УДК 539.375

© 2005 г. И. Ю. Цвелодуб

О РАЗРУШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВО ВКЛЮЧЕНИЯХ

Рассматривается изотропная упругая плоскость, содержащая удаленные друг от друга различные эллиптические включения, проявляющие свойства нелинейной ползучести, причем соответствующие определяющие уравнения содержат параметр поврежденности, изменяющийся в пределах от нуля (в недеформированном состоянии) до единицы (в момент разрушения). На бесконечности действуют постоянные во времени нагрузки, что обуславливает релаксацию напряжений во включениях. Получены условия, при которых: а) происходит разрушение включений, б) разрушение невозможно. Результаты обобщены на случай конечной области с нелинейным включением произвольной формы, находящимся в условиях релаксации при однородном напряженно-деформированном состоянии.

Ранее [1–3] была рассмотрена изотропная упругая плоскость, содержащая эллиптическое физически-нелинейное включение (ЭФНВ) и подвергнутая на бесконечности действию конечных напряжений. Были установлены связи между напряженно-деформированными состояниями во включении и на бесконечности. С использованием этих соотношений в данной работе рассматриваются ЭФНВ, удаленные друг от друга на достаточно большие расстояния и проявляющие нелинейно-вязкие свойства (ползучесть) и повреждающиеся в процессе ползучести. При постоянных во времени внешних нагрузках в ЭФНВ реализуется релаксационный процесс, характеризующийся падением уровня напряжений. Возникает вопрос о возможности разрушения (т.е. накопления предельного значения параметра поврежденности) включений в этих условиях, ответ на который дается ниже.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную упругую плоскость с различными эллиптическими физически нелинейными включениями (ЭФНВ), находящуюся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния вследствие постоянных внешних нагрузок, действующих на бесконечности. Считаем, что расстояние между центрами любых двух произвольных ЭФНВ велико по сравнению с их размерами, так что взаимным влиянием каждого включения на напряженно-деформированное состояние (НДС) любого другого можно пренебречь. Поэтому рассмотрим какое-нибудь произвольно выбранное ЭФНВ, которое обозначим через S^*, и введем систему координат Ox_1x_2 так, чтобы уравнение границы L^*, отделяющей S^* от упругой среды S, имело вид

$$x_1^2a^{-2} + x_2^2b^{-2} = 1, \quad a \geq b$$

Главные значения действующих на бесконечности напряжений обозначим через N_1 и N_2, а угол между первой главной осью и осью Ox_1 – через α.

В области S справедлив закон Гука [1–3]

$$8\mu\varepsilon_{kl} = (\kappa-1)\sigma_{nn}\delta_{kl} + 4\sigma_{kl}^0, \quad \sigma_{kl}^0 = \sigma_{kl} - \sigma_{nn}\delta_{kl}/2, \quad k, l = 1, 2 \qquad (1.1)$$

где σ_{kl}^0 и δ_{kl} – компоненты девиатора напряжений и единичного тензора, μ – модуль сдвига; $\kappa = 3–4\nu$ при плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для обобщенного плоского напряженного состояния; ν – коэффициент Пуассона; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2.

Полные деформации включения S^* складываются из упругих и деформаций ползучести ε_{kl}^{*c}, скорости которых зависят от напряжений σ_{kl}^* и параметра поврежденности, так что определяющие уравнения имеют вид [4, 5]

$$\varepsilon_{kl}^* = a_{klmn}^*\sigma_{mn}^* + \varepsilon_{kl}^{*c}, \quad \dot{\varepsilon}_{kl}^{*c} = B_1 s_*^n(1-\omega)^{-m}\partial s_*/\partial\sigma_{kl}^*, \quad k, l = 1, 2 \tag{1.2}$$

где a_{klmn}^* – компоненты упругих податливостей включения, $s_* = s_*(\sigma_{kl}^*)$ – однородная первой степени выпуклая положительная функция, ω $(0 \le \omega \le 1)$ – параметр поврежденности (в естественном состоянии $\omega = 0$, а в момент разрушения $\omega = 1$), B_1, B_2, m, n, p – положительные постоянные.

Деформации упругой среды и включения считаются малыми, на границе L^* поля нагрузок и перемещений непрерывны. Напряжения на бесконечности прикладываются в момент времени $t = 0$ и остаются постоянными. При $t < 0$ области S и S^* находились в естественном недеформированном состоянии, поэтому

$$\omega|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{kl}^{*c}\big|_{t=0} = 0, \quad k, l = 1, 2 \tag{1.3}$$

Связи между НДС в S^* и на бесконечности (при условии, что величина вращения $\varepsilon^\infty = 0$) в системе координат Ox_1x_2, связанной с осями симметрии ЭФНВ, имеют вид [1–3]

$$\begin{aligned} \mu(m_0\bar{C} + \bar{D}) &= \kappa(m_0A + B) - (\kappa+1)(m_0\Gamma + \Gamma') \\ \mu(\bar{C} + m_0\bar{D}) &= -(A + m_0B) + (\kappa+1)\Gamma \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$2A = \sigma_{11}^* + \sigma_{22}^*, \quad 2B = \sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^*, \quad C = \varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^* + 2i\varepsilon^*$$

$$D = \varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{22}^* + 2i\varepsilon_{12}^*, \quad m_0 = (a-b)/(a+b) \quad (0 \le m_0 < 1)$$

$$4\Gamma = N_1 + N_2 = \sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty, \quad 2\Gamma' = (N_2 - N_1)\exp(-2i\alpha) = \sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty$$

где σ_{kl}^∞ $(k, l = 1, 2)$ – компоненты напряжений на бесконечности, ε^* – величина вращения в S^*. При выводе соотношений (1.3) считалось, что точка (0.0) фиксирована, т.е. перемещения центра ЭФНВ равны нулю.

Заметим, что НДС в ЭФНВ будет однородным [1–3].

Уравнения (1.2), (1.4) и начальные условия (1.3) представляют замкнутую систему для нахождения по известной истории нагружения $\sigma_{kl}^\infty = \sigma_{kl}^\infty(t)$ на бесконечности НДС во включении, т.е. $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$, $\varepsilon_{kl}^* = \varepsilon_{kl}^*(t)$ и $\omega = \omega(t)$ $(k, l = 1, 2)$.

Разрешая уравнения (1.4) относительно ε_{kl}^* и ε^*, найдем, что

$$2\mu(1 - m_0^2)\varepsilon^* = m_0(\kappa+1)(\sigma_{12}^* - \sigma_{12}^\infty)$$

а для оставшихся трех уравнений получим [2, 3]

$$F_i = \alpha_{ij}y_j + \beta_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, 3$$

$$F_k = \varepsilon_{kk}^* \quad F_3 = 2\varepsilon_{12}^*, \quad y_k = \sigma_{kk}^*, \quad y_3 = \sigma_{12}^*, \quad \xi_k = \sigma_{kk}^\infty, \quad \xi_3 = \sigma_{12}^\infty; \quad k = 1, 2$$

$$\alpha_{11}=-\frac{(\kappa+1)(1-m_0)}{4\mu(1+m_0)},\ \alpha_{12}=\alpha_{21}=\frac{\kappa-1}{4\mu},\ \alpha_{22}=-\frac{(\kappa+1)(1+m_0)}{4\mu(1-m_0)},\ \alpha_{33}=-\frac{\kappa+m_0^2}{\mu(1-m_0^2)} \quad (1.5)$$

$$\beta_{11}=\frac{(\kappa+1)(3-m_0)}{8\mu(1+m_0)},\quad \beta_{12}=\beta_{21}=-\frac{\kappa-1}{8\mu},\quad \beta_{22}=\frac{(\kappa+1)(3+m_0)}{8\mu(1-m_0)},\quad \beta_{33}=\frac{\kappa+1}{\mu(1-m_0^2)}$$

$$0\le m_0<1$$

(все остальные α_{ij} и β_{ij} равны нулю; суммирование по j от 1 до 3).

Определяющие уравнения (1.2) с использованием принятых в (1.5) обозначений запишем в виде

$$F_i = s_e\partial s_e/\partial y_i+f_i^c,\quad f_i^c = B_1s_c^n(1-\omega)^{-m}\partial s_c/\partial y_i,\quad i = 1,2,3;\quad \dot\omega = B_2s_c^p(1-\omega)^{-m}$$
$$s_d^2=\alpha_{ij}^dy_iy_j,\quad f_1^c=\varepsilon_{11}^{*c},\quad f_2^c=\varepsilon_{22}^{*c},\quad f_3^c=2\varepsilon_{12}^{*c},\quad \alpha_{ij}^d=\alpha_{ji}^d,\quad i,j=1,2,3;\quad d=e,c \quad (1.6)$$

Величины α_{ij}^e выражаются через компоненты упругих податливостей a_{klmn}^* из (1.2), а вид функции s_c в уравнениях ползучести в (1.6) является обобщением зависимостей $s_c =$ $= s_c(y_i)$ для изотропной среды, для которой $\alpha_{11}^c = \alpha_{22}^c = 1$, $\alpha_{12}^c = 1-\beta/2$, $\alpha_{33}^c = \beta$, а остальные α_{ij}^c равны нулю и s_c совпадает с интенсивностью напряжений (при $\beta = 3$) или с удвоенным главным касательным напряжением (при $\beta = 4$).

Из соотношений (1.5) и (1.6) следует

$$A_{ij}y_j+f_i^c = \beta_{ij}\xi_j,\quad i = 1,2,3;\quad A_{ij} = \alpha_{ij}^e-\alpha_{ij} \quad (1.7)$$

где матрица $\|A_{ij}\|$ – симметричная положительно определенная ввиду того, что таковыми являются матрицы $\|\alpha_{ij}^e\|$ и $\|-\alpha_{ij}\|$, так как согласно соотношениям (1.5)

$$\alpha_{11}<0,\quad \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2 = \kappa\mu^{-2}/4>0,\quad \alpha_{33}<0$$

Поскольку нагрузки на бесконечности постоянны, т.е. $\dot\xi_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), то после дифференцирования равенств (1.7) по t, умножения на y_i и суммирования по i с учетом уравнений (1.6) получим

$$s\dot s+B_1s_c^{n+1}(1-\omega)^{-m} = 0,\quad s(y_i)\equiv(A_{ij}y_iy_j)^{1/2} \quad (1.8)$$

Из равенства (1.8) следует, что $\dot s<0$, т.е. в ЭФНВ происходит релаксация напряжений. Основной вопрос: возможно ли в данном релаксационном процессе накопление предельного значения $\omega = 1$, соответствующего разрушению включения?

2. Достаточные условия разрушения ЭФНВ. Как отмечалось выше, матрица $\|A_{ij}\|$ из (1.7) является положительно определенной, т.е. $A_{ij}y_iy_j > 0$ при $y_iy_i \ne 0$. Предположим, что этим свойством обладает и матрица $\|\alpha_{ij}^c\|$ из (1.6): $\alpha_{ij}^c y_iy_j > 0$ при $y_iy_i \ne 0$ (случай положительной полуопределенности, когда $\alpha_{ij}^c y_iy_j \ge 0$ при $y_iy_i \ne 0$ будет рассмотрен отдельно в разд. 4). Тогда, как известно [6], будут существовать такие числа $\lambda_{\min} > 0$ и $\lambda_{\max} > 0$, являющиеся наименьшим и наибольшим корнями характеристического уравнения регулярного пучка квадратичных форм, которое имеет вид $|A_{ij} - \lambda\alpha_{ij}^c| = 0$, что будут иметь место неравенства

$$a_1 s_c \le s \le a_2 s_c, \quad a_1 \equiv \sqrt{\lambda_{\min}}, \quad a_2 \equiv \sqrt{\lambda_{\max}} \tag{2.1}$$

функции $s_c(y_i)$ и $s(y_i)$ определены в (1.6) и (1.8).

Из третьего соотношения (1.6) следует, что $\omega = \omega(t)$ – возрастающая функция, поэтому, как и ранее [4, 5], выберем ее в качестве независимой переменной, т.е. будем считать, что $y_i = y_i(\omega)$. Тогда, дифференцируя равенства (1.7) по ω и учитывая, что согласно (1.6)

$$\frac{d}{d\omega} = B_2^{-1} s_c^{-p} (1-\omega)^m \frac{d}{dt}$$

получим

$$A_{ij} y_i' + B_1 B_2^{-1} s_c^{n-p} \partial s_c / \partial y_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

где штрих означает дифференцирование по ω.

Равенства (2.2) образуют систему уравнений для нахождения функций $y_i = y_i(\omega)$, начальные условия для которой вытекают из соотношений (1.3), (1.7) и имеют вид

$$y_{i0} \equiv y_i(0) = B_{ik}\beta_{jk}\xi_j, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.3}$$

где $\|B_{ij}\|$ – матрица, обратная к $\|A_{ij}\|$.

Умножая равенства (2.2) на y_i и суммируя по i, найдем

$$ss' + B_1 B_2^{-1} s_c^{n-p+1} = 0 \tag{2.4}$$

Если $s \equiv a_0 s_c$, $a_0 = \text{const}$, то равенство (2.4) сводится к уравнению релаксации напряжения s_c в стержне, исследованному ранее [4]. В общем случае имеют место неравенства (2.1), которые будем использовать для получения соответствующих оценок.

Рассмотрим отдельно три случая.

1°. Пусть $n + 1 - p > 0$. Тогда вследствие неравенств (2.1) будем иметь

$$(s/a_2)^{n+1-p} \le s_c^{n+1-p} \le (s/a_1)^{n+1-p} \tag{2.5}$$

и из соотношений (2.4), (2.5) получим

$$\begin{gathered} -A_1 s_0^{p-n+1} \le (s^{p-n+1})'/(p-n+1) \le -A_2 s_0^{p-n+1} \\ A_k \equiv B_1 B_2^{-1} a_k^{-(n+1-p)} s_0^{n-p-1}, \quad k = 1, 2 \end{gathered} \tag{2.6}$$

Интегрируя неравенства (2.6) по ω от нуля до текущего значения, найдем

$$-A_1 s_0^{p-n+1}\omega \le f(s) \le -A_2 s_0^{p-n+1}\omega, \quad f(s) \equiv (s^{p-n+1} - s_0^{p-n+1})/(p-n+1), \quad s_0 = s(y_{i0}) \tag{2.7}$$

Величины y_{i0} ($i = 1, 2, 3$) определены формулой (2.3).

Поскольку $f(s)$ – возрастающая функция, из неравенств (2.7) независимо от знака постоянной $p - n + 1$ следует

$$\begin{gathered} s_0\varphi_1(\omega) \le s \le s_0\varphi_2(\omega) \\ \varphi_k(\omega) \equiv [1 - A_k(p-n+1)\omega]^{1/(p-n+1)}, \quad k = 1, 2 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Из соотношений (2.1) и (2.8) для s_c получим

$$a_2^{-1}s_0\varphi_1(\omega) \le s_c \le a_1^{-1}s_0\varphi_2(\omega) \tag{2.9}$$

Тогда из последнего уравнения (1.6) для $\dot\omega$ будем иметь

$$t_{*2}^{-1}[\varphi_1(\omega)]^p \le (1-\omega)^m\dot\omega \le t_{*1}^{-1}[\varphi_2(\omega)]^p, \quad t_{*k}^{-1} \equiv B_2(a_k^{-1}s_0)^p, \quad k = 1, 2 \tag{2.10}$$

Если $A_1(p-n+1) < 1$, то ЭФНВ разрушится за конечное время t_*. Действительно, поскольку вследствие неравенств (2.8) функции $[\varphi_k(\omega)]^{-p}$ ($k = 1.2$) – возрастающие, из (2.10) после интегрирования первого неравенства найдем

$$\frac{t_*}{t_{*2}} \le \int_0^1 [\varphi_1(\omega)]^{-p}(1-\omega)^m d\omega < [\varphi_1(1)]^{-p}\int_0^1 (1-\omega)^m d\omega = [\varphi_1(1)]^{-p}(m+1)^{-1} \tag{2.11}$$

Если $A_1(p-n+1) = 1$, то

$$\frac{t_*}{t_{*2}} \le \int_0^1 (1-\omega)^{m-A_1p} d\omega \tag{2.12}$$

откуда следует, что $t_* < \infty$, если $m + 1 - A_1p > 0$.

Если $A_2(p-n+1) > 1$, то разрушения не будет, так как значение

$$\omega = \omega_0 \equiv A_2^{-1}(p-n+1)^{-1} < 1$$

будет достигаться за время $t_0 \to \infty$ [4]. Действительно, из неравенств (2.8) и (2.10) получим

$$\frac{t_0}{t_{*1}} \ge \int_0^{\omega_0} (1-\omega)^m[\varphi_2(\omega)]^{-p} d\omega \ge (1-\omega_0)^m \int_0^{\omega_0} \left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-p/(p-n+1)} d\omega =$$

$$= \frac{(1-\omega_0)^m}{A_2(n-1)} \lim_{\omega\to\omega_0-0} \left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-(n-1)(p-n+1)} = \infty$$

поскольку $p - n + 1 > A_2^{-1} > 0$ и $n - 1 \ge 0$.

Если $A_2(p-n+1) = 1$, то

$$\frac{t_*}{t_{*1}} \ge \int_0^1 (1-\omega)^{m-A_2p} d\omega$$

поэтому при $m - A_2p + 1 \le 0$ время до разрушения $t_* \to \infty$.

2°. Пусть $n + 1 - p < 0$. В этом случае знаки всех неравенств в формулах (2.5)–(2.8) сменятся на противоположные, а вместо (2.9) получим

$$a_2^{-1}s_0\varphi_2(\omega) \le s_c \le a_1^{-1}s_0\varphi_1(\omega) \tag{2.13}$$

Отсюда, повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся, что разрушение будет иметь место при $A_2(p-n+1) < 1$ и при $A_2p = A_2(n-1) + 1 < m + 1$; разрушения не будет, если $A_1(p-n+1) > 1$ или $A_1p = A_1(n-1) + 1 \ge m + 1$.

3°. Пусть $n + 1 - p = 0$. Тогда из равенства (2.4) найдем

$$s = s_0\varphi(\omega), \quad \varphi(\omega) = (1-A_0\omega)^{1/2}; \quad A_0 = 2B_1B_2^{-1}s_0^{-2} \tag{2.14}$$

и из неравенств (2.1) будем иметь

$$a_2^{-1}s_0\varphi(\omega) \le s_c \le a_1^{-1}s_0\varphi(\omega) \tag{2.15}$$

Отсюда видно, что разрушение будет иметь место при $A_0 < 1$ и при $A_0 = 1 > p/2 - m$; оно невозможно, если $A_0 > 1$ или $A_0 = 1 \le p/2 - m$. Эти выводы следуют из приведенных выше формул, в которых $p = n + 1$, $n \ge 1$.

3. Нижняя и верхняя оценки времени до разрушения. Для того чтобы найти точные значения величины t_* (т.е. времени, прошедшего с момента приложения нагрузок ξ_i на бесконечности до разрушения ЭФНВ), необходимо решить нелинейную систему уравнений (2.2) относительно $y_i = y_i(\omega)$ ($i = 1, 2, 3$) с начальными условиями (2.3), после чего подставить функцию

$$s_c(\omega) = [\alpha_{ij}^c y_i(\omega) y_j(\omega)]^{1/2}$$

в последнее уравнение (1.6), откуда вытекает, что

$$t_* = B_2^{-1}\int_0^1 [s_c(\omega)]^{-p}(1-\omega)^m d\omega \tag{3.1}$$

Нахождение точного решения системы (2.2) возможно в простейших случаях, например, в упоминавшемся выше, когда $s = a_0 s_c$ ($a_0 = \text{const}$), и функция $s_c = s_c(\omega)$ определяется из уравнения (2.4)

$$s_c = s_{c0}[1 - B_1 B_2^{-1} a_0^{-2}(p-n+1)s_{c0}^{n-p-1}\omega]^{1/(p-n+1)}, \quad s_{c0} = s_c(0) \tag{3.2}$$

Однако с использованием приведенных в разд. 2 неравенств можно оценить величину t_* во всех указанных случаях, когда выполнены достаточные условия разрушения включения. Интегрируя второе неравенство (2.10) и учитывая, что $[\varphi_k(\omega)]^{-p} > 1$ ($k = 1, 2$) при $\omega > 0$, получим нижнюю, а из неравенств (2.11) и (2.12) – верхнюю оценки в следующем виде:

$$t_{*1}(m+1)^{-1} < t_* < t_{*2}[\varphi_1(1)]^{-p}(m+1)^{-1} \quad \text{при} \quad p - n < \min(1, A_1^{-1} - 1)$$

$$t_{*1}(m+1)^{-1} < t_* < t_{*2}(m - A_1 p + 1)^{-1} \quad \text{при} \quad p - n < A_1^{-1} - 1 < 1, \quad m - A_1 p + 1 > 0$$

В случае $n + 1 - p < 0$ из неравенств (2.13) и третьего уравнения (1.6) получим неравенства вида (2.10), в которых функции $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ следует поменять местами, поэтому имеем аналогичные оценки:

$$t_{*1}(m+1)^{-1} < t_* < t_{*2}[\varphi_2(1)]^{-p}(m+1)^{-1} \quad \text{при} \quad 1 < p - n < A_2^{-1} - 1$$

$$t_{*1}(m+1)^{-1} < t_* < t_{*2}(m - A_2 p + 1)^{-1} \quad \text{при} \quad p - n < A_2^{-1} - 1 > 1, \quad m - A_2 p + 1 > 0$$

Если $p = n + 1$, то из соотношений (2.14), (2.15) и третьего уравнения (1.6) для $\dot{\omega}$ получим неравенства вида (2.10), в которых следует положить $\varphi_1(\omega) = \varphi_2(\omega) = \varphi(\omega)$, поэтому будем иметь

$$t_{*1}(m+1)^{-1} < t_* < t_{*2}[\varphi(1)]^{-p}(m+1)^{-1} \quad \text{при} \quad A_0 < 1$$

$$t_{*1}(m - p/2 + 1)^{-1} < t_* < t_{*2}(m - p/2 + 1)^{-1} \quad \text{при} \quad A_0 = 1 > p/2 - m$$

Величины $\varphi(\omega)$ и A_0 определены формулами (2.14).

4. Неоднородная несжимаемая среда при плоской деформации. Рассмотрим случай, когда квадратичная форма $s_c^2 = \alpha_{ij}^c y_i y_j$ из соотношений (1.6) является положительно полуопределенной, т.е. $\alpha_{ij}^c y_i y_j \geq 0$ при $y_i y_i \neq 0$. Предположим, что область $S \cup S^*$ – изотропная, несжимаемая и находится в условиях плоской деформации, так что в соотношениях (1.1) $\kappa = 1$, а в определяющих уравнениях (1.6) для ЭФНВ $s_e = \tau\mu^{*-1/2}$ и $s_c = \tau$, где $\tau \equiv [(y_1 - y_2)^2/4 + y_3^2]^{1/2}$ – главное касательное напряжение, μ^* – модуль сдвига включения. Таким образом, при $y_1 = y_2 \neq 0$ и $y_3 = 0$ имеем $\tau = 0$, а $A_{ij}y_i y_j > 0$, что вытекает из равенств (1.5) и (1.7). Следовательно, второе неравенство (2.1) не может иметь места при $a_2 < \infty$. Однако и в этом случае можно получить оценки, аналогичные приведенным в разд. 2 и 3.

Для этого выразим Г' и Г из соотношений (1.4) при $\kappa = 1$:

$$2\Gamma' = (1 - m_0^2)B - \mu(1 + m_0^2)\bar{D} - 2\mu m_0 \bar{C}, \quad 2\Gamma = m_0(B + \mu\bar{D}) + A + \mu\bar{C} \tag{4.1}$$

Учитывая, что A и Г – действительные величины, а $C = 2i\varepsilon^*$ (поскольку $\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^* = 0$) – чисто мнимая, из второго равенства (4.1) найдем

$$2\mu\varepsilon^* = m_0(\sigma_{12}^* - 2\mu\varepsilon_{12}^*) \tag{4.2}$$

Из равенств (4.1) и (4.2) видно, что Г' не зависит от A. Подставляя выражение (4.2) в первое равенство (4.1) и используя соотношения (1.5) и (1.6), получим после разделения действительной и мнимой частей

$$\begin{gathered} \xi_2 - \xi_1 = M_1^+(y_2 - y_1)/2 + 2M_2^+ f_2^c, \quad 2\xi_3 = M_1^- y_3 + M_2^- f_3^c \\ M_1^\pm = (1 \mp m_0^2) + (1 \pm m_0^2)\mu/\mu^*, \quad M_2^\pm = \mu(1 \pm m_0^2) \end{gathered} \tag{4.3}$$

где учтено, что $f_1^c + f_2^c = 0$.

Поскольку $\xi_k = \text{const}$ ($k = 1, 2, 3$), то, дифференцируя равенства (4.3) по ω, получим систему вида (2.2) относительно двух величин: $y_2 - y_1$ и y_3 как функций ω

$$M_1^+(y_2' - y_1')/2 + 2M_2^+ B_1 B_2^{-1}\tau^{n-p}\partial\tau/\partial y_2 = 0, \quad M_1^- y_3' + M_2^- B_1 B_2^{-1}\tau^{n-p}\partial\tau/\partial y_3 = 0 \tag{4.4}$$

начальные данные для которой, т.е. значения $y_{20} - y_{10}$ и y_{30}, вытекают из равенств (4.3) при $f_2^c = f_3^c = 0$.

Умножая первое уравнение (4.4) на $(y_2 - y_1)/M_2^+$, а второе – на y_3/M_2^- и складывая их, будем иметь аналог уравнения (2.4)

$$TT' + B_1 B_2^{-1}\tau^{n-p+1} = 0 \tag{4.5}$$

$$T^2 \equiv a_1^2\left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2 + a_2^2 y_3^2, \quad a_1^2 = \frac{\delta}{\mu} + \frac{1}{\mu^*}, \quad a_2^2 = \frac{1}{\mu\delta} + \frac{1}{\mu^*} \quad (a_1 \leq a_2)$$

$$\delta = \frac{1 - m_0^2}{1 + m_0^2} \quad (0 < \delta \leq 1)$$

Обе квадратичные формы τ^2 и T^2 относительно $y_2 - y_1$ и y_3 являются положительно определенными, и имеет место неравенство вида (2.1)

$$a_1\tau \le T \le a_2\tau$$

Поэтому остаются справедливыми все рассуждения, проведенные в разд. 2 и 3, где следует заменить s на T и s_c на τ, а в качестве a_1 и a_2 взять величины, указанные выше.

Заметим, что если $\xi_2 = \xi_1 = \text{const}$ (или $\xi_3 = 0$), что, как видно из равенств (1.4), соответствует значению $\alpha = \pi/4$ (или $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$), то ввиду соотношений (4.3) $y_{20} = y_{10}$ (или $y_{30} = 0$) и вследствие системы (4.4), как нетрудно видеть, будут выполняться равенства $y_2 = y_1$ (или $y_3 = 0$) в любой момент $t > 0$, и система (4.4) будет вырождаться в одно уравнение относительно y_3 (или $y_2 - y_1$), решение которого имеет вид (3.2), поскольку $s = a_0 s_c$, пгде $s_c = \tau$, а $\tau = |y_3|$, $a_0 = a_2$ (или $\tau = |y_2 - y_1|/2$, $a_0 = a_1$), a_1 и a_2 определены формулами (4.5). Как уже упоминалось, это решение аналогично полученному ранее [4] для одноосного напряженного состояния и позволяет с использованием выражений (3.1) и (3.2) дать точный ответ на вопрос о возможности разрушения ЭФНВ и найти время t_*. Например, если

$$A_3(p - n + 1) < 1, \quad A_3 \equiv B_1 B_2^{-1} a_0^{-2} \tau_0^{n-p-1} \tag{4.6}$$

то $t_* < \infty$ [4]. В частности, условие (4.6) будет выполняться при $p - n + 1 \le 0$ независимо от величины A_3.

Интересно отметить следующее. Предположим, что в момент $t = 0$ включению S^* мгновенно сообщаются упругие деформации F_{i0} (однородные), которые при $t > 0$ остаются фиксированными, т.е. $\dot{F}_i = 0$, и вследствие уравнений (1.6) также будет иметь место релаксационный процесс, который описывается системой уравнений, получающейся из (1.6) дифференцированием по t (или по ω) с учетом того, что $\dot{F}_i = 0$ (или $F_i' = 0$) ($i = 1, 2, 3$). (Осуществить такой режим можно путем подбора напряжений ξ_i на бесконечности, которые при известных y_i находятся из соотношений (1.5) при $F_i = F_{i0}$ ($i = 1, 2, 3$).) В рассматриваемом случае изотропной несжимаемой среды при плоской деформации получим уравнение (2.4), в котором $s_c = \tau$, $s = \tau/\sqrt{\mu^*}$ (оно получается из уравнения (4.5) при $\mu \to \infty$). Тогда, как следует из соотношений (3.2), время t_* будет конечным или бесконечным в зависимости от знака величины $1 - A_4(p - n + 1)$, где $A_4 = H_c H_e^{-1}$, $H_c = B_1 B_2^{-1} \tau_0^{n-p}$, $H_c(f_2, f_3) \equiv 2(f_2^{c2} + f_3^{c2})^{1/2}$ – главный сдвиг в момент разрушения в условиях ползучести при $\tau = \tau_0 = \text{const}$, $H_e = \tau_0/\mu^*$ – главный упругий сдвиг при $\tau = \tau_0$. Для реальных сред $A_4 > 1$, поэтому разрушение возможно только для хрупких материалов, у которых $n > p$, так как $t_* < \infty$ при $A_4(p - n + 1) < 1$, т.е. $p - n < < A_4^{-1} < 0$ [4].

В рассмотренной в этом разделе задаче при $\xi_3 = 0$ или $\xi_2 - \xi_1 = 0$ условие (4.6) конечности времени t_*, т.е.

$$\mu^{*-1} a_0^{-2} A_4(p - n + 1) < 1 \quad (a_0 = a_1 \quad \text{или} \quad a_0 = a_2)$$

может выполняться и для вязких материалов, у которых $n < p$ и $A_4 \gg 1$ [4]. Действительно, неравенства $0 < p - n < \mu^* a_0^2 A_4^{-1} - 1$ могут иметь место, если $\mu^* a_0^2 A_4^{-1} > 1$, т.е. (после подстановки вместо a_0 значений a_1 и a_2 по формулам (4.5)) соответственно при $\delta\mu^*\mu^{-1} > A_4 - 1$ и $\delta^{-1}\mu^*\mu^{-1} > A_4 - 1$, что возможно, если геометрический параметр ЭФНВ и упругие модули среды и включения удовлетворяют условиям: $\delta\mu^*\mu^{-1} \gg 1$ или $\delta^{-1}\mu^*\mu^{-1} \gg 1$. Например, второе неравенство может быть выполнено при любом конечном отношении $\mu^*\mu^{-1}$ за счет подбора малого параметра δ ($m_0 \to 1$ при $\delta \to 0$, т.е. эллиптическое включение вырождается в щель, заполненную нелинейной средой [2]).

5. Заключительные замечания. Рассмотренные выше задачи о возможности (или невозможности) разрушения ЭФНВ в упругой плоскости, находящегося в условиях релаксации напряжений под действием постоянных нагрузок (т.е. при постоянных деформациях) на бесконечности, могут быть обобщены на случай включения S^* произвольной формы в конечной упругой (или вязкоупругой) области S с внешней границей L. Действительно, предположим, что при $t = 0$ за счет внешних нагрузок p_{k0}, действующих на L, в области S^*, имеющей определяющие уравнения вида (1.6), создано однородное НДС, а при $t > 0$ деформации в S^* должны оставаться фиксированными, т.е. $\dot{F}_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), что обусловит процесс релаксации напряжений в области S^*. Этого можно добиться за счет подбора внешних усилий $p_k = p_k(t)$ на L, если известно точное решение системы (1.6) при $F_i = F_{i0}$. Задача нахождения функций $p_k = p_k(t)$ на L при известном однородном НДС в S^*, т.е. заданных функциях $F_i = F_i(t)$ и $y_i = y_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$), рассмотрена ранее [1, 5].

Упомянутое точное решение может быть получено, например, в рассмотренном в разд. 4 случае неоднородной несжимаемой среды при плоской деформации. Действительно, из равенства (2.4) при $s_c = \tau$ и $s = \tau/\sqrt{\mu^*}$ найдем функцию $\tau = \tau(\omega)$ вида (3.2), где $a_0^{-2} = \mu^*$. Тогда из системы, вытекающей из (1.6) после дифференцирования по ω и равенств $F_i' = 0$ ($i = 2, 3$), определим $y_2 - y_1$ и y_3 как функции ω:

$$\begin{gathered}\tau = \tau_0\Phi(\omega), \quad y_2 - y_1 = (y_{20} - y_{10})\Phi(\omega), \quad y_3 = y_{30}\Phi(\omega) \\ \Phi(\omega) \equiv [1 - B_1 B_2^{-1}\mu^*(p - n + 1)\tau_0^{n-p-1}\omega]^{1/(p-n+1)}\end{gathered} \tag{5.1}$$

Из последнего уравнения (1.6) получим

$$t(\omega) = B_2^{-1}\tau_0^{-p}\int_0^{\omega}[\Phi(\omega)]^{-p}(1-\omega)^m d\omega \tag{5.2}$$

Из соотношения (5.2) можно найти (например, численно) обратную функцию $\omega = \omega(t)$, подставляя которую во второе и третье равенства (5.1), будем иметь $y_2 - y_1$ и y_3 как функции t.

Заметим, что величина $A = (y_1 + y_2)/2$ не влияет на начальное НДС в области S^* и последующий процесс релаксации, поэтому она может быть выбрана произвольным образом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00643).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цвелодуб И.Ю.* Об одной обратной задаче для упругой среды, содержащей физически нелинейное включение // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 424–430.
2. *Цвелодуб И.Ю.* Физически нелинейное включение в линейно-упругой среде (плоская задача) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 72–84.
3. *Цвелодуб И.Ю.* К определению прочностных характеристик физически нелинейного включения в линейно-упругой среде // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 4. С. 178–184.
4. *Цвелодуб И.Ю.* Возможно ли разрушение в условиях релаксации напряжений? // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 152–157.
5. *Цвелодуб И.Ю.* Некоторые обратные задачи для вязкоупругой среды с физически нелинейным включением // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 6. С. 983–994.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.

Новосибирск
e-mail: itsvel@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
4.II.2003