10) как функции времени зависят 2π-периодически от t и некоторым образом от медленного аргумента $\tau = \varepsilon^2 t$ посредством функций ξ, η. Полная зависимость от аргументов и введенных параметров имеет вид программного управления u_p и синтеза u_s

$$\begin{aligned} u^* &= u_p(t, \tau - \tau_0, \Theta - \tau_0, x^0), \quad t_0 \le t \le \Theta\varepsilon^{-2} \\ u^* &= u_s(t, 0, \Theta - \tau, x), \quad t_0 \le t < \Theta\varepsilon^{-2} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Управляющие воздействия (2.11) обладают явно выраженными резонансными свойствами по (быстрому) исходному времени t [3].

Отметим, что к гамильтоновой системе (2.2) может быть применена каноническая замена переменных $(x, p) \to (y, q)$ [2, 3] вместо стандартной типа (2.4). Построение производящей функции и формулы замены весьма громоздки. Поэтому представляется более предпочтительным подход, описанный в разд. 1, связанный с заменой (1.2). В задаче управления уравнение (1.1) приводится к виду

$$\dot{y} = \varepsilon^2 X'_y(t, y) X^0(t, y) + \varepsilon^2 F(t, y, u) + \varepsilon^3 W(t, y, u) \tag{2.12}$$

с соответствующими преобразованиями краевых условий и функционалов (1.5). В первом приближении по ε они сохраняют старую форму, в которой переменная x заменяется на y. Умножая скалярно правую часть уравнения (2.12) на сопряженный вектор q, вычитая функцию $G(t, y, u)$ и проводя операцию максимизации по $u \in U$, получим в первом приближении выражение для u^*, совпадающее с (2.1), в котором $x \to y$, $p \to q$. Таким образом, гамильтоновой будет система с функцией

$$H^*(t, y, q, \varepsilon) = \varepsilon^2(q, (X'_y(t, y)X^0(t, y) + F^*(t, y, q))) - \varepsilon^2 G^*(t, y, q)$$
$$F^* = F(t, y, u^*), \quad G^* = G(t, y, u^*), \quad u^* = u^*(t, y, q) \tag{2.13}$$

Усредненный гамильтониан первого приближения имеет вид (2.8)

$$\langle H^*\rangle = \varepsilon^2 h, \quad h = (q, (\langle X'_y X^0\rangle + \langle F^*\rangle)) - \langle G^*\rangle, \quad h = \text{const} \tag{2.14}$$

Он постоянен на траекториях усредненной системы. В задачах управления механическими колебательными системами явная зависимость функции u^* (2.1) от времени (или фазы) t осуществляется, как правило, посредством функции F (1.1). Подынтегральная функция G в (1.5) может не зависеть явно от t, что обычно имеет место в прикладных задачах, см. примеры в разд. 4.

Изложенный выше подход позволяет существенно расширить применимость асимптотических методов к задачам динамики и управления колебательными системами [3, 5]. Наряду со схемой усреднения второй степени могут быть рассмотрены схемы более высоких степеней [5], когда порядки по степеням ε возмущающих и управляющих воздействий сильно различаются. Задачи остаются весьма содержательными с позиций применения асимптотических методов в случае, когда функции F, G не зависят явно от времени t. По аналогии с изложенным выше подходом исследуются задачи с нефиксированным моментом времени t_f окончания процесса управления. При этом постановки задач должны соответствовать рассматриваемому интервалу $\Delta t \sim \varepsilon^{-2}$. Например, в задачах типа оптимального быстродействия предполагается, что $F \sim \varepsilon^2 u$, где управление u принадлежит ограниченной области U.

3. Линейно-квадратические задачи управления колебаниями. Рассмотрим линейный аналог управляемой системы (1.1) с соответствующими краевыми условиями и интегральными квадратическими функционалами $J_{1,2}$ (1.5), (1.6) вида

$$\begin{gathered}
\dot{x} = \varepsilon A(t)x + \varepsilon^2[C(t)x + B(t)u], \quad x(t_0) = x^0, \quad |u| < \infty \\
J_1[u] = \frac{1}{2}(x - x^f)^T N_1(x - x^f)\big|_{t_f} + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^T G(t)u\,dt \quad \text{в задаче 1} \\
N_2(x - x^f)\big|_{t_f} = 0, \quad J_2[u] = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^T G(t)u\,dt \quad \text{в задаче 2} \\
t_0 \le t \le t_f = \Theta\varepsilon^{-2}
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь G – положительно определенная (симметричная) $(n_u \times n_u)$-матрица, B – $(n_x \times n_u)$-матрица. Матрицы A, B, C, G зависят 2π-периодически от времени. Согласно сказанному в разд. 1, 2 предполагается, что $\langle A\rangle = 0$, т.е. $A^0(t)$ – 2π-периодическая матрица.

Сперва используем точный по степеням ε подход, описанный в разд. 1, связанный с предварительным преобразованием вектора $x \to y$. Вновь получим линейно квадратические задачи управления

$$x = [E + \varepsilon A^0(t)]y, \quad A^0 = \int_{t_0}^{t} A(t')dt', \quad y(t_0) = x(t_0) = x^0$$

$$\dot{y} = \varepsilon^2 C_\varepsilon(t)y + \varepsilon^2 B_\varepsilon(t)u, \quad y^f = [E + \varepsilon A^0(t_f)]^{-1}x^f$$

$$C_\varepsilon(t) = (E+\varepsilon A^0)^{-1}(AA^0 + C), \quad B_\varepsilon(t) = (E+\varepsilon A^0)^{-1}B \tag{3.2}$$

$$J_1[u] = \frac{1}{2}(y-y^f)^T N_1^\varepsilon(y-y^f)\big|_{t_f} + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^T G(t)u dt \quad \text{в задаче 1}$$

$$N_2^\varepsilon(y-y^f)\big|_{t_f} = 0, \quad J_2[u] = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^T G(t)u dt \quad \text{в задаче 2}$$

Матрицы $N_{1,2}^\varepsilon$ получаются стандартными алгебраическими операциями и зависят от параметров ε, t_f, причем $N_{1,2}^\varepsilon = N_{1,2} + O(\varepsilon)$.

Применим к задачам (3.2) необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума [3, 6]. Аналогично выражениям (2.1) имеем точные выражения

$$\begin{gathered} u = u^*(t,y,q,\varepsilon) \equiv G^{-1}(t)B_\varepsilon^T(t)q, \quad H_\varepsilon^*(t,y,q,\varepsilon) = \varepsilon^2 h_\varepsilon(t,y,q) \\ h_\varepsilon \equiv q^T C_\varepsilon(t)y + \frac{1}{2}q^T R_\varepsilon(t)q, \quad R_\varepsilon(t) = B_\varepsilon(t)G^{-1}(t)B_\varepsilon^T(t) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Соответствующие задаче (3.2) линейные краевые задачи принципа максимума в точной по степеням ε постановке приводятся к виду

$$\begin{gathered} \dot y = \varepsilon^2 C_\varepsilon(t)y + \varepsilon^2 R_\varepsilon(t)q, \quad \dot q = -\varepsilon^2 C_\varepsilon^T(t)q \\ q(t_f) = -N_1^\varepsilon(y(t_f) - y^f) \quad \text{в задаче 1} \\ N_2^\varepsilon(y(t_f)-y^f) = 0, \quad q(t_f) = \lambda^T N_2^\varepsilon \quad \text{в задаче 2} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Уравнение для импульса q (3.4) интегрируется независимо от фазового вектора y. Приближенное решение ξ, η гамильтоновой системы (3.4) на интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$ может быть построено с заданной точностью по степеням величины ε. С погрешностью $O(\varepsilon)$ оно описывается соотношениями

$$\begin{gathered} \xi^\bullet = (\langle AA^0\rangle + \langle C\rangle)\xi + \langle BG^{-1}B^T\rangle\eta \\ \xi(\tau_0) = x^0; \quad \eta^\bullet = -(\langle AA^0\rangle + \langle C\rangle)\eta \\ \eta(\Theta) = -N_1(\xi(\Theta) - x^f) \quad \text{в задаче 1} \\ N_2(\xi(\Theta) - x^f) = 0, \quad \eta(\Theta) = \lambda^T N_2 \quad \text{в задаче 2} \end{gathered} \tag{3.5}$$

Точкой обозначена производная по медленному времени $\tau = \varepsilon^2 t$; переменная (аргумент) τ изменяется на интервале $\varepsilon^2 t_0 = \tau_0 \le \tau \le \Theta = \varepsilon^2 t_f$.

Система (3.5) с постоянными коэффициентами интегрируется алгебраическими методами либо численно. Она допускает первый интеграл

$$\langle h_0\rangle = \eta^T(\langle AA^0\rangle + \langle C\rangle)\xi + \frac{1}{2}\eta^T\langle B^T G^{-1}B\rangle\eta = \text{const} \tag{3.6}$$

Отметим, что если матрицы A, A^0 коммутируют (в частности, являются диагональными), то $\langle AA^0\rangle = 0$. Действительно, согласно соотношениям (3.2) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A^0A^0) = \frac{1}{2}AA^0 + \frac{1}{2}A^0A = AA^0(=A^0A)$$

откуда следует утверждение. Решение задачи (3.5) становится элементарным при $\langle C\rangle = 0$, так как

$$\xi = x^0 + \langle R_0\rangle\eta(\tau - \tau_0), \quad \eta = \text{const} \tag{3.7}$$

Для разрешимости краевых условий требуется невырожденность соответствующих матриц $M_{1,2}$

$$M_1 = E + N_1\langle R_0\rangle(\Theta - \tau_0) \quad \text{в задаче 1}$$
$$M_2 = \left\| \begin{matrix} N_2^T\langle R_0\rangle(\Theta - \tau_0) & 0 \\ 0 & -N_2 \end{matrix} \right\| \quad \text{в задаче 2} \tag{3.8}$$

В силу сделанных предположений матрица M_1 является симметричной и положительно определенной, т.е. невырожденной. Матрица M_2 будет также обратимой, если $\det(N_2^T\langle R_0\rangle N_2) \neq 0$, что и предполагается.

Изложим кратко схему метода усреднения второй степени применительно к исходным задачам (3.1). Согласно соотношениям (2.1) получим точные выражения для оптимального управления u^* и функции Гамильтона H^*

$$u = u^*(t, x, p) = G^{-1}(t)B^T(t)p, \quad R(t) \equiv B(t)G^{-1}(t)B^T(t)$$
$$H^*(t, x, p, \varepsilon) = \varepsilon p^T A(t)x + \varepsilon^2\left[p^T C(t)x + \frac{1}{2}p^T R(t)p\right] \tag{3.9}$$

Краевые задачи принципа максимума имеют аналогичный (2.2) вид

$$\dot{x} = \varepsilon Ax + \varepsilon^2(Cx + Rp), \quad x(t_0) = x^0, \quad \dot{p} = -\varepsilon A^T p - \varepsilon^2 C^T p$$
$$p(t_f) = -N_1(x(t_f) - x^f) \quad \text{в задаче 1} \tag{3.10}$$
$$N_2(x(t_f) - x^f) = 0, \quad p(t_f) = \lambda^T N_2 \quad \text{в задаче 2}$$

Совершим в гамильтоновой системе (3.10) преобразование типа (2.4), позволяющее избавиться от членов $O(\varepsilon)$; получим выражения

$$x = y + \varepsilon A^0(t)y, \quad p = q - \varepsilon A^{0T}(t)q$$
$$\dot{y} = \varepsilon^2 C_\varepsilon^+ y + \varepsilon^2(E + \varepsilon A^0)^{-1}R(E - \varepsilon A^{0T})q \tag{3.11}$$
$$\dot{q} = -\varepsilon^2 C_\varepsilon^{-T} q, \quad C_\varepsilon^\pm = C_0^\pm + \varepsilon\Delta C_\varepsilon^\pm, \quad C_0^+ \neq C_0^-$$

Матрицы $C_\varepsilon^\pm(t)$ получаются стандартными операциями через $A(t)$, $A^0(t)$, $C(t)$. Как отмечалось в разд. 1, замена $(x, p) \to (y, q)$ (3.11) не является канонической как в точном смысле, так и при игнорировании членов $O(\varepsilon^3)$ в уравнениях. Таким образом, рассматривая системы первого приближения (без учета членов $O(\varepsilon^3)$), отвечающие (3.4), (3.11), получим различные представления. Уравнения (3.4) гамильтоновы в любом порядке приближения по степеням ε. Напротив, замена и система (3.11) не являются каноническими, так как

$$C_0^+ = AA^0 + C = C_0, \quad C_0^- = -A^0A + C$$

Однако при усреднении по t можно доказать, что $\langle C_0^+ \rangle = \langle C_0^- \rangle$, что устанавливается интегрированием выражений AA^0 или A^0A по частям. Аналогичное свойство гамильтоновости усредненных систем в первом приближении по ε отмечено в разд. 2 для общего случая нелинейных функций X, F, G.

4. Примеры. Рассмотрим модельные задачи оптимального управления на удлиненном интервале времени для колебательных систем с одной степенью свободы.

1°. *Управление фазой колебаний посредством параметрического воздействия.* На основе методики, изложенной в разд. 2, исследуем систему вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon w(x, \dot{x}) + \varepsilon^2 f(x, \dot{x})u, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^0 \tag{4.1}$$

Здесь εw – возмущение, предполагаемое далее низкочастотным, $\varepsilon^2 fu$ – управляющее воздействие, u – управление, подлежащее определению. Без ограничения общности положим частоту ω равной единице и приведем уравнение (4.1) к виду системы с вращающейся фазой

$$x = a\sin\psi, \quad \dot{x} = a\cos\psi, \quad a(0) = a^0, \quad \psi(0) = \psi^0$$

$$\dot{a} = \varepsilon A(a, \psi) + \varepsilon^2 K(a, \psi)u, \quad A = w\cos\psi, \quad K = f\cos\psi \tag{4.2}$$

$$\dot{\psi} = 1 + \varepsilon\Psi(a, \psi) + \varepsilon^2\Lambda(a, \psi)u, \quad \Psi = -(w/a)\sin\psi, \quad \Lambda = -(f/a)\sin\psi$$

Возьмем для простоты функцию $w = \gamma a$, а коэффициент $f = \beta x$, где γ, β – постоянные. В результате уравнение для ψ (4.2) отделится и после введения медленной переменной $\varphi = \psi - t$ приводится к стандартной форме

$$\dot{\varphi} = -\varepsilon\gamma\sin(t + \varphi) - \varepsilon^2\beta u\sin^2(t + \varphi), \quad \varphi(0) = \psi^0 \tag{4.3}$$

Для системы (4.3) ставятся задачи оптимального управления типа (1.5)

$$J_1[u] = \frac{1}{2}k\varphi^2(t_f) + \varepsilon^2 I[u], \quad I[u] = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2 dt \quad \text{(в задаче 1)}$$
$$\varphi(t_f) = 0, \quad J_2[u] = \varepsilon^2 I[u], \quad t_f = \Theta\varepsilon^{-2}, \quad |u| < \infty \quad \text{(в задаче 2)} \tag{4.4}$$

Здесь $k > 0$ – весовой коэффициент в функционале J_1 (4.4), а управление u не подвергается дополнительным (например, геометрическим) ограничениям.

С помощью процедуры, описанной в разд. 2, для задач оптимального управления (4.3), (4.4) получим управление и усредненную краевую задачу первого приближения

$$u^* = -\beta\eta\sin^2(t + \xi), \quad \xi^{\cdot} = -\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}\beta^2\eta, \quad \xi(0) = \psi^0 \tag{4.5}$$

в которой $\eta = \text{const}$. Из краевых условий находим

$$\eta = k\left(\frac{1}{2}\gamma^2\Theta - \psi^0\right)\left(1 + \frac{3}{8}k\beta^2\Theta\right)^{-1} \quad \text{в задаче 1}$$
$$\eta_{k\to\infty} \to \eta^* = \frac{1}{\beta^2\Theta}\left(\frac{4}{3}\gamma^2\Theta - \frac{8}{3}\psi^0\right), \quad \eta = \eta^*, \quad I[u^*] = \frac{1}{4}\beta^2\eta^2\Theta \quad \text{в задаче 2} \tag{4.6}$$

Из соотношений (4.5) следует, что амплитуда управления u^* и затраты на управление I убывают при возрастании коэффициента β. Влияние низкочастотной помехи w не зависит от знака γ; помеха может способствовать или препятствовать требуемому изменению фазовой добавки φ.

Наряду с приведенной постановкой может быть рассмотрена другая, в которой величины φ, φ^0, $\varphi^f = \varphi(t_f)$ определяются по модулю 2π, т.е. значения φ и $\varphi \pm 2\pi$ отождествляются. Стандартным образом [3] исследуются задачи при дополнительных ограничениях типа $|u| \le u_0$.

2°. *Управление квазилинейными колебаниями.* Рассмотрим нелинейную систему с одной степенью свободы [6]

$$\ddot{z} + \Phi(z) = -\Lambda\dot{z} + V, \quad z(0) = z^0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}^0 \tag{4.7}$$

Здесь Φ – нелинейная возвращающая сила, Λ – коэффициент диссипации, V – управление. Пусть $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = \omega^2 > 0$, а последующие производные Φ'', Φ''', ... при $z = 0$ принимают произвольные значения. Отклонения z будем характеризовать малым параметром $\varepsilon : z = \varepsilon s$ и предполагая Λ и V достаточно малыми, приведем систему (4.7) в безразмерном времени $t^* = \omega t$ (звездочка далее опускается) к виду

$$\begin{gathered}\ddot{s} + s = \varepsilon\alpha s^2 + \varepsilon^2\beta s^3 - \varepsilon^2\chi\dot{s} + \varepsilon^2 u + \varepsilon^3\ldots; \quad s(0) = s^0, \quad \dot{s}(0) = \dot{s}^0 \\ \alpha = -\frac{1}{2\omega^2}\Phi''(0), \quad \beta = -\frac{1}{6\omega^2}\Phi'''(0), \quad \varepsilon\chi = \frac{\Lambda}{\omega}, \quad \varepsilon^3 u = \frac{V}{\omega}\end{gathered} \tag{4.8}$$

Введенные переменные s, $\dot{s}$, управление u и параметры s^0, $\dot{s}^0$, α, β, χ считаются величинами порядка единицы. При помощи замены фазовых переменных s, $\dot{s}$ на оскулирующие переменные Ван дер Поля x_1, x_2 уравнение управляемого движения (4.8) приводится к виду стандартной системы (1.1), в которой

$$\begin{gathered}s = x_1\cos t + x_2\sin t, \quad \dot{s} = -x_1\sin t + x_2\cos t \\ X_1 = -\alpha s^2\sin t, \quad F_1 = -(\beta s^3 - \chi\dot{s} + u)\sin t, \quad x_1(0) = s^0 \\ X_2 = \alpha s^2\cos t, \quad F_2 = -(\beta s^3 - \chi\dot{s} + u)\cos t, \quad x_2(0) = \dot{s}^0\end{gathered} \tag{4.9}$$

В функции X_i, F_i $(i = 1, 2)$ подставляются выражения s, $\dot{s}$ согласно замене (4.9). Непосредственной проверкой можно установить, что средние $\langle X_i\rangle \equiv 0$ $(i = 1, 2)$, т.е. управляемая система удовлетворяет условиям разд. 1.2. Для нее могут быть поставлены и исследованы конкретные задачи оптимального управления типа (1.1), (1.5) на интервале $0 \le t \le \Theta\varepsilon^{-2}$. Соответствующие постановки могут включать как раскачку или гашение колебаний $|x(t_f)| \gtrless |x(0)|$, так и совместное изменение амплитуды и фазы, т.е. компоненты $x_1(t_f)$, $x_2(t_f)$ должны принимать требуемые значения.

Рассмотрим как более простую задачу управления амплитудой колебаний. Для этой постановки удобно вместо переменных x_1, x_2 ввести "амплитуду-фазу" (a, ψ) с помощью замены Н. Н. Боголюбова [1–3]

$$\begin{gathered}s = a\cos\psi, \quad \dot{s} = -a\sin\psi, \quad a > 0 \\ \dot{a} = \varepsilon X_a(a, \psi) + \varepsilon^2 F_a(a, \psi, u), \quad a(0) = a^0 = (s^{02} + \dot{s}^{02})^{1/2} \\ \dot{\psi} = 1 + \varepsilon X_\psi(a, \psi) + \varepsilon^2 F_\psi(a, \psi, u), \quad \psi(0) = \psi^0 \in [0, 2\pi)\end{gathered} \tag{4.10}$$

$$X_a = -\alpha s^2 \sin\psi, \quad F_a = -(\beta s^3 - \chi \dot{s} + u)\sin\psi$$
$$X_\psi = -\alpha s^2 a^{-1}\cos\psi, \quad F_\psi = -(\beta s^3 - \chi\dot{s} + u)a^{-1}\cos\psi$$

В функции $X_{a,\,\psi}$, $F_{a,\,\psi}$ подставляются выражения для s, $\dot{s}$ согласно замене (4.10). Замена при $a = 0$ является особенной (фаза ψ не определена); поэтому при $a \simeq 0$ требуется проведение аккуратных выкладок и предельных переходов [3]. Заметим, что средние по ψ значения $\langle X_{a,\,\psi}\rangle \equiv 0$ для всех $a \geq 0$.

Для системы (4.10) ставятся задачи типа (1.5), в которых требуемым образом подлежит изменению амплитуда a,

$$J_1[u] = \frac{k}{2}[a(t) - a^f]^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^{t_f} u^2 dt, \quad u \in U \quad \text{в задаче 1}$$
$$a(t_f) = a^f \geq 0, \quad J_2[u] = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^{t_f} u^2 dt, \quad t_f = \frac{\Theta}{\varepsilon^2} \quad \text{в задаче 2} \tag{4.11}$$

Приближенные с погрешностью $O(\varepsilon)$ решения задач оптимального управления (4.10), (4.8) могут быть построены существенно проще, если вместо аргумента времени t ввести фазу ψ. Разделив $\dot{a}$ на $\dot{\psi}$, получим уравнение

$$a' = \varepsilon X_a(a, \psi) + \varepsilon^2[-X_a(a, \psi)X_\psi(a, \psi) + F_a(a, \psi, u)], \quad a(\psi^0) = a^0 \tag{4.12}$$

с аргументом ψ, $\psi^0 \leq \psi \leq \psi_f$. Здесь конечное значение ψ_f неизвестно, однако с относительной погрешностью $O(\varepsilon^2)$ можно положить $\psi_f = \Theta\varepsilon^{-2}$, что допустимо в рамках требуемой точности. Таким образом, в выражениях (4.11) можно заменить t на ψ и приближенно исследовать скалярную задачу для амплитуды a (4.12), (4.11) с помощью схемы усреднения второй степени (см. разд. 1, 2).

При отсутствии ограничений на управление u из (2.1) получим $u^* = -p\sin\psi$, где p – сопряженная a переменная (импульс). В первом по ε приближении получаются двухточечные краевые задачи

$$\xi' = -\frac{\chi\xi}{2} + \frac{\eta}{2}, \quad \eta' = \frac{\chi\eta}{2}, \quad \theta = \varepsilon^2\psi; \quad \xi(\theta_0) = a^0$$
$$\eta(\Theta) = -k(\xi(\Theta) - a^f) \quad \text{в задаче 1} \tag{4.13}$$
$$\xi(\Theta) = a^f \quad \text{в задаче 2}$$

Штрихом обозначены производные усредненной амплитуды ξ и импульса η по медленной фазе θ.

Решение краевых задач (4.13) приводит к простым выражениям для $\eta = \eta_{1,\,2}$

$$\eta_1 = k\left(a^f - a^0\exp\left(-\frac{\chi}{2}(\Theta - \theta_0)\right)\right)\left(\exp\frac{\chi}{2}(\Theta - \theta_0) + \frac{k}{\lambda}\operatorname{sh}\frac{\chi}{2}(\Theta - \theta_0)\right)^{-1}\exp\frac{\chi}{2}(\theta - \theta_0)$$
$$\eta_2 = \left(a^f - a^0\exp\left(-\frac{\chi}{2}(\Theta - \theta_0)\right)\right) + \chi\left(\operatorname{sh}\frac{\chi}{2}(\Theta - \theta_0)\right)^{-1} \tag{4.14}$$
$$\xi_{1,\,2} = a^0\exp\left(-\frac{\chi}{2}(\Theta - \theta_0)\right) + \frac{\eta^0_{1,\,2}}{\chi}\operatorname{sh}\frac{\chi}{2}(\Theta - \theta_0)$$

Здесь $\eta^0_{1,2}$ – значения $\eta_{1,2}$ при $\theta = \theta_0$; они выражаются через $a^{0,f}$ и параметры χ, k, $\Theta - \theta_0$ согласно формулам (4.14). Заметим, что при $k \to \infty$ коэффициент $\eta_1 \to \eta_2$, а значение $\xi(\Theta) \to a^f$ для задачи 1 (4.8).

Подстановка $\eta_{1,2}$ вместо p в формулу для управления u^* позволяет построить искомые выражения в форме программы и синтеза

$$u_p^* = -\eta(a^0, \theta - \theta_0, \Theta - \theta_0)\sin\psi$$

$$u_s^* = -\eta(a, 0, \Theta - \theta)\sin\psi, \quad \theta = \varepsilon^2\psi$$

Аналогичными элементарными приемами, изложенными в разд. 2, могут быть построены решения при наличии дополнительных ограничений на управление u, например, $u^- \le u \le u^+$. После приведения краевых задач к виду (2.5) исследования проводятся согласно указанной ранее процедуре [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00157) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (1627.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
2. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
3. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
4. *Миркина А.С.* Об одной модификации метода усреднения и оценке старших приближений // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 876–884.
5. *Акуленко Л.Д.* Схемы усреднения высших степеней в теории нелинейных колебаний // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 843–853.
6. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М: Наука, 1969. 384 с.

Москва
e-mail: kumak@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
21.VIII.2003