

УДК 531.36:534.1

© 2005 г. С. Г. Крыжевич, В. А. Плисс

ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ КОЛЕБАНИЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

Исследуется движение точечной массы на пружине с трением и условием абсолютно упругого удара об ограничитель. Для рассматриваемой задачи аналитически выводятся достаточные условия наличия хаотических колебаний. Описывается механизм возникновения таких колебаний.

В последнее время удалось установить существование хаотических режимов для разных виброударных систем ([1], § 2.4; [2–13]), однако в большинстве случаев это доказывалось численным путем. Исключением служит исследование динамики мяча, подсакивающего на колеблющемся столе ([1], § 2.4). Математическая модель этой задачи – дискретная динамическая система, в которой в качестве переменных состояния выбираются момент времени, соответствующий удару, и скорость удара. Отображение, задающее динамическую систему, ставит в соответствие этой паре переменных пару, отвечающую следующему по времени удару. Было показано, что для рассматриваемой системы существует так называемая “подкова Смейла” [14–16], что обеспечивает хаотическое поведение решений. Однако применение этого подхода к рассматриваемой задаче связано со значительными трудностями.

Ниже предлагается новый метод аналитического исследования поведения решений систем с ударом. В качестве фазовых переменных выбираются классические переменные: координата точки и ее скорость. Выясняется, что решения, соответствующие сколь угодно близким начальным данным, могут иметь различное число ударов за промежуток времени, равный периоду рассматриваемой системы. Показывается, что этот факт влечет наличие “подковы Смейла”.

1. Постановка задачи. Общие свойства изучаемой системы. Рассмотрим движение материальной точки по прямой под действием линейной восстанавливающей силы, линейного сопротивления среды и кусочно-постоянной периодической вынуждающей силы. Считаем, что рассматриваемая точка абсолютно упруго ударяется об ограничитель. Движение такой точки описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + x = f(t); \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, T_1) \\ -1, & \text{если } t \in [T_1, T) \end{cases} \quad (1.1)$$

Пусть $f(t)$ – периодическая функция периода $T = T_1 + T_2$, определенная на полуинтервале $[0, T)$ указанным выше образом. Уравнение (1.1) задано при $x \geq 0$, а условие абсолютно упругого удара выражается следующим образом: если $x(t_0) = 0$, а $\dot{x}(t_0 - 0) \leq 0$, то $\dot{x}(t_0 + 0) = -\dot{x}(t_0 - 0)$; если $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0 - 0) = 0$ и $kT + T_1 \leq t_0 < (k + 1)T$, то $x(t) = \dot{x}(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq (k + 1)T$. В дальнейшем считаем, что $\epsilon \in (0, 1)$, $T_2 > 3T_1$, а величина T_1 – большой параметр. Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим эквивалентную систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2\epsilon y - x + f(t) \quad (1.2)$$

Будем считать, что система (1.2) задана в области

$$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \cup \{(0, y) : y \geq 0\}$$

Эту систему или уравнение (1.1) с указанными условиями удара будем называть системой A . Как следует из полученных ранее результатов [17], для любых t_0, x_0 и y_0 , удовлетворяющих условиям $(x_0, y_0) \in \Lambda$, решение системы A с начальными условиями $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ определено при всех t , единственно и непрерывно по начальным данным при всех значениях t , таких, что $x(t) \neq 0$.

Покажем, что рассматриваемая система диссипативна. Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму

$$W(x, y) = x^2 + y^2 + 2\epsilon xy$$

Для любого решения $(x(t), y(t))$ системы A функция $w(t) = W(x(t), y(t))$ непрерывна, в том числе и в точках ударов. Рассмотрим ее производную в силу системы

$$\dot{W} = -2\epsilon x^2 - 2\epsilon y^2 - 4\epsilon^2 xy + 2yf(t) + 2\epsilon xf(t) = -2\epsilon W + 2f(t)(y + \epsilon x)$$

Отсюда следует, что существует такое $R > 0$, что $\dot{W} < 0$, если $W > R$. Тогда все решения системы A попадают в компакт

$$\Xi_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: W(x, y) \leq 2R\}$$

и остаются там с течением времени.

Поведение решений системы на конечных отрезках времени определяется знаком ее правой части. Рассмотрим уравнения

$$\ddot{x} + 2\epsilon \dot{x} + x = 1 \tag{1.3}$$

$$\ddot{x} + 2\epsilon \dot{x} + x = -1 \tag{1.4}$$

с теми же условиями удара. Получившиеся виброударные системы будем называть системой B и системой C соответственно. Условимся далее считать все числовые величины, обозначаемые буквами c и C , положительными константами. Назовем функции $a(t)$ и $b(t)$, определенные на луче $[t_0, +\infty)$, эквивалентными ($a(t) \sim b(t)$), если существует такое $t_1 \geq t_0$, что $c|a(t)| \leq |b(t)| \leq C|a(t)|$ для любого $t \geq t_1$. Примем также стандартные обозначения: $a(t) = o(b(t))$, если $a(t)/b(t) \rightarrow 0$, и $a(t) = O(b(t))$, если $|a(t)| \leq C|b(t)|$.

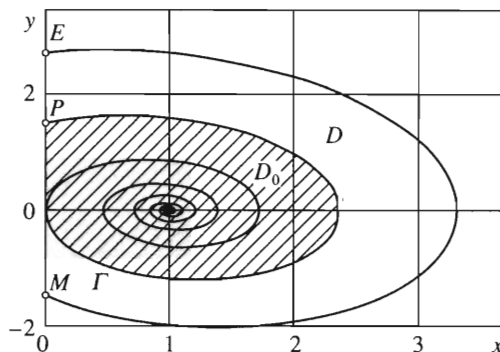
В разд. 2 и 3 будут получены вспомогательные результаты о поведении решений систем B и C соответственно; в разд. 4 будет исследовано, каким образом решения одной системы переходят в решения другой в моменты времени, когда правая часть меняет знак; в разд. 5 будет построено множество, содержащее все неблуждающие точки отображения Пуанкаре системы A , и, наконец, в последнем разделе будет выяснена структура множества неблуждающих точек и показано, что это множество содержит "подкову Смейла".

2. Поведение решений на отрезках, на которых $f(t) = 1$. Решения системы B в промежутках между ударами имеют вид

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + (A - 1)\exp(-\epsilon(t - t_0))\cos(v(t - t_0)) + \\ &+ B\exp(-\epsilon(t - t_0))\sin(v(t - t_0)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$v = \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad A = x(t_0), \quad B = (y(t_0) + 0) + \epsilon x(t_0)/v$$

Видно, что положение равновесия $x \equiv 1$ системы B асимптотически устойчиво, а все остальные решения рассматриваемой системы сходятся к этому положению равновесия при $t \rightarrow +\infty$. Для решений уравнения (1.3) это ясно, а для системы B следует из того факта, что при ударе расстояние от точки $(0, y_0)$ до точки $O_1 = (1, 0)$ не меняется от замены y_0 на $-y_0$. Поскольку система B автономна, можно говорить о ее траекториях.



Фиг. 1

Обозначим через Γ ту из них, которая проходит через точку O – начало координат. Пусть $P = (0, y_1)$, точка последнего трансверсального пересечения Γ с осью Oy и D_0 – замкнутое множество, ограниченное дугой OP кривой Γ и отрезком оси Oy . Продолжим Γ в сторону убывания времени до следующего пересечения с осью $x = 0$ в точке $E = (0, y_2)$. Возьмем точку $M = (0, -y_1)$, симметричную P относительно начала координат, и определим D как замкнутую область, ограниченную дугой ME кривой Γ и соответствующим отрезком оси Oy . Ясно, что $D_0 \subset D$. Все решения, начинающиеся внутри области $\text{Int}D_0$, не имеют ударов при возрастании времени. Решения, начинающиеся в области $\text{Int}(D \setminus D_0)$, имеют ровно один момент удара, после чего попадают в область $\text{Int}D_0$ (см. фиг. 1, где указанные выше построения проведены для $\epsilon = 0.1$).

Пусть $x(t, x_0, y_0)$ – решение задачи Коши для системы B с начальными данными $(0, x_0, y_0)$. Определим отображение

$$F_1(x_0, y_0) = (x(T_1, x_0, y_0), \dot{x}(T_1 + 0, x_0, y_0))$$

Если значение T_1 достаточно велико, то сужение $F_1|_D$ отображения F_1 на множество D непрерывно, причем $F_1(D) \subset D_0$. Поскольку решения системы B с начальными данными из D_0 не имеют ударов при возрастании времени, для любых точек $z_{1,2} \in D_0$ справедлива оценка

$$\text{dist}(F_1(z_0), F_1(z_1)) \leq C \exp(-\epsilon T_1) \text{dist}(z_0, z_1)$$

3. Поведение решений на отрезках, на которых $f(t) = -1$. Система C также имеет ровно одну неподвижную точку – начало координат, однако фазовый портрет этой системы отличается от фокуса. На фиг. 2, *a* изображен участок траектории системы C , соответствующий значению $\epsilon = 0.2$ и начальным условиям $x(0) = 0.8, \dot{x}(0) = 0$.

Лемма 1. Система C имеет единственное положение равновесия – точку O , начало координат. Любое решение системы C стремится к нулю с ростом времени.

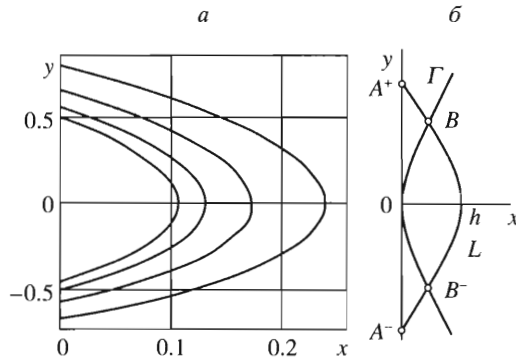
Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V = x^2 + 2x + y^2 + 2\epsilon xy$$

Она положительно определена на множестве Λ . Отметим, что для любого решения $(x(t), y(t))$ системы C функция $v(t) = V(x(t), y(t))$ непрерывна по t , в том числе и в точках ударов. Вычислим ее производную в силу рассматриваемой системы:

$$\dot{v} = -2\epsilon y^2 - 2\epsilon x - 2\epsilon x^2 - 2\epsilon^2 xy$$

Таким образом, $-2\epsilon v \leq \dot{v} \leq -\epsilon v$. Поэтому $v(t) = O(\exp(-\epsilon t))$ и $\exp(-2\epsilon t) = O(v(t))$, если $x(t) \neq 0$.



Фиг. 2

Определим F_2 как отображение Пуанкаре для системы C за время T_2 . Проследим, как будет меняться расстояние между точками под действием отображения F_2 . Фиксируем некоторое ненулевое решение $z(t)$ системы C , начинающееся при $t = 0$ в малой окрестности точки $O_1 = (1, 0)$. Заметим, что в силу леммы 1 решение $z(t)$ на любом конечном отрезке времени имеет конечное число ударов. Пусть $t_k, k \in \mathbb{N}$ – моменты ударов, $y_k = y(t_k + 0)$.

Следующий результат дает асимптотическую оценку скорости стремления решения системы C к нулю с ростом времени.

Лемма 2. Для любой окрестности $B \subset D$ точки O_1 и любого $z(0) \in B$

$$y_k/y_1 = \exp(-\varepsilon(t_k - t_1)(2/3 + o(1))) \quad (3.1)$$

где величина $o(1)$ равномерно по $z(0)$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$U(x, y) = (x + 1)^2 + y^2 + 2\varepsilon y(x + 1)$$

Производная функции U в силу уравнения (1.4) равна $-2\varepsilon U$. Фиксировав решение $z(t) = (x(t), y(t))$ системы A , рассмотрим функцию $u(t) = U(x(t), y(t))$. Тогда если t_k и t_{k+1} – соседние моменты ударов, то

$$u(t_{k+1} - 0) = \sigma_k u(t_k + 0), \quad \sigma_k = \exp(-2\varepsilon(t_{k+1} - t_k)) \quad (3.2)$$

Вместе с тем

$$x(t_k) = x(t_{k+1}) = 0, \quad y(t_k + 0) = y_k, \quad y(t_{k+1} + 0) = -y_{k+1}$$

Таким образом, равенство (3.2) можно переписать в виде

$$y_{k+1}^2 - 2\varepsilon y_{k+1} + 1 = \sigma_k (y_k^2 + 2\varepsilon y_k + 1) \quad (3.3)$$

Введем обозначения

$$\delta_k = y_k - y_{k+1}, \quad \Delta_k = t_{k+1} - t_k, \quad X_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) dt$$

Справедливы оценки

$$1 - \sigma_k = 2\varepsilon \Delta_k - 2\varepsilon^2 \Delta_k^2 + 4\varepsilon^3 \Delta_k^3 / 3 = O(\Delta_k^4) \quad (3.4)$$

$$y_{k+1} + y_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (1 + 2\varepsilon \dot{x}(t) + x(t)) dt = \Delta_k + X_k \quad (3.5)$$

Оценим последнее слагаемое в формуле (3.5):

$$X_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \int_{t_k}^t ds \left(y_k + \int_{t_k}^s (-1 - \varepsilon \dot{x}(\tau) - x(\tau)) d\tau \right) = y_k \Delta_k^2 / 2 - \Delta_k^3 / 6 + O(\Delta_k^4) \quad (3.6)$$

С другой стороны, аналогично можно получить, что

$$X_k = y_{k+1} \Delta_k^2 / 2 - \Delta_k^3 / 6 + O(\Delta_k^4) \quad (3.7)$$

Взяв полусумму равенств (3.6) и (3.7) и подставив ее в равенство (3.5), получим

$$y_{k+1} + y_k = \Delta_k + \Delta_k^2 (y_k + y_{k+1}) / 4 - \Delta_k^3 / 6 + O(\Delta_k^4)$$

откуда окончательно имеем

$$y_{k+1} + y_k = \Delta_k + \Delta_k^3 / 12 + O(\Delta_k^4) \quad (3.8)$$

Вычитая равенство (3.7) из равенства (3.6), заключаем, что

$$\delta_k = O(\Delta_k^2) \quad (3.9)$$

Кроме того,

$$2y_k = y_k + y_{k+1} + \delta_k = \delta_k + \Delta_k + \Delta_k^3 / 12 + O(\Delta_k^4) \quad (3.10)$$

Из равенства (3.3) следует, что

$$y_k^2 - y_{k+1}^2 = (1 - \sigma_k)(1 + 2\varepsilon y_k + y_k^2) - 2\varepsilon(y_{k+1} + y_k) \quad (3.11)$$

Подставляя выражения (3.4), (3.8) и (3.10) в формулу (3.11) и меняя знак, с учетом соотношения (3.9) получим

$$\begin{aligned} \delta_k \Delta_k &= (2\varepsilon \Delta_k - 2\varepsilon^2 \Delta_k^2 + 4\varepsilon^3 \Delta_k^3 / 3)(1 + \varepsilon(\delta_k + \Delta_k) + \Delta_k^2 / 4) - \\ &- 2\varepsilon(\Delta_k + \Delta_k^3 / 12) + O(\Delta_k^4) = 2\varepsilon^2 \Delta_k \delta_k - 2\varepsilon^3 \Delta_k^3 / 3 + \varepsilon \Delta_k^3 / 3 + O(\Delta_k^4) \end{aligned}$$

Переноса $2\varepsilon^2 \Delta_k \delta_k$ в левую часть и сокращая на $\Delta_k(1 - 2\varepsilon^2)$, получаем, что

$$\delta_k = \varepsilon \Delta_k^2 / 3 + O(\Delta_k^3) \quad (3.12)$$

если $\varepsilon \neq 1/\sqrt{2}$. Для $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ соотношение (3.12) получается предельным переходом. Отметим, что $y_k = \Delta_k / 2 + O(\Delta_k^2)$.

Эквивалентную форму равенства (3.12)

$$y_{k+1} = y_k - \delta_k = y_k(1 - 2\varepsilon \Delta_k / 3 + O(\Delta_k^2))$$

можно переписать в виде

$$\ln y_{k+1} - \ln y_k = -2\varepsilon \Delta_k / 3 + \xi_k, \quad \xi_k = O(\Delta_k^2) \quad (3.13)$$

Суммируя равенства (3.13), получаем

$$\ln y_n - \ln y_1 = -2\varepsilon(t_n - t_1) / 3 + \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1}$$

Для произвольного $\sigma > 0$ выберем постоянную $C(\sigma)$ так, чтобы выполнялась оценка

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1} \leq C(\sigma) + \sigma(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{n-1}) = C(\sigma) + \sigma(t_n - t_1)$$

А тогда

$$\left| \frac{\ln y_n - \ln y_1}{t_n - t_1} - \frac{2}{3}\varepsilon \right| \leq \frac{C(\sigma)}{t_n - t_1} + \sigma$$

Это и означает справедливость равенства (3.1).

Исследуем, каким образом кривая Γ делит участки траекторий системы S в промежутках между ударами.

Пусть L – дуга траектории системы S , проходящая в окрестности начала координат и соответствующая промежутку между двумя последовательными ударами. Обозначим через $A^\pm = (0, y_A^\pm)$ точки пересечения дуги L с осью Oy , такие, что $y_A^+ > 0 > y_A^-$.

Как следует из леммы 1, $y_A^\pm \rightarrow 0$ при $T_2 \rightarrow +\infty$ и $y_A^- = -y_A^+ (1 + o(1))$. В окрестности начала координат кривая Γ задается уравнением $x = \gamma(y)$, а дуга L – уравнением $x = l(y)$. При этом γ и l суть C^1 -гладкие функции, определенные на отрезке $[y_A^-, y_A^+]$ и удовлетворяющие следующим условиям:

$$\gamma(0) = l(y_A^-) = l(y_A^+) = \gamma'(0) = l'(0) = 0, \quad \gamma(y_A^\pm) > 0, \quad l(0) > 0$$

и, наконец, $\gamma''(y) > 0$, а $l''(y) < 0$ для любого $y \in [y_A^-, y_A^+]$. Это означает, что если величина T_2 достаточно велика, то дуга L и кривая Γ пересекаются ровно в двух точках $B^- = (x_B^-, y_B^-)$ и $B^+ = (x_B^+, y_B^+)$, причем

$$x_B^\pm > 0, \quad y_A^- < y_B^- < 0 < y_B^+ < y_A^+$$

(см. фиг. 2, б, где показано взаимное расположение кривой Γ и дуги L).

Лемма 3. Если $X = (h, 0)$ – точка пересечения дуги L с осью Ox , то

$$\lim y_A^+/y_A^- = \lim y_B^+/y_B^- = -1; \quad \lim y_A^+/y_B^+ = \sqrt{2} \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (3.14)$$

Доказательство. Решение системы B с начальными условиями

$$x(0) = y(0) = 0$$

в окрестности начала координат можно представить в виде

$$y = t + O(t^2), \quad x = t^2/2 + O(t^3)$$

Следовательно, в окрестности начала координат $\gamma(y) = y^2/2 + O(y^3)$. Решение системы S с начальными условиями

$$x(0) = h, \quad y(0) = 0$$

можно записать следующим образом:

$$y = -t + O(t^2), \quad x = h - t^2/2 + O(t^3)$$

откуда следует, что

$$l(y) = h - y^2/2 + O(y^3)$$

Значения y_A^\pm – корни функции l , следовательно,

$$y_A^\pm = \pm \sqrt{2h} + o(\sqrt{h})$$

а значения y_B^\pm – решения уравнения $l(y) = \gamma(y)$. Таким образом,

$$y_B^{\pm 2}/2 = h - y_B^{\pm 2}/2 + O(y^3)$$

Тогда $y_B^\pm = \pm \sqrt{h}$, что доказывает справедливость формул (3.14).

Исследуем, как меняется расстояние между решениями системы C с течением времени. Пусть $z_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ ($i = 1, 2$) – решения системы C . Пусть L_i – траектории точек $p_i = z_i(t_0)$, \bar{L}_i – замыкания L_i , а L_i^+ – соответствующие положительные полу-траектории. Ясно, что

$$\text{dist}(z_i(t), \bar{L}_{3-i}) \sim \text{dist}(z_i(t_0), \bar{L}_{3-i}) \exp(-\varepsilon(t - t_0)), \quad i = 1, 2 \tag{3.15}$$

т.е. траектории любых двух точек экспоненциально сближаются с ростом t . Пусть $L_1 = L_2 = L$, ρ – дуга траектории L , соединяющая точки p_1 и p_2 (возможно, разрывная). Назовем расстоянием между точками p_1 и p_2 вдоль траектории L криволинейный интеграл

$$d^T(p_1, p_2) = \int_{\rho} ds_L \tag{3.16}$$

т.е. длину дуги ρ . Если $L_1 \neq L_2$, то назовем расстоянием между точками p_1 и p_2 в перпендикулярном направлении величину

$$d^\perp(p_1, p_2) = \min(\text{dist}(p_1, \bar{L}_2), \text{dist}(p_2, \bar{L}_1))$$

Для каждой из точек p_i рассмотрим γ_i – отрезок нормали в точке p_i к траектории L_i . Определим расстояние между точками p_1 и p_2 вдоль траекторий по формуле

$$d^T(p_1, p_2) = \min(d'_1(p_1, p_2), d'_2(p_1, p_2))$$

$$d'_i(p_1, p_2) = \min_{q_i \in L_i \cap \gamma_{3-i}} d^T(p_i, q_{3-i}), \quad i = 1, 2$$

Заметим, что, поскольку точки p_i и q_i лежат на одной траектории, расстояния $d^T(p_i, q_i)$ определяются по формуле (3.16).

Лемма 4. Для любых двух решений $z_1(t)$ и $z_2(t)$ системы C , таких, что $z_i(t_0) = p_i \in D$ ($i = 1, 2$), имеют место соотношения

$$\left\| \begin{matrix} d^\perp(z_1(t), z_2(t)) \\ d^T(z_1(t), z_2(t)) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} d^\perp(p_1, p_2) \\ d^T(p_1, p_2) \end{matrix} \right\|$$

$$a_{ii} = a_{ii}(t, p_1, p_2) \sim \exp(-\varepsilon(t - t_0)), \quad i = 1, 2$$

$$a_{21} = a_{21}(t, p_1, p_2) = \exp(-\varepsilon(t - t_0))(1/3 + o(1))$$

Доказательство. 1°. Пусть $L_1 = L_2$. Считаем, что $p_2 = z_1(t_0 + \delta, p_1)$ для некоторого $\delta > 0$.

Обозначим через t_k^1 и t_k^2 соответствующие последовательные моменты ударов, $t_k^i = y_i(t_k^i - 0)$.

Тогда $t_k^2 = t_k^1 + \delta$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Если $t \notin [t_k^1, t_k^2)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то

$$c \exp(-\varepsilon(t - t_0)) \text{dist}(p_1, p_2) \leq \text{dist}(z_1(t), z_2(t)) \leq C \exp(-\varepsilon(t - t_0)) \text{dist}(p_1, p_2)$$

а если $t \in [t_k^1, t_k^2)$, то

$$\text{dist}(z_1(t), z_2(t)) \sim y_{k1}$$

до тех пор, пока справедливо неравенство $\min_{i=1,2}(t_{k+1}^i - t_k^i) > \delta$. Кроме того, при любых t

$$d^T(z_1(t), z_2(t)) \sim d^T(p_1, p_2) \exp(-\varepsilon(t - t_0)) \quad (3.17)$$

2°. Пусть $L_1 \neq L_2$. Пусть p_i – точки траекторий L_i , а $z_i(t) = (x(t), y(t))$ – решения системы S с начальными условиями $z_i(0) = p_i$ ($i = 1, 2$). Предположим, что $d_3^T(p_1, p_2) = 0$. Будем говорить, что полутраектория L_1^+ – внешняя по отношению к L_2^+ , если $y_1^1 = y_1(t_1^1) > y(t_2^1) = t_1^2$. Не умаляя общности, будем считать, что полутраектория L_1^+ – внешняя. На интервалах, где оба решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ не имеют точек ударов,

$$\text{dist}(z_1(t), z_2(t)) \sim \text{dist}(z_1(t_0), z_2(t_0)) \exp(-\varepsilon(t - t_0))$$

Рассмотрим t_j^i и t_{j+1}^i – соседние моменты ударов для решения $x_i(t)$. Пусть

$$y_k^i = y_i(t_k + 0); \quad i = 1, 2, \quad k = j, j + 1$$

Положим

$$\tau_1 = \min(t_j^1, t_j^2), \quad \tau_2 = \max(t_{j+1}^1, t_{j+1}^2)$$

На отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ расстояние $d^T(z_1(t), z_2(t))$ меняется на

$$\rho_j = 2d^1/y_j^1(1 + o(1)) \quad (3.18)$$

причем интервалы времени между соседними ударами, а также длины дуг между точками ударов меньше для внутренней траектории. Решение $z_2(t)$, идущее по внутренней траектории, на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ обгоняет решение $z_1(t)$, идущее по внешней траектории, т.е.

$$y_2(\tau_2) - y_1(\tau_2) > y_2(\tau_1) - y_1(\tau_1)$$

Оценим, как меняется расстояние $d^T(z_1(t), z_2(t))$ на отрезке T_2 . Фиксируем $\Theta \leq T_2$ и рассмотрим промежуток времени $I = [\Theta - 1, \Theta]$. Введем функцию

$$\lambda(t) = \exp(\varepsilon t/3)$$

В силу леммы 2 скорости y_k^1 ударов решения $x_1(t)$ удовлетворяют соотношению

$$y_k^1 = \lambda(-2\Theta(1 + o(1))) \quad (3.19)$$

являющемуся следствием соотношения (3.1), если положить в последнем $t_1 = 0$. Вместе с тем, как было показано выше, длину отрезка свободного движения можно представить в виде

$$t_{k+1}^1 - t_k^1 = 2y_k^1(1 + o(1))$$

Из последней формулы и соотношения (3.19) следует, что количество ударов, соответствующих решению $x_1(t)$, на промежутке I оценивается по формуле

$$N(\Theta) = \lambda(2\Theta(1 + o(1)))$$

Из этой формулы с учетом выражения (3.18) получаем

$$\sum_{t_j \in [\Theta - 1, \Theta]} \rho_j = \lambda(4\Theta(1 + o(1)))d^1(z_1(t_j), z_2(t_j)) = \lambda(\Theta(1 + o(1)))d^1(p_1, p_2)$$

Пусть Θ_0 – наименьшее целое число, строго большее T_2 . Тогда

$$\sum_{t_j \in [0, T_2]} \rho_j \leq \sum_{t_j \in [0, \Theta_0]} \rho_j = \sum_{k=1}^{\Theta_0} \lambda(k(1+o(1)))d^\perp(p_1, p_2) = \lambda(T_2(1+o(1)))d^\perp(p_1, p_2)$$

С другой стороны,

$$\sum_{t_j \in [0, T_2]} \rho_j \geq \sum_{t_j \in [0, \Theta_0 - 1]} \rho_j = \lambda(T_2(1+o(1)))d^\perp(p_1, p_2)$$

Следовательно,

$$\sum_{t_j \in [0, T_2]} \rho_j = \lambda(T_2(1+o(1)))d^\perp(p_1, p_2) \tag{3.20}$$

Утверждение леммы 4 следует из формул (3.15), (3.17) и (3.20).

4. Моменты переключений. В момент времени $t = T_1$ правая часть системы А меняет знак с плюса на минус. Вместе с тем, как было показано выше,

$$\text{diam}F_1(D_0) \sim \exp(-\epsilon T_1)$$

Обозначим через $G_1(x, y)$ векторное поле, порождаемое системой В, а через $G_2(x, y)$ – векторное поле, порождаемое системой С. Для последней системы точка O_1 не будет особой. Видно, что $G_2(O_1) \parallel Ox$.

Положим

$$F(z) = F_2(F_1(z)), \quad z \in \Lambda$$

Отображение F – биекция, непрерывная во всех точках множества D , кроме прообраза прямой $x = 0$, и дифференцируемая во всех точках непрерывности, кроме дуг кривой Γ , служащих границами множеств D и D_0 . Это следует из того, что любое ненулевое решение системы С, равно как и любое решение системы В, начальные данные которого не лежат на Γ , соответствует случаю, когда удары происходят только с ненулевой скоростью. Поэтому локально отображение F может быть представлено в виде композиции конечного числа гладких отображений Пуанкаре: от исходной точки до первого удара, от первого удара до второго, ..., от предпоследнего удара до последнего и, наконец, от последнего удара до образа исходной точки. В силу лемм 1 и 2 для любого $\zeta > 0$ найдется такое число T_0 , что если $T_1 \geq T_0$, то

$$F(D) \subset Q = \{(x, y) : \exp(-(4/3 + \zeta)\epsilon T_2) \leq V(x, y) \leq \exp(-(4/3 - \zeta)\epsilon T_2)\} \subset D \tag{4.1}$$

Видно, что при достаточно больших T_2 все неблуждающие точки отображения F – точки множества Q . Тогда

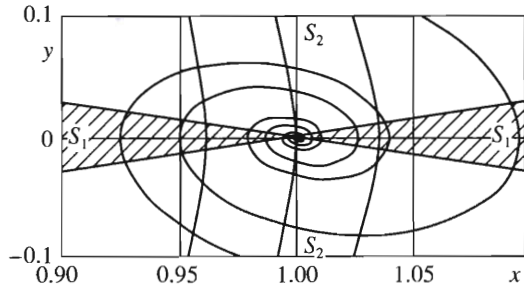
$$\beta = \max_{(x, y) \in F_1(Q)} \sphericalangle G_2(x, y), \quad Ox = O(\exp(-\epsilon T_1)) \tag{4.2}$$

Здесь и далее \sphericalangle – угол между двумя гладкими направленными кривыми, меняющийся на отрезке $[0, \pi]$.

Для системы В, напротив, O_1 – особая точка типа фокус, и направления соответствующего векторного поля в точках любой окрестности точки O_1 могут быть произвольными. Параллельными оси Ox будут касательные к траекториям системы в точках оси Oy и только в них. Фиксируем $\gamma \in (0, \pi/2)$. Рассмотрим два сектора

$$S_1 = \{(x, y) : |x - 1| > \text{ctg} \gamma |y|\}, \quad S_2 = \{(x, y) : |x - 1| \leq \text{ctg} \gamma |y|\} \tag{4.3}$$

(см. фиг. 3, где сектора S_1 и S_2 построены для значения $\gamma = \text{arctg} 0.25$, а также показаны траектории систем В и С, соответствующие значению $\epsilon = 0.1$).



Фиг. 3

Существуют такие величины $\alpha_1(\gamma)$ и $\alpha_2(\gamma)$, что $\alpha_i(\gamma) = \gamma + o(\gamma)$ и

$$\begin{aligned} \nless G_1(x, y), \quad 0x \leq \alpha_1(\gamma), \quad \text{если} \quad (x, y) \in S_1 \\ \nless G_1(x, y), \quad 0x \geq \alpha_2(\gamma), \quad \text{если} \quad (x, y) \in S_2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из формул (4.2) и (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} \nless G_1(x, y), G_2(x, y) \leq \alpha_1(\gamma) + \beta, \quad \text{если} \quad (x, y) \in S_1 \\ \nless G_1(x, y), G_2(x, y) \geq \alpha_2(\gamma) - \beta, \quad \text{если} \quad (x, y) \in S_2 \end{aligned}$$

Пусть p_1 и p_2 – точки множества Q . Пусть γ – угол между траекториями систем B и C в точке p_1 , отсчитываемый в положительном направлении, d_1^T – расстояние между точками p_1 и p_2 вдоль траекторий системы B , d_2^T – расстояние между точками p_1 и p_2 вдоль траекторий системы C , $d_{1,2}^\perp$ – соответствующие расстояния в перпендикулярных направлениях. Тогда

$$d_2^T = (d_1^T \cos \gamma + d_{1,2}^\perp \sin \gamma)(1 + o(1)), \quad d_2^\perp = |-d_1^T \sin \gamma + d_{1,2}^\perp \cos \gamma|(1 + o(1))$$

где под $o(1)$ понимаются величины, стремящиеся к нулю при $p_2 \rightarrow p_1$.

Что касается поведения траекторий в моменты времени, когда правая часть f уравнения (1.1) меняет знак с минуса на плюс, видно, что

$$\nless G_1(x, y), G_2(x, y) - \pi = o(\exp(-2\epsilon T_2/3 + \zeta \epsilon T_2))$$

для любой точки $(x, y) \in Q$.

5. Локализация аттрактора. В этом разделе сузим множество Q таким образом, чтобы новое множество по-прежнему содержало все неблуждающие точки F . Поскольку, как было показано выше, все решения системы A с течением времени попадают в область D и $F(D) \subset Q$, все неблуждающие точки отображения F принадлежат Q . Отметим, что если значение T_2 достаточно велико, то $Q \subset D$ и, следовательно, $F(Q) \subset \subset Q$. Множества $Q_k = F^k(Q)$ образуют последовательность вложенных компактов $Q \supset \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$. Положим

$$Q_\infty = Q_0 \cap Q_1 \cap Q_2 \dots$$

Тогда множество неблуждающих точек отображения F содержится в Q_∞ .

Пусть для некоторого $\mu > 3$ выполнено неравенство

$$T_2/T_1 > \mu \tag{5.1}$$

Будем считать, что значение T_1 столь велико, что в определении множества Q (формула (4.1)) можно положить

$$\zeta < \min(1/100, (\mu - 3)/100)$$

Обозначим через α минимальный угол между траекториями систем B и C во множестве $F_1(D)$ (отметим, что он зависит исключительно от T_1 и ϵ). В силу леммы 4 суммарная длина $S(F(Q))$ проекций компонент связности множества $F(Q)$ на ось Oy есть величина

$$\sin \alpha \exp(\epsilon T_2(1/3 + o(1)) - \epsilon T_1) \text{diam} Q \tag{5.2}$$

Фиксируем некоторое число $M > 10$. Если T_1 достаточно велико, величину (5.2) можно оценить снизу выражением $M \sin \alpha \text{diam} Q$. Для любого M найдутся такие значения γ_0 и T_1^0 , что если $T_1 > T_1^0$, $F_1(Q) \subset S_2$ и в определении сектора S_2 (формула (4.3)) $\gamma > \gamma_0$, то $M \sin \alpha > 10$. Тогда

$$S(F(Q)) > 10 \text{diam} Q \tag{5.3}$$

и число самих компонент связности множества $F(Q)$ не меньше 10. Отметим, что чем большее значение T_1^0 выбрано, тем меньшей можно взять величину γ_0 , чтобы оценка (5.3) оставалась справедливой.

Выясним теперь, при каких условиях $F_1(Q) \subset S_2$. Введем ρ и ϕ – полярные координаты на плоскости с центром в точке $(1, 0)$. Из формул (2.1) следует, что промежуток времени между последовательными пересечениями оси Oy решением уравнения (1.3) равен π/ν . Кроме того, для любого такого решения $\dot{\phi} \sim 1$. Для точек множества Q справедливо соотношение

$$\phi - 3\pi/2 = O(\exp(-4(1 + \zeta)\epsilon T_2/3))$$

Время последнего на отрезке $[0, T_1]$ пересечения сектора S_1 решениями системы B с начальными данными из $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in Q$ оценивается сверху величиной $\sigma_0 = C\gamma_0$. Из сказанного выше следует, что если значение T_1 достаточно велико и при этом

$$T_1 \notin \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2\pi k}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - \sigma_0, \frac{2\pi k}{\sqrt{1-\epsilon^2}} + \sigma_0 \right] \tag{5.4}$$

то условие (5.3) справедливо (напомним, что $\nu = \sqrt{1-\epsilon^2}$).

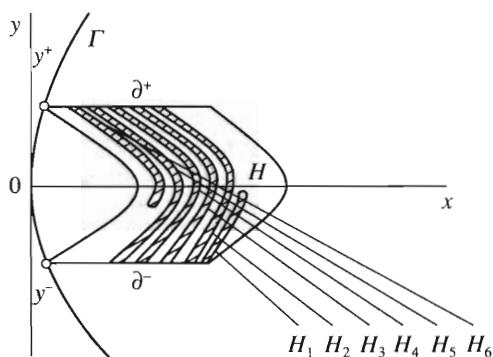
Приведем оценки значений функции V на множестве $F(Q)$. Диаметр Q оценивается сверху величиной $2\exp(-2/3 + \zeta/2)\epsilon T_2$. Тогда диаметр $F_1(Q)$ оценивается величиной $C_1 \exp((-2/3 + \zeta/2)\epsilon T_2 - \epsilon T_1)$. Положим

$$\delta = C_1 \exp((-5/3 + \zeta)\epsilon T_2 - \epsilon T_1), \quad \chi = C_1 \exp((-1/3 + \zeta)\epsilon T_2 - \epsilon T_1) \tag{5.5}$$

Из сказанного выше следует, что постоянную C_1 можно выбрать таким образом, что найдутся такая точка $q \in F_1(Q)$ и такой участок l_q траектории L_q системы C , что длина l_q не больше χ и все множество $F(Q)$ лежит в δ -окрестности участка l_q . В точках l_q значения функции V могут различаться не более чем в $\exp(2\epsilon\chi)$ раз, что следует из леммы 1. Значение функции V в каждой точке множества $F(Q)$ отличается от значения в ближайшей точке множества l_q не более чем на 2δ .

Итак, для любых двух точек $p_{1,2} \in F(Q)$ справедлива оценка

$$V(p_1) \leq V(p_2) \exp(2\epsilon\chi) + 4\delta \tag{5.6}$$



Фиг. 4

С другой стороны, $F(Q) \subset Q$, а для любой точки множества Q соответствующее значение V лежит в диапазоне

$$I_v = [\exp(-(4/3 + \zeta)\varepsilon T_2), \exp(-(4/3 - \zeta)\varepsilon T_2)]$$

Отсюда и из формулы (5.6) можно получить, что если значение T_1 достаточно велико, то найдется такое число $V_0 \in I_v$ и такое $C_2 > 0$, что

$$V_0 \leq V(p) \leq V_0 + C_2 \exp((-5/3 + 3\zeta)\varepsilon T_2) = V_1 \quad (5.7)$$

для любой точки $p \in F(Q)$. Напомним, что, увеличивая T_1 , можно сделать параметр $\zeta > 0$ сколь угодно малым.

6. Нетривиальное гиперболическое множество неблуждающих точек. Если параметр T_1 достаточно велик, кривая Γ пересекает кривую, задаваемую условием $V(x, y) = V_0$, в двух точках $Z^+ = (x^+, y^+)$ и $Z^- = (x^-, y^-)$, причем $y^- < 0 < y^+$. Определим $H \subset \Lambda$ как множество точек $p = (x, y)$, удовлетворяющих условию (5.7), и таких, что $y^- \leq y \leq y^+$. Ясно, что $F(H) \subset Q$, причем отображение $F|H$ гладко в окрестности любой точки непрерывности. При этом на всем множестве Q отображение F является растягивающим вдоль траекторий и сжимающим в некотором трансверсальном направлении. Таким образом, $F|H$ – локальный диффеоморфизм в окрестности точек непрерывности. Обозначим через ∂^\pm отрезки границы множества H , заданные условиями

$$y = y^\pm, \quad V_0 \leq V(x, y), \quad V_1$$

Пусть $p \in F(H) \cap H$. Обозначим через $z_p(t)$ соответствующее решение системы A . Поставим в соответствие точке p число $n(p)$ ударов, соответствующих решению z_p на отрезке $[-T, 0]$. Пусть N_1 – минимальное значение $n(p)$ на множестве $F(H) \cap H$, N_2 – максимальное. Положим $N = N_2 - N_1 + 1$ и для любого $j = 1, \dots, n$ рассмотрим множества

$$H_j = \{p \in F(H) \cap H: n(p) = j + N_1 - 1\}$$

Отметим, что все множества H_j компактны и что

$$F(H) \cap H = H_1 \cap \dots \cap H_N$$

(см. фиг. 4, где показана “подкова Смейла” для системы A при $N = 6$).

Лемма 5. Пусть η – кривая, представляющая собой образ непрерывного отображения $h: [0, 1] \rightarrow H$, такого, что $h(0) \in \partial^+$, $h(1) \in \partial^-$. Тогда множество $F(\eta)$ пересекает множество H_j для любого $j \in \{2, \dots, N-1\}$, причем для любого $j \in \{3, \dots, N-2\}$

пересечение множеств $F(\eta)$ и H_j содержит кривую η_j , обладающую теми же свойствами, что и η .

Доказательство. Для любой точки $p \in H$ найдется такая точка $q \in \eta$, что

$$\text{dist}(p, q) \leq C_2 \exp((-5/3 + 3\zeta)\epsilon T_2)$$

Тогда расстояние от произвольной точки $F(H)$ до ближайшей точки множества $F(\eta)$ может быть оценено сверху величиной

$$\exp((-4/3 + 4\zeta)\epsilon T_2 - \epsilon T_1) = o(\sqrt{V_0})$$

Вместе с тем величина $\sqrt{V_0}$ оценивает снизу длину проекции любого из множеств H_j на ось Oy . Стало быть, расстояние вдоль траекторий системы S от произвольной точки множества $F(H)$ до ближайшей точки $F(\eta)$ не больше, чем половины длины проекции H_2 . Это и означает справедливость доказываемого утверждения.

Покажем, что число N неограниченно растет с ростом T_1 . Условимся считать кривую η^0 , заданную условиями $V(x, y) = V_0$ и $y \in [y^-, y^+]$, направленной в сторону убывания переменной y . Пусть l – длина этой кривой. Как следует из сказанного выше, сумма длин компонент кривой $F(\eta^0)$ равна

$$\sin \alpha \exp(\epsilon T_2(1 + o(1))/3 - \epsilon T_1)l$$

В каждой точке направление кривой $F(\eta^0)$ близко к направлению векторного поля системы S , откуда следует, что длина каждой компоненты связности $F(\eta^0)$ оценивается сверху величиной Cl . Это означает, что число N компонент связности неограниченно растет. Из утверждения леммы 3 следует, что $N \geq 10\sqrt{2} > 6$, если имеет место оценка (5.3).

Лемма 6. Если значение параметра T_1 достаточно велико, то для любого $m \in \mathbb{N}$ и любого набора чисел $a = (a_0, \dots, a_m)$, такого, что $3 \leq a_j \leq N - 2$ для любого $j = 0, \dots, m$, множество

$$H_a = H_{a_0} \cap F^{-1}(H_{a_1}) \cap \dots \cap F^{-m}(H_{a_m})$$

непусто.

Доказательство. Фиксируем индекс a . Из леммы 5 следует, что образ рассмотренной выше кривой η^0 содержит кривую $\eta_{a_0} \in H_{a_0}$, соединяющую ∂^+ и ∂^- . Применяя лемму 5 к кривой η_{a_0} , получим, что найдется кривая $\eta_{a_0 a_1} \subset F(\eta_{a_0}) \cap H_{a_1}$. В конечном итоге получим кривую $\eta_{a_0 \dots a_m} \subset H_{a_m} \cap \dots \cap F^m(H_{a_0})$. Тогда утверждение доказываемой леммы следует из того, что $F^{-m}\eta_{a_0 \dots a_m} \subset H_a$.

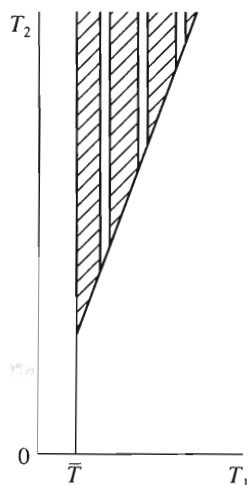
Положим

$$K = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(H)$$

Очевидно, что множество K инвариантно под действием отображения F , компактно и непусто, как пересечение вложенных компактов (пересечений конечного числа итераций компакта H). Кроме того, $K \subset F^{-1}(H)$, следовательно, множество K не пересекается с прообразом оси Oy . Поэтому найдется такая окрестность Ω множества K , что $F|_{\Omega}$ – диффеоморфизм.

Каждой точке $p \in K$ соответствует единственная последовательность

$$a(p) = \{\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots\}, \quad a_n = \{2, \dots, N - 1\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$



Фиг. 5

такая, что $F^n(p) \in H_{a_n}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Из леммы 6 следует, что для любой последовательности a можно подобрать соответствующую точку p . Заметим, что в силу гиперболичности диффеоморфизма F в окрестности множества K точка $p \in K$ однозначно определяется последовательностью $a(p)$. Если $N \geq 6$, множество возможных значений величин a_j не меньше 2, и множество K имеет мощность континуум. Отображению F соответствует сдвиг последовательности $a(p)$ на единицу влево. Таким образом, отображение $F|K$ обладает теми же свойствами, что и знаменитая “подкова Смейла”, а именно:

- 1) отображение $F|K$ имеет бесконечно много периодических точек;
- 2) периодические точки F всюду плотны в K ;
- 3) существует точка $p \in K$, орбита которой $\{F^n(p) : n \in \mathbb{Z}\}$ всюду плотна в K .

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для любых $\varepsilon \in (0, 1)$, $\sigma_0 > 0$ и $\mu > 3$ существует такое $\bar{T} > 0$, что если $T_1 > \bar{T}$, выполнены условия (5.1) и (5.5), то

отображение F имеет гиперболическое инвариантное множество K со свойствами 1–3.

Таким образом, показано, что система A имеет компактное гиперболическое инвариантное множество, содержащее бесконечно много периодических решений и всюду плотную траекторию. Такие множества часто называют хаотическими. Видно, что введенное выше множество Q_∞ представляет собой аттрактор. Хаотическое множество содержит, разумеется, в этом аттракторе. Такие аттракторы часто называют странными. Итак, показано, что виброударная система A имеет странный аттрактор.

На фиг. 5 заштриховано множество значений параметров T_1 и T_2 , соответствующих хаотическим колебаниям.

Авторы посвящают статью восьмидесятилетию академика Н.Н. Красовского.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-39001 и 03-01-06493), Министерства образования РФ и Правительства Санкт-Петербурга (PD03–1.1–168), научной программы Министерства образования РФ “Университеты России” и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (2271.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. N.Y.: Springer, 1986 = Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 559 с.
2. Shaw S.W., Holmes P.J. A periodically forced piecewise linear oscillator // J. Sound and Vibration. 1983. V. 90. № 1. P. 129–155.
3. Nguyen D.T., Noah S.T., Kettleborough C.F. Impact behaviour of an oscillator with limiting stops. Pt I: A parametric study // J. Sound and Vibration. 1986. V. 109. № 2. P. 293–307.
4. Whiston G.S. The vibro-impact response of a harmonically excited and preloaded one-dimensional linear oscillator // J. Sound and Vibration. 1987. V. 115. № 2. P. 303–319.
5. Whiston G.S. Global dynamics of a vibro-impacting linear oscillator // J. Sound and Vibration. 1987. V. 118. № 3. P. 395–429.

6. *Shaw S.W., Rand R.H.* The transition to chaos in a simple mechanical system // Intern. J. Non-Linear Mechanics. 1989. V. 24. № 1. P. 41–56.
7. *Nordmark A.B.* Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator // J. Sound and Vibration. 1991. V. 145. № 2. P. 279–297.
8. *Budd C., Dux F.* Chattering and related behaviour in impact oscillators // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1994. V. 347. № 1683. P. 365–389.
9. *Budd C.* Grazing in impact oscillators // Real and Complex Dynamical Systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers / Eds. B. Branner and P. Hjorth. 1995. P. 47–64.
10. *Chin W., Ott E., Nusse H.E., Grebogi C.* Universal behavior of impact oscillators near grazing incidence // Phys. Letters A. 1995. V. 201. № 2/3. P. 197–204.
11. *Banerjee S., Yorke J. A., Grebogi C.* Robust chaos // Phys. Rev. Letters. 1998. V. 80. № 14. P. 3049–3052.
12. *Leine R.I., van Campen D.H., van de Vrande B.L.* Bifurcations in nonlinear discontinuous systems // Nonlinear Dynamics. 2000. V. 23. № 2. P. 105–164.
13. *Xu L., Lu M.W., Cao Q.* Bifurcation and chaos of a harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental harmonic balance method // J. Sound and Vibration. 2003. V. 264. № 4. P. 873–882.
14. *Smale S.* Diffeomorphisms with many periodic points // Different. and Combinator. Topol. Princeton: Univ. Press, 1965. P. 63–80 = *Смейл С.* Диффеоморфизмы со многими периодическими точками // Математика. 1967. Период. сб. перев. иностр. статей. № 4. С. 69–78.
15. *Nitecki Z.* Differentiable Dynamics. An Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms. MIT Press; London: Cambridge; 1971 = *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир., 1975. 304 с.
16. *Пилюгин С.Ю.* Введение в грубые системы дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во. ЛГУ, 1988. 159 с.
17. *Schatzman M.* Uniqueness and continuous dependence on data for one dimensional impact problems // Math. Comput. Modelling. 1998. V. 28. № 4–8. P. 1–18.

Санкт-Петербург
e-mail: kryzh@comset.net

Поступила в редакцию
10.II.2004