

УДК 539.375

© 2005 г. А. М. Линьков

О РАЗМЕРЕ КОНЦЕВОЙ ЗОНЫ И СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАЗРЫВА СМЕЩЕНИЙ

Получены асимптотические соотношения для концевой зоны движущегося разрыва смещений. Для размера концевой зоны при линейном разупрочнении в ней приведена формула, использование которой в структурном критерии В.В. Новожилова дает ответ на вопрос, почему обычно наблюдаемая при механическом нагружении в экспериментах и при землетрясениях скорость распространения разрыва нормальных или касательных смещений меньше скорости волны Релея.

В заключение к монографии [1] среди нерешенных проблем названо “наблюдавшееся в опытах ограничение скорости трещин”, а ранее ([1], с. 264) отмечено: “... при ограниченном критическом коэффициенте интенсивности напряжений скорость распространения трещины должна стремиться к скорости волны Релея. В действительности, как показывают эксперименты, в условиях механического нагружения предельная скорость трещины оказывается существенно ниже скорости волны Релея”. Этот же факт фиксируют недавние записи сейсмографов, оказавшихся непосредственно у поверхности разрыва при землетрясении Чи-Чи на Тайване (20 сентября 1999 г.) [2].

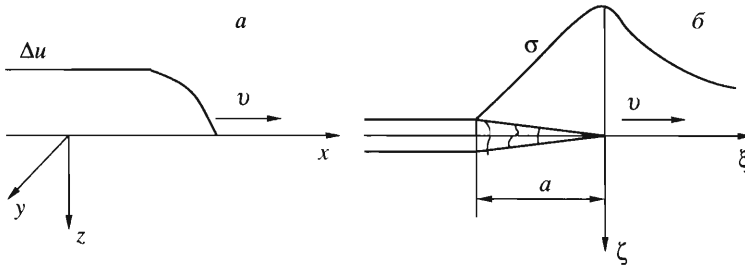
Поиск ответа на поставленный в [1] вопрос сохраняет актуальность, поскольку при численном моделировании распространения разрыва воспроизводится переход через скорость волны Релея (см., например [3]). Такой переход получен и при моделировании землетрясения Чи-Чи [4], что противоречит упомянутым данным прямых наблюдений.

Все это побуждает еще раз обратиться к проблеме, поставленной в [1]. Приводимые ниже результаты получены автором при анализе механизма землетрясения Чи-Чи. Они служат объяснению того, что наблюдаемая при механическом нагружении скорость разрыва меньше скорости волны Релея. При этом предполагается, что скорость распространения разрыва не превышает скорости поперечных волн.

Раздел 1 содержит распространение асимптотических соотношений, полученных ранее для статической задачи, на задачу о движущемся разрыве. В разд. 2 проведено сопоставление критического размера зоны разупрочнения при начальном срыве с ее размером при распространении разрыва. Установлено, что асимптотическая формула применима уже на расстояниях сопоставимых с начальным размером области разупрочнения. На основе этих заключений в разд. 3 показано, что из структурно-временного критерия [5–7] следует, что максимальная скорость распространения разрыва меньше скорости волны Релея. Ветвление, скачки, сверхзвуковое распространение разрыва и другие механизмы поглощения избытка энергии, который может возникать из-за ограниченного размера концевой зоны, здесь не обсуждаются.

Рассмотрение случая, когда скорость распространения разрыва будучи меньше скорости объемных волн оказывается больше скорости поперечных волн, требует более сложного анализа. Краткое замечание об этом случае дается в конце статьи.

1. Асимптотические соотношения для концевой зоны движущегося разрыва смещений. Пусть фронт разрыва смещений в рассматриваемый момент имеет скорость v и продвинулся на достаточно большое расстояние l , чтобы поле в окрестности фронта можно было считать локально-стационарным (В следующем разделе оценим, когда это допущение приемлемо). Направим ось x по направлению движения разрыва, ось y вдоль фронта, ось z перпендикулярно плоскости разрыва, так чтобы оси x, y, z образо-



Фиг. 1

вали правую систему (фиг. 1, а). Для простоты примем, что вектор смещений за фронтом имеет разрыв лишь в одной из его компонент: $\Delta u_x = u_x^+ - u_x^-$, $\Delta u_y = u_y^+ - u_y^-$ или $\Delta u_z = u_z^+ - u_z^-$. Напряжения на разрыве и впереди него непрерывны: $\sigma_{zx}^+ = \sigma_{zx}^- = \sigma_{zx}$, $\sigma_{zy}^+ = \sigma_{zy}^- = \sigma_{zy}$, $\sigma_{zz}^+ = \sigma_{zz}^- = \sigma_{zz}$. Будем считать, что за фронтом они равны нулю. Более общий случай постоянных ненулевых напряжений, как обычно, охватывается суперпозицией (см., например [8]).

В окрестности кончика разрыва упругое поле стационарно в системе координат $\xi = x - vt$, $\eta = y$, $\zeta = z$, движущейся вместе с ним (фиг. 1, б). Поэтому для получения асимптотических соотношений, описывающих это поле, используем стационарное решение Л.А. Галина [9] (см. также [10], с. 120), которое представим в виде

$$-\frac{d\Delta u_i}{d\xi} = C_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{zi}(\zeta) d\zeta}{\zeta - \xi}, \quad i = x, z, y \tag{1.1}$$

где

$$C_i = \frac{1}{\pi\mu} f_i(p), \quad p = \frac{1}{v}$$

$$f_x(p) = -2p\beta \frac{\sqrt{p^2\beta^2 - 1}}{\Delta_R}, \quad f_z(p) = -2\frac{\beta}{\alpha} p\beta \frac{\sqrt{p^2\alpha^2 - 1}}{\Delta_R}, \quad f_y(p) = \frac{2p\beta}{\sqrt{p^2\beta^2 - 1}}$$

$$\Delta_R = (2p^2\beta^2 - 1)^2 - 4\frac{\beta}{\alpha} p^2\beta^2 \sqrt{p^2\alpha^2 - 1} \sqrt{p^2\beta^2 - 1}$$

μ – модуль сдвига, α и β – скорость объемных и поперечных волн; равенство $\Delta_R = 0$ определяет скорость волны Релея v_R . При коэффициенте Пуассона $\nu = 0.25$ имеем $\alpha/\beta = \sqrt{3}$, $v_R = 0.9184\beta$.

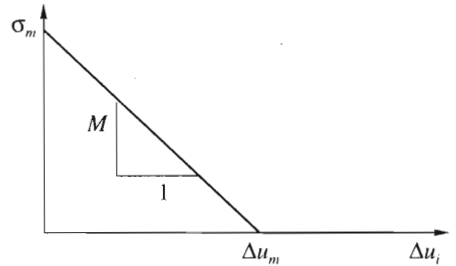
Разрыв смещений отсутствует перед фронтом волны. При этом условии из соотношений (1.1) следует ключевая асимптотическая формула для концевой зоны [11–13]

$$-\Delta u_i(\xi) = C_i \int_{-a}^0 L(\xi, \zeta) \sigma_{zi}(\zeta) d\zeta - C_i k_i \sqrt{-2\pi\xi}; \quad L(\xi, \zeta) = \ln \left| \frac{\sqrt{-\xi} + \sqrt{-\zeta}}{\sqrt{-\xi} - \sqrt{-\zeta}} \right| \tag{1.2}$$

где k_i – коэффициент интенсивности напряжений (КИН): касательных поперечных ($i = x$), нормальных ($i = z$) или касательных продольных ($i = y$). Подчеркнем, что

КИН обусловлен внешними нагрузками, а не напряжениями в концевой зоне. Для того чтобы эти напряжения были конечны (и непрерывны) на фронте разрыва, должно выполняться условие

$$\int_{-a}^0 \frac{\sigma_{zi}(\zeta) d\zeta}{\sqrt{-\zeta}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} k_i \quad (1.3)$$



Фиг. 2

При заданном законе взаимодействия берегов в концевой зоне уравнения (1.2) и (1.3) определяют распределение напряжений и разрывов смещений в ней и размер a этой зоны. Для обычно используемой модели линейного разупрочнения (см., например [3, 4, 12–17]) зависимость между Δu_i и σ_{zi} имеет вид, показанный на фиг. 2. Ее аналитическое выражение содержит предельное напряжение σ_m , выдерживаемое материалом, и модуль разупрочнения M , имеющий размерность [напряжение/длина]:

$$\sigma_{zi} = \begin{cases} \sigma_m - M\Delta u_i, & \Delta u_i \leq \Delta u_m \\ 0, & \Delta u_i \geq \Delta u_m \end{cases} \quad (1.4)$$

Подстановка выражения (1.4) в соотношения (1.2), (1.3) и нормировка

$$\sigma = \sigma_{zi}/\sigma_m, \quad \xi' = -\xi/a, \quad \zeta' = -\zeta/a$$

дают

$$\sigma(\xi') - \lambda \int_0^1 L'(\xi', \zeta') \sigma(\zeta') d\zeta' = 1 - \lambda \frac{k_i}{\sigma_m} \sqrt{\frac{2\pi\xi'}{a}} \quad (1.5)$$

$$\int_0^1 \frac{\sigma(\zeta') d\zeta'}{\sqrt{\zeta'}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \frac{k_i}{\sigma_m} \quad (1.6)$$

где

$$L'(\xi', \zeta') = L(-\xi', -\zeta'), \quad \lambda = C_i M a \quad (1.7)$$

Анализ уравнений (1.5), (1.6) [12] показывает, что решение, имеющее физический смысл, существует только при значениях λ , не превышающих критического значения $\lambda_c = 0.4655$. При $\lambda = \lambda_c$ напряжение обращается в нуль при $\xi = -a$, чему отвечает приращение свободной поверхности разрыва. Это означает, что продвижение разрыва происходит, когда $\lambda = \lambda_c$. Учитывая второе равенство (1.7), получаем, что при распространении разрыва выполняется условие

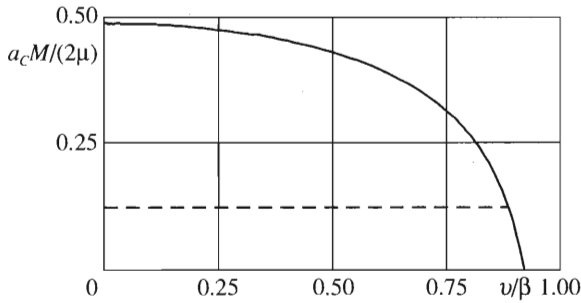
$$C_i M a_c = \lambda_c \quad (1.8)$$

где a_c – критический размер зоны разупрочнения при скорости движения фронта u .

Выполнению условия (1.8) отвечает соотношение [12]

$$\frac{\pi}{2} C_i k_{ic}^2 \frac{M}{\sigma_m^2} = 1 \quad (1.9)$$

причем в рассматриваемой здесь динамической задаче величина k_{ic} имеет смысл критического значения динамического КИН; не будучи постоянной материала, она за-



Фиг. 3

висит от скорости движения разрыва. Характеристикой материала служит лишь критическое значение статического КИН.

Действительно, в статическом случае, переходя в выражениях для C_i к пределу $\nu \rightarrow 0$, имеем

$$C_{x0} = C_{z0} = 2(1 - \nu)/(\pi\mu), \quad C_{y0} = 2/(\pi\mu)$$

где ν – коэффициент Пуассона. Учтем, что в статической задаче приток энергии на единицу площади $-dE/dS$ равен $(1 - \nu)k_{x0}^2/(2\mu)$, $(1 - \nu)k_{z0}^2/(2\mu)$ и $k_{y0}^2/(2\mu)$ для разрывов смещений в направлении оси x , z и y соответственно (см., например [1, 10]). Тогда условие (1.9), отвечающее собственному числу уравнения (1.5), принимает вид условия Гриффитса – Орована: $-dE/dS = 2\gamma$, где $2\gamma = \sigma_m^2/(2M)$. На фиг. 2 величине 2γ отвечает площадь под прямой разупрочнения. Таким образом, в согласии с критерием Гриффитса – Орована 2γ – максимальная энергия, которая поглощается на единице площади при разрыве материала. Энергия 2γ и, следовательно, связанные с ней приведенными зависимостями критические значения статических КИН служат характеристиками прочности материала.

Вернемся к динамическому условию в форме (1.8). Для определенности рассмотрим его в случае сдвигового разрыва: $\Delta u_x \neq 0$ при $\xi < 0$. Запишем равенство (1.8) в виде, определяющем безразмерную длину $a_c M/(2\mu)$ зоны разупрочнения:

$$a_c \frac{M}{2\mu} = f_{xc}(p); \quad f_{xc}(p) = \frac{\pi \lambda_c \Delta_R}{-2p\beta \sqrt{p^2 \beta^2 - 1}} \tag{1.10}$$

При заданном коэффициенте Пуассона ν функция $f_{xc}(p)$ зависит только от нормированной скорости движения разрыва ν/β .

На фиг. 3 приведен график безразмерной длины $a_c M/(2\mu)$ концевой зоны разупрочнения, построенный при обычном значении $\nu = 0.25$. Видно, что размер зоны стремится к нулю при скорости разрыва, стремящейся к скорости волны Релея ($\nu_R/\beta = 0.9184$). В пределе $\nu = \nu_R$ концевая зона исчезает. Такая ситуация представляется нереальной, поскольку для разделения материала необходимо, чтобы зона, где оно происходит, охватывала, как минимум, некоторую область размером порядка размера структурных элементов, которые разрушаются. Соответствующее ограничение скорости волны разрыва обсуждается в разд. 3.

2. Область применимости асимптотической формулы для концевой зоны. Выясним, как далеко должен продвинуться разрыв, чтобы можно было уверенно применять асимптотическую формулу для размера концевой зоны. Для этого используем

условие начального разрыва, полученное [18] при рассмотрении отрезка длиной $2l_0$, на всей поверхности которого достигнуто максимальное напряжение σ_m ; берега отрезка вдоль всей его длины взаимодействуют в соответствии с зависимостью (1.4), отвечающей линейному разупрочнению. Таким образом, в рассматриваемой задаче “концевые” области разупрочнения имеют длину $a_{c0} = l_0$; они простираются до середины отрезка, где смыкаются. Критическое значение a_{c0} , полученное в результате численного решения задачи, определяется условием

$$\frac{\chi + 1}{2\mu} M a_{c0} = 1.158$$

где χ – параметр Мухелишвили. Для плоской деформации $\chi = 3 - 4\nu$, и это соотношение записывается в виде, аналогичном (1.10):

$$\frac{M}{2\mu} a_{c0} = \frac{1.158}{4(1 - \nu)} \quad (2.1)$$

При значении $\nu = 0.25$, использованном для построения графика на фиг. 3, правая часть равенства (2.1) равна 0.386. Аналогичное статическое значение для правой части асимптотической формулы (1.10) равно $a_c(0)M/(2\mu) = 0.485$. Отсюда следует, что асимптотическая формула (1.10) применима уже при умеренном расстоянии l конца разрыва от его середины ($l \geq l_0$): даже при $l = l_0 = a_{c0}$ погрешность составляет лишь 25.6%.

3. Ограничение скорости, следующее из структурного критерия. Согласно структурному критерию В.В. Новожилова [5], развитие трещины происходит, когда в окрестности кончика трещины среднее напряжение на элементе с заданным характерным размером достигает предельного значения. Характерный размер имеет порядок размера разрушающегося структурного элемента. Понятно, что на разных структурных уровнях этот размер различен. Тем не менее он сохраняет свой порядок при наблюдаемых макроскопических разрывах. Это проявляется особенно рельефно при обобщении структурного критерия на динамические задачи в форме структурно-временного критерия [6, 7]. Установлено, что даже использование постоянного значения характерного размера при надлежащем учете длительности импульса нагрузки позволяет описать распространение трещин для широкого круга динамических испытаний. Поэтому представляется оправданным наложить это физически ясное ограничение на размер концевой зоны. Заметим, что в случаях [3, 4], когда вычисления давали переход через скорость Релея, это ограничение не накладывалось.

В соответствии со сказанным примем, что размер концевой зоны, хотя и может уменьшаться в динамических условиях, но не до нуля: он остается порядка характерного размера разрушающихся структурных элементов. Для нормированных критических размеров, представленных на фиг. 3, штриховой линией показана граница, отвечающая одной четвертой статического размера. Для нее максимальная скорость равна $0.965 v_R$.

Из графика на фиг. 3 следует, что ограничение размера концевой зоны приводит к ограничению скорости разрыва, не позволяя ей достичь скорости волны Релея. Учет времени a_c/v импульсного воздействия, как это принято при использовании структурно-временного критерия [6, 7], дополнительно ограничивает скорость волны разрыва. Таким образом, минимально допустимый размер концевой зоны контролирует максимально возможную скорость распространения разрыва. Это положение в сочетании с формулой (1.10) и графиком на фиг. 3 составляет основной результат данной работы.

В заключение напомним, что приведенные результаты получены в предположении, что скорость движения разрыва меньше скорости поперечных волн ($v < \beta$). Выполненное автором исследование противоположного случая ($\beta < v < \alpha$) невозможно воспроизвести в рамках данного краткого сообщения. Отметим лишь, что для разрыва поперечных смещений Δu_x исходное соотношение типа (1.1) можно получить и в слу-

чае, когда $\beta < v < \alpha$. При этом для скорости $v = \sqrt{2} \beta$, отвечающей отсутствию экспоненциального роста смещений, безразмерная длина $a_c M / (2\mu)$ зоны разупрочнения составляет 0.422, что лишь немногим меньше указанного выше статического значения $a_c(0)M / (2\mu) = 0.485$. Понятно, что при конечном размере зоны разупрочнения переход от скорости разрыва меньшей скорости поперечных волн ($v < \beta$) к скорости, превышающей скорость поперечных волн ($\beta < v < \alpha$), может совершаться только скачком.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-05-64888).

ЛИТЕРАТУРА

1. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение. 1981. 295 с.
2. Chen K.C., Huang B.-S., Wang J.-H. et al. An observation of rupture pulses of the 20 September 1999 Chi-Chi, Taiwan, earthquake from near-field seismograms // Bull. Seism. Soc. America. 2001. V. 91. № 5. P. 1247–1254.
3. Andrews D. J. Dynamic plane-strain shear rupture with a slip-weakening friction law calculated by a boundary integral method // Bull. Seism. Soc. America. 1985. V. 75. № 1. P. 1–21.
4. Dalguer L.A., Irikura K., Riera J.D., Chiu H.C. The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 Chi-Chi, Taiwan, earthquake: brief interpretation of damage distribution on buildings // Bull. Seism. Soc. America. 2001. V. 91. № 5. P. 1112–1127.
5. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 212–222.
6. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В., Уткин А.А. К расчету предельной интенсивности импульсных динамических нагрузок в механике трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 180–182.
7. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. О структурно временном описании скоростной зависимости динамической вязкости разрушения хрупких материалов // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 6. С. 100–104.
8. Palmer A.C., Rice J.R. The growth of slip in the progressive failure of over-consolidated clay // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1973. V. 332. № 1591. P. 527–548.
9. Галин А.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
11. Shapery R.A. A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media. I // Intern. J. Fracture. 1975. V. 11. № 1. P. 141–159.
12. Линьков А.М., Тлеужанов М.А. О расчете локальных зон необратимых деформаций у вершины трещины // Изв. АН Кирг ССР. Физ.-техн. и мат. науки. 1990. № 1. С. 47–51.
13. Linkov A.M. Boundary value problem for crack growth in viscoelastic media // Intern. J. Fracture. 1994. V. 65. № 3. P. 197–218.
14. Andersson H., Bergkvist H. Analysis of a non-linear crack model // J. Mech. Physics Solids. 1970. V. 18. № 1. P. 1–28.
15. Ida Y. Cohesive force across the tip of a longitudinal shear crack and Griffith's specific surface energy // J. Geophys. Research. 1972. V. 77. № 20. P. 3796–3805.
16. Andrews D.J. Rupture velocity of plane strain shear cracks // J. Geophys. Research. 1976. V. 81. № 32. P. 5679–5687.
17. Linkov A.M. Instability, fracture acceleration and wave amplification // Intern. J. Rock Mech. Mining Sci. 2000. V. 37. № 1–2. P. 31–37.
18. Белов Е.Б., Линьков А.М. Об условиях устойчивости при разупрочнении на взаимодействующих поверхностях трещин // Исследования по механике строительных конструкций и материалов / Ред. В.Д. Харлаб. СПб.: СПб. гос. архитектурно-строит. ун-т, 1995. С. 86–92.