

УДК 539.375

© 2005 г. А. Г. Рамм, Е. И. Шифрин

**ПРОБЛЕМА СИММЕТРИИ В ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
О ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЕ НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА**

Рассматривается задача об ограниченной плоской трещине в однородном, изотропном, линейно упругом пространстве. Предполагается, что к поверхностям трещины приложены равные по величине и противоположно направленные однородные нормальные усилия. Доказано, что круг – единственная форма трещины, при которой коэффициент интенсивности напряжений постоянен вдоль ее контура.

1. Постановка задачи. Пусть трещина занимает ограниченную область G в плоскости $x_3 = 0$ безграничного, однородного и изотропного упругого пространства. К поверхностям трещины приложены равные по величине и противоположно направленные нормальные усилия, а на бесконечности перемещения стремятся к нулю. Обозначим усилие, приложенное к верхней поверхности трещины, через $t(x_1, x_2)$. Известно, что рассматриваемая задача сводится к псевдодифференциальному уравнению в области трещины [1]

$$p_G \Lambda u(x_1, x_2) = \frac{1-\nu}{\mu} t(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G; \quad u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \notin G \quad (1.1)$$

Здесь $u(x_1, x_2)$ – перемещение верхней поверхности трещины, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, Λ – псевдодифференциальный оператор с символом $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$$\Lambda u = F^{-1}(|\xi| \tilde{u}(\xi)), \quad \tilde{u}(\xi) = \int_{R^2} u(x_1, x_2) \exp[i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)] dx_1 dx_2$$

где $\tilde{u}(\xi)$ – преобразование Фурье функции $u(x_1, x_2)$, F^{-1} – обратное преобразование Фурье, p_G – сужение на область трещины G .

Несмотря на то, что оператор Λ не является локальным и для него нет соответствующего принципа максимума, оказалось, что решения уравнения (1.1) обладают многими из свойств решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона. В частности, для решений задачи (1.1) были доказаны теоремы сравнения [2–4] и изопериметрические неравенства [5–7], аналогичные имеющим место для уравнения Пуассона (см. также [8, 9]). Отмечалось также [10] наличие связи между решениями уравнения (1.1) и уравнения Пуассона.

Цель данной статьи – перенесение на уравнение (1.1) еще одного результата, справедливого для уравнения Пуассона.

Методом движущейся гиперплоскости А.Д. Александрова было доказано следующее утверждение [11].

Пусть $u(x)$ – решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x) = -1, \quad x \in D \subset R^n; \quad u(x') = 0, \quad x' \in \partial D \quad (1.2)$$

Здесь D – ограниченная область в R^n , имеющая достаточно гладкую границу ∂D . Если выполнено условие

$$\partial u(x')/\partial n = \text{const} \quad (1.3)$$

где \mathbf{n} – единичная внешняя нормаль к ∂D , то область D – шар.

Вслед за работой [11] появилось еще несколько работ, в которых данный результат доказывался иными методами [12, 13].

Пусть теперь $u(x_1, x_2)$ – решение уравнения (1.1). Известно, что вблизи гладкой границы трещины ∂G , функция $u(x_1, x_2)$ имеет следующую асимптотику:

$$u(x_1, x_2) \approx 2 \frac{1-\nu}{\mu} \frac{K_I(x'_1, x'_2)}{\sqrt{2\pi}} s^{1/2}, \quad (x'_1, x'_2) \in \partial G \quad (1.4)$$

Точка (x_1, x_2) лежит на нормали к границе ∂G , проведенной через точку (x'_1, x'_2) , s – расстояние между точками (x_1, x_2) и (x'_1, x'_2) , $K_I(x'_1, x'_2)$ – коэффициент интенсивности напряжений (КИН).

Предположим, что приложенные к поверхностям трещины усилия однородны, т.е.

$$t(x) = t_0 = \text{const} > 0 \quad (1.5)$$

Из соотношения (1.4) видно, что в задаче о трещине нормального разрыва аналогом условия (1.3) является условие

$$K_I(x'_1, x'_2) = K_I^0 = \text{const} \quad (1.6)$$

Следовательно, для уравнения (1.1) вопрос можно сформулировать следующим образом: верно ли, что если в случае однородной нормальной нагрузки КИН постоянен вдоль контура ограниченной трещины, то трещина имеет форму круга?

Отметим также, что при различных видах заданных нагрузок вопрос построения областей трещины, для которых КИН постоянен вдоль контура, обсуждался [8]¹ в связи с построением экстремальных контуров трещин.

2. Формулировка и схема доказательства теоремы.

Теорема 1. Пусть к поверхностям трещины G , ограниченной простым, замкнутым, гладким (класса C^∞) контуром ∂G , приложены однородные нормальные усилия $t(x_1, x_2) = t_0$, КИН постоянен вдоль контура трещины ($K_I(x'_1, x'_2) = K_I^0$). Тогда область трещины G – круг.

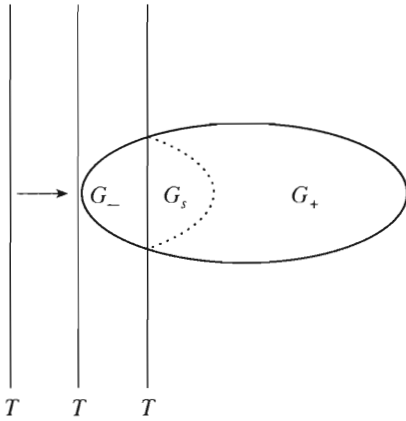
Для доказательства теоремы, следуя известному подходу [11], воспользуемся методом движущейся гиперплоскости А.Д. Александрова. Этот метод основан на нескольких геометрических утверждениях. Приведем их двумерные формулировки, которые потребуются в дальнейшем.

Утверждение 1. Пусть G – ограниченная плоская область и для любого направления найдется прямая, имеющая данное направление и такая, что область G симметрична относительно этой прямой. Тогда G – круг.

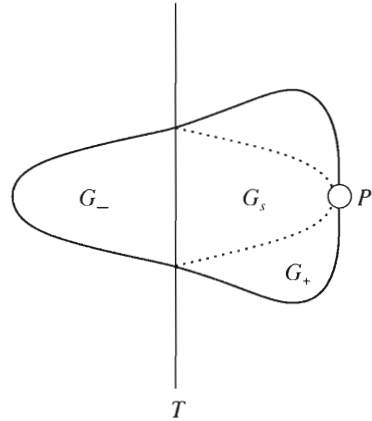
Предположим, что ∂G – простая, замкнутая, гладкая кривая. Возьмем произвольное направление и прямую T , имеющую данное направление и не пересекающую область G . Начнем двигать эту прямую параллельно себе в направлении области G .

Прямая T делит плоскость на две полуплоскости R_-^2 и R_+^2 , расположенные в направ-

¹ См. также: Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Некоторые качественные методы в механике разрушения: Препринт № 76. М.: Ин-т проблем механики АН СССР. 1976. 53 с.



Фиг. 1



Фиг. 2

лениях противоположном и совпадающем с направлением движения прямой T соответственно. При продвижении прямой T она сперва коснется замыкания области G , обозначаемого \bar{G} , а затем начнет пересекать его. В этом случае область G делится на две части G_- и G_+ , принадлежащие полуплоскостям R_-^2 и R_+^2 . Отразим область G_- симметрично относительно прямой T и образ G_- при этом отображении обозначим G_s (фиг. 1). По мере продвижения прямой T область G_- растет, а область G_+ убывает. В силу этого область G_s вначале будет принадлежать G_+ , а потом перестанет принадлежать. Рассмотрим предельное положение прямой T , при котором область G_s еще принадлежит области G_+ .

Утверждение 2. Возможны всего два варианта предельного положения:

- 1) граница области G_s касается границы области G_+ в некоторой точке $P \in \partial G$ (фиг. 2);
- 2) прямая T становится ортогональной границе ∂G в некоторой точке Q пересечения T с ∂G (фиг. 3).

Ниже будет показано, что предположение о том, что при предельном положении прямой T $G_s \neq G_+$, приводит к противоречию. Следовательно, при предельном положении прямой T области G_s и G_+ совпадают, что означает симметричность области G относительно T .

Поскольку такое утверждение будет доказано для предельной прямой T произвольного направления, из утверждения 1 следует, что G – круг.

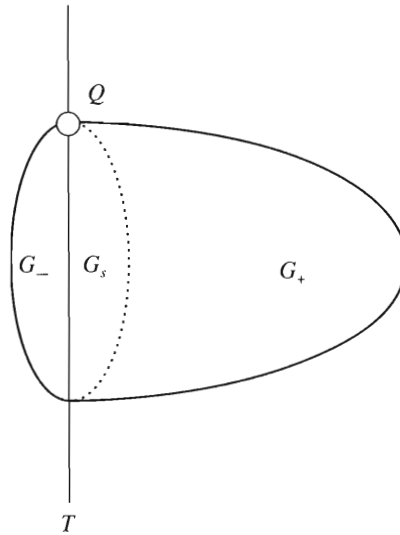
3. Доказательство вспомогательных утверждений и теоремы. Для доказательства будет удобнее использовать отличную от (1.1), но эквивалентную ей, запись уравнения задачи о трещине нормального разрыва. Эта задача может быть сведена к смешанной краевой задаче для гармонической в полупространстве функции (см. например, [2]).

Рассмотрим полупространство $R_+^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3): x_3 > 0\}$.

Предположим, что область G лежит в плоскости $x_3 = 0$. Пусть $U(x)$ – гармоническая в R_+^3 функция. На границе $x_3 = 0$ зададим следующие смешанные условия:

$$U(x_1, x_2, 0) = 0, \quad (x_1, x_2) \notin G \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial U(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3} = -\frac{1-\nu}{\mu} t_0, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad t_0 > 0 \tag{3.2}$$



Фиг. 3

Примем также, что

$$U(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

Обозначим $U(x_1, x_2, 0) = u(x_1, x_2)$. Так, определенная функция $u(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению (1.1) с $t(x_1, x_2) = t_0$. В свою очередь, если $u(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то гармоническая в полупространстве функция $U(\mathbf{x})$, равная $u(x_1, x_2)$ при $x_3 = 0$, удовлетворяет условиям (3.1), (3.2).

Возьмем произвольную плоскость Π , параллельную оси x_3 и не пересекающую G . Линию пересечения плоскостей Π и $x_3 = 0$ обозначим T . Начнем двигать плоскость Π параллельно себе в направлении области G . При этом прямая T сначала коснется области G , а затем начнет пересекать ее. Плоскость Π делит полупространство R_+^3 на два четвертьпространства. Одно из них, лежащее относительно Π в направлении, противоположном направлению движения, обозначим S_- , другое обозначим S_+ . Часть области G , принадлежащую S_- , обозначим, как и выше, G_- . Другую часть области G , которая принадлежит S_+ , обозначим G_+ . Отобразим S_- на S_+ симметрично относительно плоскости Π . При этом область G_- отображается симметрично относительно прямой T на область G_s , которая лежит на границе полупространства R_+^3 и принадлежит S_+ . Как уже отмечалось выше, сначала область G_s будет принадлежать G_+ , а затем перестанет принадлежать. Рассмотрим предельное положение плоскости Π , при котором область G_s еще принадлежит области G_+ . Введем систему координат так, что предельное положение плоскости Π совпадает с плоскостью $x_1 = 0$. В этом случае $S_+ = \{\mathbf{x}: x_3 \geq 0 \text{ и } x_1 \geq 0\}$. Построим в S_+ функцию

$$V(x_1, x_2, x_3) = U(-x_1, x_2, x_3) \quad (3.3)$$

Из определения (3.3) и гармоничности функции $U(\mathbf{x})$ следует, что $V(\mathbf{x})$ – функция, гармоническая в S_+ . Граница S_+ (∂S_+) состоит из двух полуплоскостей: $\Pi_+ = \Pi \cap R_+^3$ и $F_+ = \{(x_1, x_2, 0), x_1 \geq 0\}$.

Из определения (3.3) следует, что

$$V(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) = U(0, x_2, x_3), \quad \mathbf{x} \in \Pi_+ \quad (3.4)$$

На границе F_+ , согласно соотношениям (3.1)–(3.3), имеем

$$V(x_1, x_2, 0) = 0, \quad (x_1, x_2) \notin G_s \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial V(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3} = \frac{\partial U(-x_1, x_2, 0)}{\partial x_3} = -\frac{1-\nu}{\mu} t_0, \quad (x_1, x_2) \in G_s \quad (3.6)$$

Поскольку далее будет неоднократно использоваться усиленный принцип максимума Хопфа [14], приведем его здесь в том виде, в котором он понадобится в дальнейшем.

Усиленный принцип максимума Хопфа. Пусть функция $W(\mathbf{x})$ определена и непрерывна в замыкании \bar{D} области $D \subset R^n$ и внутри D удовлетворяет неравенству

$$\Delta W(\mathbf{x}) \leq 0$$

тогда $W(\mathbf{x})$ достигает минимального значения на границе ∂D . Предположим, что $W(\mathbf{x})$ достигает минимального значения в точке $x'_0 \in \partial D$ и что можно вписать в D шар, пересекающийся с ∂D в единственной точке x'_0 . В частности, это возможно если поверхность ∂D гладкая в некоторой окрестности x'_0 . Предположим также, что в точке x'_0 имеется производная функции $W(\mathbf{x})$ по некоторому направлению l , не касательному ∂D в данной точке и идущему внутрь D , тогда либо $\partial W(x'_0)/\partial l > 0$, либо $W(\mathbf{x}) \equiv W(x'_0) = \text{const}$.

Лемма 1. Для $\mathbf{x} \in S_+$ справедливо неравенство $U(\mathbf{x}) \geq V(\mathbf{x})$, причем, если $G_s \neq G_+$, то $U(\mathbf{x}) > V(\mathbf{x})$ внутри S_+ .

Доказательство. Из теорем сравнения [2, 4] следует, что решение уравнения (1.1) в случае $u(x_1, x_2) \geq 0$ неотрицательно, причем если $u(x_1, x_2) \neq 0$, то $u(x_1, x_2) > 0$ внутри G . Следовательно, на границе R_+^3 функция $U(\mathbf{x})$ неотрицательна и из принципа максимума следует, что $U(\mathbf{x}) \geq 0$ в R_+^3 , причем если $u(x_1, x_2) \neq 0$, то $U(\mathbf{x}) > 0$ при $x_3 > 0$.

В четвертьпространстве S_+ рассмотрим функцию

$$W(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}) \quad (3.7)$$

Из того, что $U(\mathbf{x})$ и $V(\mathbf{x})$ гармонические функции следует, что $W(\mathbf{x})$ – функция, гармоническая в S_+ .

Из определения (3.7) и равенств (3.4) следует

$$W(\mathbf{x}) = W(0, x_2, x_3) = 0, \quad \mathbf{x} = (0, x_2, x_3) \in \Pi_+ \quad (3.8)$$

Из условий (3.1) и (3.5) имеем

$$W(x_1, x_2, 0) = 0, \quad (x_1, x_2, 0) \notin G_+ \quad (3.9)$$

Из того, что $u(x_1, x_2) > 0$ в G_+ , и из условия (3.5) имеем

$$W(x_1, x_2, 0) > 0, \quad (x_1, x_2, 0) \in G_+ \setminus G_s \quad (3.10)$$

Из стремления функции $U(\mathbf{x})$ к нулю на бесконечности получим

$$W(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

Таким образом, согласно соотношениям (3.8)–(3.11), если на границе ∂S_+ имеется точка, в которой $W(\mathbf{x}) < 0$, то эта точка принадлежит области G_s . В этом случае функция $W(\mathbf{x})$ имеет

отрицательный минимум, который достигается в этой области, однако, согласно условиям (3.2) и (3.6)

$$\frac{\partial W(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3} = \frac{\partial U(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3} - \frac{\partial V(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3} = 0 \quad \text{при } (x_1, x_2, 0) \in G_s \quad (3.12)$$

Отсюда и из усиленного принципа максимума Хопфа следует $W(\mathbf{x}) \equiv \text{const}$, что противоречит предположению. Таким образом, $W(\mathbf{x}) \geq 0$ на ∂S_+ и $W(\mathbf{x}) > 0$ внутри S_+ .

Лемма 2. Пусть КИН, определяемые гармонической в полупространстве функцией, удовлетворяющей граничным условиям (3.1) и (3.2), постоянны вдоль контура ∂G , $K_I(x'_1, x'_2) = K_I^0$. Тогда, если $G_s \neq G_+$, то не может реализоваться вариант 1 предельного положения.

Доказательство. Рассмотрим функцию $W(\mathbf{x})$ в S_+ . Из леммы 1 следует, что $W(\mathbf{x})$ неотрицательна и принимает минимальное значение, равное нулю, на ∂S_+ . В частности, $W(\mathbf{x}) = 0$ в точке P (фиг. 2). Введем в окрестности точки P локальную криволинейную систему координат (s, y_2, y_3) , где s – натуральный параметр кривой, отсчитываемый от точки P , ось y_2 направлена вне области G по главной нормали к ∂G в точке границы с параметром s и ось y_3 оставим сонаправленной с осью x_3 , но имеющей начало в текущей точке с параметром s . В плоскости $y_2 y_3$ перейдем к полярной системе координат

$$y_2 = r \cos \theta, \quad y_3 = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Из результатов анализа поведения решений эллиптических уравнений вблизи ребра [15] можно получить асимптотику гармонической в полупространстве функции, удовлетворяющей граничным условиям (3.1) и (3.2), вблизи границы ∂G . В системе координат (s, r, θ) , учитывая условие $K_I = K_I^0$, имеем [16, 17]

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1-\nu}{\mu} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_I^0 r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} - t_0 r \sin \theta \right\} + O(r^{3/2}) \quad (3.13)$$

В частности, разложение (3.13) справедливо в плоскости, ортогональной границе ∂G в точке P . Из определения функции $V(\mathbf{x})$ следует, что в этой плоскости она имеет асимптотику, совпадающую с (3.13). Отсюда получаем асимптотику функции $W(\mathbf{x})$ в данной плоскости в окрестности точки P

$$W(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}) = O(r^{3/2})$$

Видно, что в плоскости, ортогональной границе ∂G в точке P , у функции $W(\mathbf{x})$ имеются производные по направлениям, не лежащим в плоскости трещины, причем эти производные равны нулю. В частности, $\partial W(P)/\partial x_3 = 0$. Отсюда и из усиленного принципа максимума Хопфа следует, что $W(\mathbf{x}) \equiv \text{const}$, что противоречит предположению $G_s \neq G_+$.

Лемма 3. Пусть КИН, определяемые гармонической в полупространстве функцией, удовлетворяющей граничным условиям (3.1) и (3.2), постоянны вдоль контура ∂G , $K_I(x'_1, x'_2) = K_I^0$. Тогда, если $G_s \neq G_+$, то не может реализоваться вариант 2 предельного положения.

Доказательство опирается на следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4. Пусть для гармонической в полупространстве функции выполнены граничные условия (3.1) и (3.2), $K_I(x'_1, x'_2) = K_I^0$, реализуется вариант 2 предельного положения и $G_s \neq G_+$. Рассмотрим точку Q (фиг. 3). В этой точке $W(Q) = 0$. Возьмем

произвольное направление l , не касательное ∂S_+ в точке Q и идущее внутрь области S_+ . Из перечисленных условий следует, что функция $W(\mathbf{x})$ имеет первую и вторую производные в направлении l в точке Q , причем эти производные равны нулю:

$$W_l(Q) = 0, \quad W_{ll}(Q) = 0 \tag{3.14}$$

Доказательство. Во введенных выше координатах (s, r, θ) в окрестности точки Q справедливо [16, 17] асимптотическое разложение гармонической в полупространстве функции $U(\mathbf{x})$, удовлетворяющей условиям (3.1), (3.2),

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1-\nu}{\mu} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[K_1^0 r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{r^{3/2}}{3} \left(M(s) \sin \frac{3\theta}{2} + K_1^0 \kappa(s) \sin^3 \frac{\theta}{2} \right) \right] - t_0 r \sin \theta \right\} + O(r^{5/2}) \tag{3.15}$$

Здесь $M(s)$ – гладкая функция, определенная на контуре, $\kappa(s)$ – кривизна контура.

Гладкая, квадратичная по переменным x_1, x_2, x_3 часть решения отсутствует в (3.15) в силу краевых условий (3.1), (3.2).

В окрестности точки Q введем прямоугольную систему координат $Qz_1z_2z_3$ так, что ось z_1 направлена по касательной к ∂G в точке Q , z_2 – по главной нормали вне области G и z_3 – параллельно оси x_3 . Перейдем к сферическим координатам

$$z_1 = \rho \sin \psi \cos \varphi, \quad z_2 = \rho \sin \psi \sin \varphi, \quad z_3 = \rho \cos \psi; \quad 0 < \psi < \pi/2, \quad 0 < \varphi < \pi$$

Рассмотрим полупрямую, определяемую углами $\psi = \psi_0, \varphi = \varphi_0$. Запишем разложение (3.15), имеющее место в некоторой окрестности Q , для точек этой полупрямой. Выразим входящие в (3.15) переменные r и θ через переменную ρ и углы ψ_0 и φ_0 . Для этого возьмем на полупрямой точку A^0 с координатами $(\rho, \varphi_0, \psi_0)$, что соответствует декартовым координатам (z_1^0, z_2^0, z_3^0) .

Пусть в окрестности точки Q уравнение ∂G в плоскости $z_3 = 0$ имеет вид $z_2 = \Phi(z_1)$. Учитывая, что ось z_1 – касательная к этой кривой, функцию $\Phi(z_1)$ можно записать в виде

$$\Phi(z_1) = -\kappa_Q z_1^2/2 + O(z_1^3) \tag{3.16}$$

где κ_Q – кривизна контура в точке Q .

Уравнение нормальной к ∂G плоскости, проходящей через точку

$$A^* = (z_1^*, \Phi(z_1^*), 0), \text{ имеет вид}$$

$$z_1 - z_1^* + \Phi'(z_1^*)(z_2 - \Phi(z_1^*)) = 0 \tag{3.17}$$

Пусть эта плоскость пересекается с рассматриваемой полупрямой в точке A^0 . Выразим z_1^* через ρ . Для этого в уравнение (3.17) подставим

$$z_1 = z_1^0 = \rho \sin \psi_0 \cos \varphi_0, \quad z_2 = z_2^0 = \rho \sin \psi_0 \sin \varphi_0$$

и выражение (3.16) при $z_1 = z_1^*$. Решая полученное уравнение относительно z_1^* , найдем z_1^* , а затем и $z_2^* = \Phi(z_1^*)$.

Вычислим теперь расстояние r между точками A^0 и A^* . Получим

$$r = \rho q_0^{1/2} \left[1 + \kappa_Q \rho \frac{\sin^3 \psi_0 \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}{2q_0} + O(\rho^2) \right], \quad q_0 = \sin^2 \psi_0 \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \psi_0 \tag{3.18}$$

Определим величину угла θ . Используя равенство

$$\rho \cos \psi_0 = r \sin \theta \tag{3.19}$$

и соотношение (3.18), получим

$$\theta = \theta_0 - \kappa_Q \rho \frac{\sin^2 \psi_0 \cos \psi_0 \cos^2 \varphi_0}{2q_0} + O(\rho^2), \quad \theta_0 = \arcsin \frac{\cos \psi_0}{q_0^{1/2}} \tag{3.20}$$

Подставив выражения (3.18)–(3.20) в асимптотическое разложение (3.15), получим

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{x}) = & \frac{1-\nu}{\mu} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left[K_I^0 \rho^{1/2} q_0^{1/4} \sin \frac{\theta_0}{2} + K_I^0 \kappa_Q \rho^{3/2} \frac{\sin^2 \Psi_0 \cos^2 \Phi_0}{4 q_0^{3/4}} \times \right. \right. \\
 & \times \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \sin \Psi_0 \sin \Phi_0 - \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \Psi_0 \right) + \\
 & \left. \left. + \frac{\rho^{3/2} q_0^{3/4}}{3} \left(M(0) \sin \frac{3\theta_0}{2} + K_I^0 \kappa_Q \sin \frac{3\theta_0}{2} \right) \right] - t_0 \rho \cos \Psi_0 \right\} + O(\rho^{5/2})
 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Рассмотрим полупрямую, определяемую углами Ψ_0 и Φ_0 и лежащую в области S_+ ($0 < \Psi_0 < \pi/2$, $0 < \Phi_0 < \pi/2$). При отображении S_- на S_+ , симметричном относительно плоскости $z_1 = 0$, в указанную полупрямую переходит полупрямая, определяемая углами Ψ_0 и Φ_0^* , где $\Phi_0^* = \pi - \Phi_0$, причем точки (ρ, Φ_0^*, Ψ_0) переходят в точки (ρ, Φ_0, Ψ_0) . Из выражения (3.21), определения q_0 (второе выражение (3.18)) и определения θ_0 (второе выражение (3.20)) следует, что члены разложения функции $U(\mathbf{x})$, порядок малости которых по ρ ниже $\rho^{5/2}$, совпадают в точках (ρ, Φ_0^*, Ψ_0) и (ρ, Φ_0, Ψ_0) . Отсюда и из определения функции $W(\mathbf{x})$ следует, что на полупрямой, задаваемой углами Ψ_0 и Φ_0 , $W(\mathbf{x}) = O(\rho^{5/2})$, т.е. равенства (3.14) вдоль данного направления выполнены.

Для доказательства леммы 3 помимо леммы 4 используем также усиленный принцип максимума в точке Q для области S_+ . Поскольку точка Q лежит на ребре прямого двугранного угла, непосредственно использовать усиленный принцип максимума Хопфа невозможно, так как нельзя в S_+ вписать шар, пересекающийся с ∂S_+ лишь в точке Q . Поэтому используем другой, подходящий для данного случая, вариант усиленного принципа максимума [11]. Приведем его формулировку в том виде, который достаточен для доказательства леммы 3.

Утверждение 3. Пусть $D^* \subset R^n$ – область, ограниченная гладкой поверхностью, и Π – гиперплоскость, проходящая через точку $Q \in \partial D^*$ и нормальная поверхности ∂D^* в данной точке. Пусть D – часть области D^* , лежащая по одну сторону от Π . Предположим, что функция $w(x)$, определенная в замыкании области D , удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta w(x) \leq 0, \quad w(x) \geq 0, \quad x \in D; \quad w(Q) = 0; \quad w(x') = 0, \quad x' \in \Pi \cap D^*$$

Пусть l – произвольное направление, входящее в область D и не касательное к поверхности ∂D в точке Q . Предположим также, что существуют производные $w_l(Q)$ и $w_{ll}(Q)$, тогда имеет место одна из трех возможностей:

- 1) $w_l(Q) > 0$; 2) $w_l(Q) = 0$, $w_{ll}(Q) > 0$;
- 3) если $w_l(Q) = 0$ и $w_{ll}(Q) = 0$, то $w(x) \equiv \text{const}$

Утверждение леммы 3 немедленно следует из лемм 1, 4 и указанного варианта усиленного принципа максимума. Действительно, согласно лемме 1 построенная гармоническая функция $W(\mathbf{x})$ неотрицательна. Кроме того, она удовлетворяет условиям (3.8) и (3.14). Таким образом, из утверждения 3 следует, что $W(\mathbf{x}) \equiv \text{const}$, что противоречит предположению $G_s \neq G_+$.

Теперь можно завершить доказательство основной теоремы. Из лемм 2 и 3 следует, что, если $G_s \neq G_+$, то не может реализоваться ни один из двух возможных вариантов предельного положения. Следовательно, в предельном положении $G_s = G_+$, т.е. область G оказалась симметричной относительно прямой T . Поскольку прямая T имела произвольное направление, отсюда следует, что для любого направления найдется прямая, имеющая данное направление, относительно которой область G симметрична. Согласно утверждению 1 это означает, что область G – круг.

Замечание. Было доказано [8]², что постоянство КИН – необходимое условие экстремальности контура трещины. Из доказанной теоремы следует, что в случае однородной нагрузки это условие является также и достаточным.

Работа выполнена при финансовой поддержке (Е.Ш.) Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00116, 01-01-00341) и в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ – 1849.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р.В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С. 111–126.
2. Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Вариационные оценки для коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 59–64.
3. Шифрин Е.И. Плоская трещина нормального отрыва при наличии линейных связей между ее поверхностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 80–86.
4. Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И. Теоремы сравнения для некоторого класса псевдодифференциальных уравнений и их приложения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 5. С. 1113–1116.
5. Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И. Изопериметрические неравенства и оценки некоторых интегральных характеристик решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоскими трещинами нормального разрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 68–79.
6. Шифрин Е.И. Оценки решения задачи о плоской трещине нормального разрыва в материале со степенным упрочнением // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т. 37. № 4. С. 31–43.
7. Шифрин Е.И. Изопериметрические оценки решений одного класса псевдодифференциальных уравнений и их приложения к задачам о трещинах // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 1044–1048.
8. Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
9. Шифрин Е.И. Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит. 2002. 368 с.
10. Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И. Оценки и приближенные формулы в задаче теории упругости о плоской трещине нормального разрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 120–127.
11. Serrin J. A symmetry problem in potential theory // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1971. V. 43. № 4. P. 304–318.
12. Weinberger H.F. Remark on the preceding paper of Serrin // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1971. V. 43. № 4. P. 319–320.
13. Choulli M., Henrot A. Use of the domain derivative to prove symmetry results in partial differential equations // Math. Nachrichten. 1998. V. 192. P. 91–103.
14. Protter M.H., Weinberger H.F. Maximum Principles in Differential Equations. N.Y.: Springer. 1984. 261 p.
15. Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter. 1994. 520 p.
16. Назаров С.А. Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152–160.
17. Bach M., Nazarov S.A., Wendland W.L. Stable propagation of a mode –1 planar crack in an isotropic elastic space. Comparison of the Irwin and the Griffith approaches // Problemi Attuali dell'Analisi e della Fisica Matematica / ed. P.E. Riccio.: Paper 2nd Intern. Symp. to Memory G. Fichera. Roma: Aracne Edit., 2000. P. 167–189.

Манхэттен (шт. Канзас, США), Москва
e-mail: ramm@math.ksu.edu
shifrin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
22.IX.2003

² См. также: Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Некоторые качественные методы в механике разрушения: Препринт № 76. М.: Ин-т проблем механики АН СССР. 1976. 53 с.