

УДК 539.375

© 2005 г. В.М. Александров, Б.И. Сметанин

ПРОДОЛЬНАЯ ТРЕЩИНА В ПРЕДНАПРЯЖЕННОМ ТОНКОМ УПРУГОМ СЛОЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Рассматривается плоская задача о продольной трещине, нагруженной по берегам равномерным давлением и симметрично расположенной в преднапряженном тонком слое со свободными границами. Преднапряжение слоя осуществлено в его плоскости однородными усилиями, приложенными на бесконечности. Предполагается, что материал слоя описывается упругим потенциалом гармонического типа. Считается, что дополнительные напряжения, вызываемые наличием трещины в слое, малы по сравнению с напряжениями основного нелинейного напряженно-деформированного состояния слоя. Это дает возможность линеаризовать задачу по определению дополнительных напряжений на фоне основного напряженного состояния. Такая линеаризованная задача сводится к интегральному уравнению первого рода с сингулярным ядром относительно производной от функции, описывающей раскрытие трещины. Для разных значений безразмерного параметра, характеризующего преднапряжение слоя, строятся асимптотические решения указанного интегрального уравнения при малых значениях безразмерного параметра, характеризующего толщину слоя. Приводятся примеры.

Аналогичные задачи о трещинах в преднапряженных телах рассматривались ранее (см., например, [1, 2]). Данная задача изучается здесь впервые.

1. Постановка задачи и исходные соотношения. Рассмотрим бесконечный упругий слой с потенциалом гармонического типа. В начальном состоянии слой находится в условиях однородного в его плоскости поля нормальных напряжений. Начальные нормальные и касательные напряжения на площадках, параллельных границам слоя, отсутствуют. При сделанных предположениях перемещения и напряжения в начальном состоянии определяются формулами [3]

$$\begin{aligned} u_j^0 &= (\lambda_j - 1)x_j = (\lambda_j - 1)\lambda_j^{-1}y_j, & \sigma_{jj}^0 &= 2\mu\lambda_j^{-1}(\lambda_j - \lambda_2) \\ \lambda_j &= \text{const}, \quad j = 1, 2, 3; & \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) &= -2\mu(\lambda_2 - 1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x_j – лагранжевы координаты, y_j – декартовы координаты начального состояния, λ и μ – упругие постоянные, λ_j – коэффициенты удлинений вдоль осей x_j , они всегда положительны. Область, занятая слоем в начальном состоянии, определяется условиями

$$|y_1| < \infty, \quad |y_2| \leq h, \quad |y_3| < \infty$$

Пусть в срединной плоскости слоя имеется трещина, занимающая в начальном состоянии область

$$|y_1| \leq a, \quad y_2 = 0, \quad |y_3| < \infty$$

К берегам трещины приложено равномерное давление q , а границы слоя $y_2 = \pm h$ свободны от нагрузок. Будем полагать, что возмущения поля начальных напряжений нагрузкой q малы. В этом случае задачу определения дополнительных напряжений и перемещений можно линеаризовать на фоне основного нелинейного напряженно-деформированного состояния (1.1). При этом дополнительные перемещения u_1 и u_2 точек слоя, вызванные нагрузкой q , удовлетворяют следующим уравнениям равновесия, описывающим плоскую деформацию [3]:

$$\begin{aligned} \alpha^2 b_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} + b_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_2^2} + \alpha \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1 \partial y_2} &= 0 \\ b_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_2^2} + \alpha^2 b_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1^2} + \alpha \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1 \partial y_2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$b_1 = \frac{(1 + \alpha)(\beta + 2)}{(1 + \alpha)\beta + 2}, \quad b_2 = \frac{2\alpha}{(1 + \alpha)\beta + 2}; \quad \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\mu}$$

а дополнительные напряжения σ_{21} и σ_{22} связаны с дополнительными перемещениями соотношениями [3]

$$\sigma_{21} = \frac{2\mu}{\lambda_3(1 + \alpha)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right), \quad \sigma_{22} = \frac{\mu}{\lambda_3 \alpha} \left(\alpha \beta \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + (\beta + 2) \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right) \quad (1.3)$$

(аналогичные формулы для дополнительных напряжений σ_{11} и σ_{12} далее не понадобятся).

2. Сведение задачи к интегральному уравнению. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} y_2 = h: \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0 \\ y_2 = 0: \sigma_{21} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y_1} = \tilde{\gamma}'(y_1) \\ |y_1| \leq a: \tilde{\gamma}'(y_1) = \gamma'(y_1); \quad |y_1| > a: \tilde{\gamma}'(y_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для ее исследования будем искать решение уравнений (1.2) в форме [3]

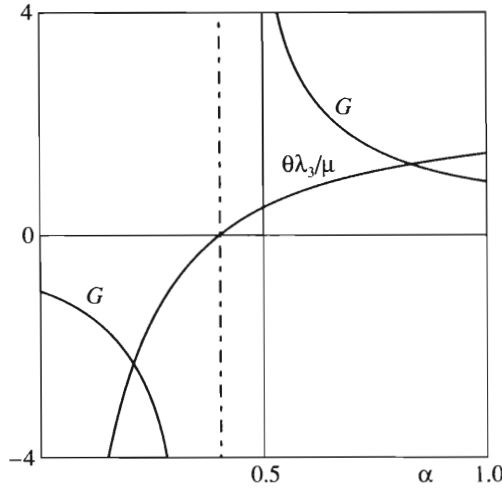
$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1 \partial y_2}, \quad u_2 = \left(b_1 \alpha \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{b_2}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi \quad (2.2)$$

При этом первое уравнение (1.2) удовлетворяется тождественно, а второе приводит к следующему уравнению для функций χ [3]:

$$\left(\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right)^2 \chi = 0 \quad (2.3)$$

Далее функцию χ будем искать в виде интеграла Фурье

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\gamma, y_2) e^{-i\gamma y_1} d\gamma \quad (2.4)$$



Фиг. 1

Подставляя выражение (2.4) в уравнение (2.3), найдем для трансформанты Фурье $X(\gamma, y_2)$ после решения обыкновенного дифференциального уравнения выражение

$$X = [C_1(\gamma) + C_2(\gamma)\alpha|\gamma|y_2]e^{\alpha|\gamma|y_2} + [C_3(\gamma) + C_4(\gamma)\alpha|\gamma|y_2]e^{-\alpha|\gamma|y_2} \tag{2.5}$$

Теперь для определения величин $C_l(\gamma)$ ($l = 1, 2, 3, 4$) представим разрывную функцию $\tilde{\gamma}'(y_1)$ вида (2.1) в форме интеграла Фурье

$$\tilde{\gamma}'(y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\gamma)e^{-i\gamma y_1} d\gamma \tag{2.6}$$

и перезапишем с помощью формул (1.3), (2.2) и (2.4) граничные условия (2.1) в трансформантах Фурье. В результате с учетом формулы (2.5) придем к системе четырех алгебраических уравнений относительно величин $C_l(\gamma)$. Решив эту систему найдем, в частности,

$$\sigma_{22}(y_1, 0) = -\frac{i\theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\gamma) \frac{2(\text{sh}^2 \alpha h \gamma - \alpha^2 h^2 \gamma^2 G^2)}{\text{sh} 2\alpha h \gamma + 2\alpha h \gamma G} e^{-i\gamma y_1} d\gamma \tag{2.7}$$

$$\theta = \mu \frac{(3\alpha - 1)\beta + 4\alpha - 2}{\lambda_3 \alpha (\beta + 2)}, \quad G = \frac{(\alpha + 1)\beta + 2}{(3\alpha - 1)\beta + 4\alpha - 2}$$

Величину θ назовем контактной жесткостью.

На фиг. 1 даны зависимости величин $\theta\lambda_3/\mu$ и G от α при $\beta = 2$. Видно, что при некотором значении $\alpha = \alpha_{cr} < 1$ (в данном случае $\alpha_{cr} = 2/5$) величина $\theta\lambda_3/\mu$ обращается в нуль, а величина G обращается в бесконечность. Далее будем считать, что $\alpha > \alpha_{cr}$.

Перейдем к основной задаче. Ее граничные условия отличаются от граничных условий вспомогательной задачи (2.1) только четвертым условием, которое теперь имеет вид

$$y_2 = 0, \quad |y_1| \leq a: \sigma_{22} = -q; \quad y_2 = 0, \quad |y_1| > a: \frac{\partial u_2}{\partial y_1} = 0 \tag{2.8}$$

где q – равномерное давление, действующее на берега трещины.

Обращая соотношение (2.6), найдем

$$\Gamma(\gamma) = \int_{-a}^a \gamma'(\xi) e^{i\gamma\xi} d\xi \quad (2.9)$$

Подставляя выражение (2.9) в соотношение (2.7) и приравнявая затем выражение (2.7) при $|y_1| \leq a$ согласно первому условию (2.8) величине $-q$, приходим к следующему интегральному уравнению (ИУ) относительно функции $\gamma'(y_1)$:

$$\int_{-a}^a \gamma'(\xi) K\left(\frac{\xi - y_1}{H}\right) d\xi = -\frac{\pi H}{\theta} q, \quad |y_1| \leq a, \quad H = \alpha h \quad (2.10)$$

$$K(z) = \int_0^\infty L(u) \sin uz du, \quad L(u) = \frac{2(\operatorname{sh}^2 u - u^2 G^2)}{\operatorname{sh} 2u + 2uG}$$

Заметим, что для функции $L(u)$ имеют место асимптотические соотношения

$$L(u) = 1 + O(e^{-2u}), \quad (u \rightarrow \infty) \quad (2.11)$$

$$L(u) = (1 - G)u - \frac{1 - 2G}{3(1 + G)} u^3 + O(u^5) \quad (u \rightarrow 0)$$

Далее будут использованы интегралы [4]

$$\int_0^\infty \sin uz du = \frac{1}{z}, \quad \int_0^\infty \cos uz du = \pi \delta(z) \quad (2.12)$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция. В силу первого соотношения (2.11) и первого интеграла (2.12) убеждаемся, что ИУ (2.10) сингулярное.

Если $G = 1$ (это будет при $\alpha = 1$) и $\lambda_3 = 1$, то в силу последней формулы (1.1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. В этом случае ИУ (2.10) переходит в ИУ задачи о трещине в предварительно ненапряженном слое со свободными границами. Такая задача была рассмотрена ранее [5]. Заметим также, что в этом частном случае в силу второй формулы (2.7)

$$\theta = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{\mu}{1 - \nu} \quad (2.13)$$

где μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

3. Вырожденное решение интегрального уравнения (2.10) при $\alpha \neq 1$. Заметим, что $\gamma'(y_1)$ – нечетная функция, и проинтегрируем ИУ (2.10) один раз по y_1 . Будем иметь

$$\int_{-a}^a \gamma'(\xi) M\left(\frac{\xi - y_1}{H}\right) d\xi = -\frac{\pi}{\theta} q y_1, \quad |y_1| \leq a \quad (3.1)$$

$$M(z) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos uz du \quad (3.2)$$

Можно показать, что ИУ (2.10) и (3.1) эквивалентны, а их общее решение имеет форму [6]

$$\gamma'(y_1) = \frac{\omega(y_1)}{\sqrt{a^2 - y_1^2}} \quad (3.3)$$

где $\omega(y_1)$ – по крайней мере непрерывная функция.

Известно [6], что вырожденное решение ИУ (3.1) при малых значениях параметра $\varepsilon = H/a$ определится, если в ядре $M(z)$ вида (3.2) заменить функцию $L(u)$ первым членом ее разложения в нуле. В силу сказанного, согласно второй формуле (2.11) и с учетом второго интеграла (2.12), найдем

$$M(z) \sim (1 - G)\pi\delta(z) \quad (3.4)$$

Подставляя это выражение в ИУ (3.1) и вычисляя интеграл, пользуясь известным свойством дельта-функции, приходим к следующему выражению для вырожденного решения:

$$\gamma'(y_1) = -\frac{qy_1}{(1 - G)H\theta} \quad (3.5)$$

Оно не имеет характерной корневой особенности в точках $x = \pm a$, как это требуется формой (3.3), и поэтому называется вырожденным.

Интегрируя равенство (3.5) по y_1 и используя условие смыкания берегов трещины

$$\gamma(\pm a) = 0 \quad (3.6)$$

окончательно получим

$$\gamma(y_1) = \frac{q(a^2 - y_1^2)}{2(1 - G)H\theta} \quad (3.7)$$

Анализируя формулу (3.7), видим, что при $G > 1$ ($\alpha < 1$) раскрытие трещины отрицательное. Физически это означает, что при значениях $\alpha_{cr} < \alpha < 1$ трещина не раскрывается. Далее будем рассматривать случай, когда $\alpha \geq 1$.

Из формулы (3.7) видно, что в области, занимаемой трещиной, при очень малых значениях параметра ε , когда можно ограничиться вырожденным решением, слой деформируется подобно мембране с заземленными краями $y_1 = \pm a$.

4. Решение уравнения (2.10) типа пограничного слоя при $\alpha > 1$. Построим решения типа пограничного слоя при малых значениях параметра ε в окрестности точек $y_1 = \pm a$. Для этого в ИУ (3.1) заменим переменные по формулам

$$t = \frac{a \pm y_1}{H}, \quad \tau = \frac{a \pm \xi}{H} \quad (4.1)$$

введем обозначение

$$\phi_{\pm}(\tau) = \gamma'(\pm \tau H \mp a) \quad (4.2)$$

и устремим ε к нулю в верхних пределах изменения τ и t . В результате приходим к следующим ИУ относительно функций $\phi_{\pm}(t)$:

$$\int_0^{\infty} \phi_{\pm}(\tau)M(\tau - t)d\tau = -\frac{\pi q}{H\theta}(\pm tH \mp a) \quad (0 \leq t < \infty) \quad (4.3)$$

Решения ИУ (4.3) могут быть найдены методом Винера–Хопфа [7].

Для построения решений в аналитическом виде аппроксимируем функцию $L(u)$ выражением

$$L_*(u) = \frac{u\sqrt{u^2 + A^2}}{u^2 + B^2} \quad (A > 0, B > 0) \quad (4.4)$$

и рассмотрим ИУ вида (4.3) с ядром

$$M_*(z) = \int_0^{\infty} \frac{L_*(u)}{u} \cos uz du \tag{4.5}$$

откуда найдем $\varphi_{\pm}^*(t)$.

Известно [6], что при таком подходе относительная погрешность

$$\sup_t |\varphi_{\pm}(t) - \varphi_{\pm}^*(t)| |\varphi_{\pm}(t)|^{-1} \tag{4.6}$$

не будет превосходить относительной погрешности

$$\sup_u |L(u) - L_*(u)| |L(u)|^{-1} \tag{4.7}$$

и будет тем меньше, чем точнее функция $L_*(u)$ приближает функцию $L(u)$ при малых значениях u . Заметим, что функция $L_*(u)$ стремится к единице при $u \rightarrow \infty$, как это требуется первым соотношением (2.11), и для минимизации погрешности решений $\varphi_{\pm}^*(t)$ подберем постоянные аппроксимации (4.4) так, чтобы для $L_*(u)$ выполнялось второе соотношение (2.11). Это будет, если

$$\frac{A}{B^2} = 1 - G, \quad \frac{2A^2 - B^2}{2AB^4} = \frac{1 - 2G}{3(1 + G)} \tag{4.8}$$

Введем в рассмотрение оригиналы по Лапласу–Карсону функций

$$a_k(p) = \frac{1}{p^k \sqrt{p + A}}, \quad k = -2, -1, 0, 1, 2, 3 \tag{4.9}$$

Имеем [8]

$$\begin{aligned} b_{-2}(t) &= -\frac{Ae^{-At}}{\sqrt{\pi t}} - \frac{e^{-At}}{2t\sqrt{\pi t}} + C, \quad b_{-1}(t) = \frac{e^{-At}}{\sqrt{\pi t}} \\ b_0(t) &= \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{At})}{\sqrt{A}}, \quad b_1(t) = \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{At})}{\sqrt{A}} \left(t - \frac{1}{2A} \right) + \frac{te^{-At}}{A\sqrt{\pi t}} \\ b_2(t) &= \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{At})}{2\sqrt{A}} \left(t^2 - \frac{t}{A} + \frac{3}{4A^2} \right) + \frac{te^{-At}}{2A\sqrt{\pi t}} \left(t - \frac{3}{2A} \right) \\ b_3(t) &= \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{At})}{6\sqrt{A}} \left(t^3 - \frac{3}{2A}t^2 + \frac{9}{4A^2}t - \frac{15}{8A^3} \right) + \frac{te^{-At}}{6A\sqrt{\pi t}} \left(t^2 - \frac{2}{A}t + \frac{15}{4A^2} \right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

где C – бесконечная постоянная, $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл вероятности (полностью все формулы (4.10) будут использованы в разд. 6). Теперь в результате применения техники метода Винера–Хопфа [7] (подробности опускаем) получим

$$\begin{aligned} \varphi_{\pm}^*(t) &= -\frac{q}{H\theta} [\pm H\varphi_1(t) \mp a\varphi_0(t)] \\ \varphi_0(t) &= \frac{B}{\sqrt{A}} b_{-1}(t) + \frac{B^2}{\sqrt{A}} b_0(t) \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\varphi_1(t) = \frac{B-2A}{2A^{3/2}}b_{-1}(t) + \frac{B^2}{2A^{3/2}}b_0(t) + \frac{B^2}{\sqrt{A}}b_1(t)$$

Можно убедиться, что решение типа пограничного слоя (4.11) автоматически экспоненциально срывается с вырожденным решением (3.5). В силу этого главный член асимптотики решения ИУ (2.10) при малых значениях параметра ϵ можно приближенно представить в виде

$$\gamma'(y_1) \approx \varphi_+^* \left(\frac{a+y_1}{H} \right) + \varphi_-^* \left(\frac{a-y_1}{H} \right) + \frac{qy_1}{(1-G)H\theta} \quad (4.12)$$

Заметим, что соотношение (4.12) уже имеет форму (3.2).

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений в вершине трещины (на ее продолжении) найдем по формуле (3.5) работы [9]

$$N = -\lim_{y_1 \rightarrow a} \theta \gamma'(y_1) \sqrt{a-y_1} \quad (4.13)$$

На основании соотношений (4.11) и (4.12) имеем

$$\frac{N}{q\sqrt{a}} \approx \frac{1}{2A\sqrt{\pi A\epsilon}} [(-B+2A)\epsilon + 2BA] \quad (4.14)$$

5. Вырожденное решение интегрального уравнения (2.10) при $\alpha = 1$. В случае $\alpha = 1$ имеем $G = 1$, и поведение функции $L(u)$ при $u \rightarrow 0$ качественно меняется. Именно в отличие от второй формулы (2.11) найдем

$$L(u) = \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{30}u^5 + O(u^7) \quad (u \rightarrow 0) \quad (5.1)$$

Проинтегрируем ИУ (2.10) три раза по y_1 . Будем иметь

$$\int_{-a}^a \gamma'(\xi) N \left(\frac{\xi - y_1}{H} \right) d\xi = \frac{\pi}{6H^2\theta} (qy_1^3 + D_* y_1), \quad |y_1| \leq a \quad (5.2)$$

$$N(z) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u^3} \cos uz du$$

где D_* – пока произвольная постоянная.

ИУ (5.2) уже неэквивалентно ИУ (2.10). Его общее решение дается формулой [10, 11]

$$\gamma'(y_1) = \frac{\Omega(y_1)}{(a^2 - y_1^2)^{3/2}} \quad (5.3)$$

где функция $\Omega(y_1)$ имеет по крайней мере непрерывную первую производную. Заметим, что эквивалентность этих ИУ восстановится, и структура (5.3) перейдет в структуру (3.2), если $\Omega(\pm a) = 0$. Этого можно добиться соответствующим выбором постоянной D_* , что и будет сделано в разд. 6.

Как и выше, вырожденное решение ИУ (5.2) при малых значениях параметра ϵ определится, если в ядре $N(z)$ вида (5.2) заменить функцию $L(u)$ первым членом ее разложения в нуле (5.1). В силу сказанного и с учетом второй формулы (2.12) найдем

$$N(z) \sim \pi \delta(z) / 6 \quad (5.4)$$

Подставляя выражение (5.4) в ИУ (5.2) и вычисляя интеграл, приходим к следующему выражению для вырожденного решения:

$$\Upsilon'(y_1) = \frac{1}{H^3\theta}(qy_1^3 + D_*y_1) \tag{5.5}$$

Оно, как и следовало ожидать, не обладает структурой (5.3).

В разд. 6 будет показано, что для D_* при малых ϵ имеет место асимптотическая формула

$$D_* = -qa^2[1 + O(\epsilon)] \tag{5.6}$$

Подставляя выражение (5.6) в равенство (5.5), пренебрегая членом $O(\epsilon)$ и интегрируя по y_1 , с учетом условия смыкания берегов трещины (3.6) найдем

$$\Upsilon(y_1) = \frac{q}{4H^3\theta}(a^2 - y_1^2)^2 \tag{5.7}$$

Из формулы (5.7) видно, что в области, занимаемой трещиной, при очень малых значениях параметра ϵ , когда можно ограничиться вырожденным решением, слой деформируется подобно пластине Кирхгофа–Лява с защемленными краями $y_1 = \pm a$.

6. Решение уравнения (2.10) типа пограничного слоя при $\alpha = 1$. Как и выше, произведем в ИУ (5.2) замену переменных (4.1), введем обозначение (4.2) и устремим ϵ к нулю в верхних пределах изменения τ и t . В результате приходим к следующим ИУ:

$$\int_0^\infty \Phi_\pm(\tau)N(\tau - t)d\tau = \frac{\pi}{6H^3\theta}[q(\pm tH \mp a)^3 + D_*(\pm tH \mp a)] \quad (0 \leq t < \infty) \tag{6.1}$$

Решения ИУ (6.1) вновь могут быть найдены методом Винера–Хопфа [7].

Для построения решений в аналитическом виде аппроксимируем функцию $L(u)$ выражением

$$L_*(u) = \frac{u^3 \sqrt{u^2 + A^2}}{(u^2 + B^2)^2} \quad (A > 0, B > 0) \tag{6.2}$$

и рассмотрим ИУ вида (6.1) с ядром

$$N_*(z) = \int_0^\infty \frac{L_*(u)}{u^3} \cos uz du \tag{6.3}$$

откуда найдем $\Phi_\pm^*(t)$.

Заметим, что функция $L_*(u)$ стремится к единице при $u \rightarrow \infty$, как это требуется первым соотношением (2.11), и подберем постоянные аппроксимации (6.2) так, чтобы для $L_*(u)$ выполнялось соотношение (5.1). Это будет, если

$$\frac{A}{B^4} = \frac{1}{6}, \quad \frac{4A^2 - B^2}{2B^6 A} = \frac{1}{30} \tag{6.4}$$

Введем обозначение

$$k = B/A$$

и в результате применения техники метода Винера–Хопфа [7] получим

$$\begin{aligned}\varphi_{\pm}^*(t) &= \frac{1}{6H^3\theta} \{q[\pm H^3\varphi_3(t) \mp 3H^2a\varphi_2(t) \pm 3Ha^2\varphi_1(t) \mp a^3\varphi_0(t)] + D_*[\pm\varphi_1(t) \mp a\varphi_0(t)]\} \\ \varphi_0(t) &= \frac{B^2}{\sqrt{A}}b_{-2}(t) + \frac{2B^3}{\sqrt{A}}b_{-1}(t) + \frac{B^4}{\sqrt{A}}b_0(t) \\ \varphi_1(t) &= \frac{B}{\sqrt{A}}\left(-2 - \frac{1}{2}\kappa\right)b_{-2}(t) + \frac{B^2}{\sqrt{A}}(-3 + \kappa)b_{-1}(t) + \frac{B^4}{2A^{3/2}}b_0(t) + \frac{B^4}{\sqrt{A}}b_1(t) \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{A}}\left(2 - 2\kappa + \frac{3}{4}\kappa^2\right)b_{-2}(t) + \frac{B^2}{A^{3/2}}\left(-3 + \frac{3}{2}\kappa\right)b_{-1}(t) + \\ &+ \frac{B^2}{\sqrt{A}}\left(-4 + \frac{3}{4}\kappa^2\right)b_0(t) + \frac{B^4}{A^{3/2}}b_1(t) + \frac{2B^4}{\sqrt{A}}b_2(t) \\ \varphi_3(t) &= \frac{1}{A^{3/2}}\left(3 - \frac{9}{2}\kappa + \frac{15}{8}\kappa^2\right)b_{-2}(t) + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(6 - \frac{27}{4}\kappa^2 + \frac{15}{4}\kappa^3\right)b_{-1}(t) + \\ &+ \frac{B^2}{A^{3/2}}(-6 + 15\kappa^2)b_0(t) + \frac{B^2}{\sqrt{A}}(-12 + 9\kappa^2)b_1(t) + \frac{3B^4}{A^{3/2}}b_2(t) + \frac{6B^4}{\sqrt{A}}b_3(t)\end{aligned}\quad (6.5)$$

Можно убедиться, что здесь решение типа погранслоя (6.5) также автоматически сращивается с вырожденным решением (5.5), но уже степенным образом. В силу этого главный член асимптотики решения интегрального уравнения (2.10) при малых значениях параметра ε можно приближенно представить в виде

$$\Upsilon'(y_1) \approx \varphi_+^*\left(\frac{a+y_1}{H}\right) + \varphi_-^*\left(\frac{a-y_1}{H}\right) - \frac{1}{H^3\theta}(qy_1^3 + D_*y_1) \quad (6.6)$$

Заметим, что (6.6) уже имеет форму (5.3). Однако необходимо, чтобы (6.6) имело форму (3.2), для этого нужно в (6.5) приравнять нулю коэффициент при $b_{-2}(t)$. В результате этого для D_* получим выражение

$$D_* = -\frac{qa^2p_1(\varepsilon)}{4ABp_2(\varepsilon)} \quad (6.7)$$

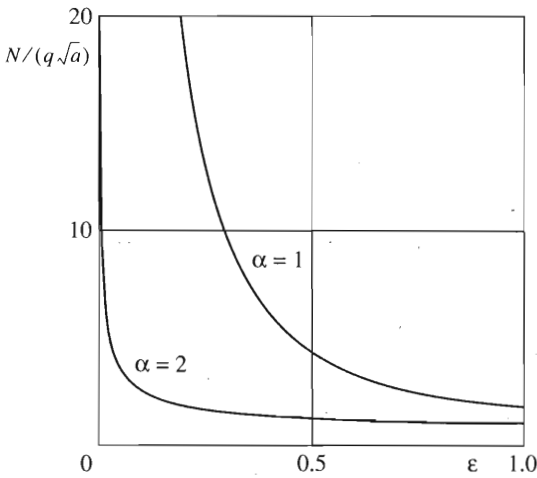
$$\begin{aligned}p_1(\varepsilon) &= (-24 + 36\kappa - 15\kappa^2)\varepsilon^3 + (48 - 48\kappa + 18\kappa^2)\varepsilon^2 + \\ &+ BA(48 + 12\kappa)\varepsilon + 8B^2A, \quad p_2(\varepsilon) = (4 + \kappa)\varepsilon + 2B\end{aligned}$$

Видно, что разложение D_* по степеням ε приводит к асимптотической формуле (5.6).

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений в вершине трещины найдем по формуле (4.13). На основании формул (6.5)–(6.7) имеем

$$\frac{N}{q\sqrt{a}} \approx \frac{p_3(\varepsilon)}{12\varepsilon p_2(\varepsilon)\sqrt{\pi A\varepsilon}} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}p_3(\varepsilon) &= (48 - 24\kappa + 12\kappa^2 - 24\kappa^3 + 15\kappa^4)\varepsilon^3 + \\ &+ B(96 - 48\kappa + 42\kappa^2 - 18\kappa^3)\varepsilon^2 + B^2(48 - 12\kappa)\varepsilon + B^3(8 + 16\kappa)\end{aligned}$$



Фиг. 2

7. Примеры. Пусть $\beta = 2$. Рассмотрим случаи $\alpha = 2$ ($G = 1/2$) и $\alpha = 1$ ($G = 1$).

Для аппроксимации (4.4), используя формулы (4.8), получим $A = 1$, $B = \sqrt{2}$, погрешность аппроксимации 11%.

Для аппроксимации (6.2), используя формулы (6.4), получим $A = 0.855878$, $B = 1.505361$, погрешность аппроксимации 26%.

На фиг. 2 даны зависимости $N/(q\sqrt{a})$ от ϵ , подсчитанные по формуле (4.14) ($\alpha = 2$) и формуле (6.8) ($\alpha = 1$).

Критерии разрушения для преднапряженных тел, использующие коэффициент N интенсивности нормальных напряжений в вершине трещины, даны ранее [1].

Замечание. Из сравнения кривых 1 и 2 фиг. 2 можно сделать вывод, что величина параметра α , характеризующего предна-

пряжение слоя, существенно влияет на величину коэффициента N .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00346) и программы Министерства образования “Университеты России” (УР.04.03.060).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1983. 295 с.
2. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука. Физматлит, 1993. 224 с.
3. Гузь А.Н. Комплексные потенциалы плоской линеаризованной задачи теории упругости (сжимаемые тела) // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 5. С. 72–83.
4. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
5. Александров В.М., Сметанин Б.И. О равновесных продольных трещинах в пластинах // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку, 1966. М.: Наука, 1966. С. 20–24.
6. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. Noble B. Methods based on the Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L.: Pergamon Press, 1958 = Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
8. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 466 с.
9. Сметанин Б.И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое // Инж. ж. МТТ. 1968. № 2. С. 115–122.
10. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
11. Зеленцов В.Б. О решении некоторых интегральных уравнений смешанных задач теории изгиба пластин // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 983–991.