

УДК 539.374

© 2005 г. Д. С. Кондратьев, П. В. Стеценко, И. В. Ширко

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ СЫПУЧИХ СРЕД

Предлагается теория деформирования сыпучей среды за пределами упругости, учитывающая как упругие, так и пластические деформации, и позволяющая проследить переход среды от чисто упругого состояния к состоянию предельного равновесия. Вводится система функций, определяющих компоненты тензоров напряжений и деформаций, и получена разрешающая система уравнений упругопластического деформирования среды для случая плоского деформированного состояния. Указан предельный переход, с помощью которого из этих уравнений получаются уравнения теории предельного равновесия. Решена упругопластическая задача о нагружении трубы (толстостенного кругового цилиндра) внутренним давлением. Показано, что нагрузка, соответствующая переходу трубы в чисто пластическое состояние по всему сечению, не всегда совпадает с нагрузкой, полученной на основании теории предельного равновесия. Определен предельный переход, при котором такое совпадение происходит. В новой постановке решена упругопластическая задача о нагружении кругового слоя, имеющего отверстие (скважину) в центре. Определены глубины залегания пласта, при которых в окрестности скважины появляется область пластической деформации. Найдено предельное значение глубины, при которой происходит схлопывание пласта. Определены остаточные напряжения в окрестности скважины при повторном повышении давления в скважине до величины горного давления. Решена в упругопластической постановке классическая задача о напряженном состоянии плоского склона. Установлено соотношение между механическими характеристиками среды и углом склона, при котором склон по всей глубине всегда остается в упругом состоянии. Показано, что при упругопластическом деформировании возможны три различных напряженно-деформированных состояния. Прослежен переход к состоянию предельного равновесия и установлено, что, в отличие от существующих представлений, пластическое течение склона из жесткопластического материала невозможно при углах склона меньших угла внутреннего трения. При углах склона больших угла внутреннего трения происходит пластическое течение не всего склона, а только его верхнего слоя определенной толщины.

Согласно сложившейся терминологии, под механикой сыпучих сред понимается наука о законах деформирования грунтов, горных пород, собственно сыпучих и гранулированных сред и других материалов, поведение которых объединяется тем, что условия перехода от упругого состояния к состоянию пластического течения (критерии текучести) зависят от гидростатического давления.

Начиная с основополагающей работы Кулона и до начала 1960-х годов механика сыпучих сред развивалась в основном как наука о статике сыпучих сред. Это в значительной степени объясняется тем, что уравнения, описывающие напряженное состояние среды при плоском деформированном состоянии [1], так же как и уравнения теории идеальной пластичности, являются статически определимыми, т.е. в случае статически определимых краевых условий могут

быть решены без привлечения кинематических соотношений. При этом уравнения, описывающие напряженное состояние, принадлежат к гиперболическому типу и имеют два семейства характеристик, являющихся линиями скольжения и пересекающихся под углами, зависящими от угла внутреннего трения сыпучей среды.

Попытки исследования деформированного состояния сыпучей среды основывались, как правило, на предположениях о жесткопластическом поведении материала и его несжимаемости. Последнее предположение приводило к тому, что уравнения для определения полей скоростей также имели два семейства характеристик, которые оказывались взаимно ортогональными и, следовательно, не совпадающими с характеристиками уравнений, описывающих напряжения.

Это противоречие удалось преодолеть в рамках теории течения [2], основанной на применении к критерию текучести ассоциированного закона и предположении о жесткопластическом поведении материала. Основное преимущество этой теории состоит в том, что характеристики уравнений, описывающих поля напряжений и скоростей при плоском деформированном состоянии, совпадают, и области предельного равновесия могут быть определены однозначно. На базе этой модели было проведено [3–6] подробное исследование разрешающей системы уравнений, линий разрыва скоростей и напряжений, решен ряд новых задач, в том числе и со смешанными краевыми условиями, разработаны эффективные численные методы решения краевых задач. Недостатком этой теории, как и всякой теории предельного равновесия, является то, что она позволяет определить предельные нагрузки и распределение напряжений и деформаций только в пластических областях. Исторически сложилось так, что изложенные выше теории, следуя Кулону, не вполне точно называют теориями предельного равновесия. Их основная задача – нахождение предельных нагрузок, трактуемых как нагрузки, при достижении которых происходит потеря равновесия (потеря устойчивости) среды. По существу, с современной точки зрения, они являются теориями течения идеально-жесткопластического материала, а предельные нагрузки понимаются как нагрузки, при достижении которых такое течение становится возможным. Именно в этом смысле указанные термины будут применяться в дальнейшем.

Попытка учета упругих свойств материала<sup>1</sup> в рамках известного подхода [2] приводит к тому, что скорости полных деформаций начинают зависеть не только от напряжений, но и от их частных производных по времени, что вызывает значительные математические трудности как при анализе разрешающей системы уравнений, так и при решении конкретных задач.

Другой подход к определению напряженно-деформированного состояния сыпучей среды состоит в том, что в качестве уравнений связи между компонентами тензоров напряжений и деформаций широко используются, особенно в инженерных приложениях [7, 8], соотношения, подобные соотношениям теории упругости. На начальных этапах нагружения упругие коэффициенты полагаются постоянными, т.е. справедлив обычный закон Гука, а по мере роста нагрузок их считают переменными, определяемыми из эксперимента. При обработке экспериментальных диаграмм рекомендуется использовать как касательные, так и секущие модули, т.е. применяемая процедура подобна способу введения переменных коэффициентов упругости в методе упругих решений, разработанному в деформационной теории пластичности. Однако гипотезы, позволяющие применять этот метод в механике сыпучих сред, не сформулированы и общепринятая деформационная теория сыпучих сред до настоящего времени не разработана. Переход от упругого состояния к состоянию предельного равновесия исследован недостаточно.

Отметим, что аналогичная ситуация имеет место и в теории пластичности. Так, при упруго-пластическом изгибе и кручении стержней и при изгибе пластин переход всего сечения стержня или пластины в пластическое состояние происходит при внешних нагрузках, совпадающих с нагрузками, даваемыми теорией предельного равновесия (см., например, [9, 10]). С другой стороны, при упругопластическом деформировании толстостенной трубы все сечение трубы переходит в чисто пластическое состояние при нагрузке, меньшей предельной, причем в случае изгиба и кручения переход всего сечения в чисто пластическое состояние сопровождается неограниченным возрастанием деформаций, тогда как в случае трубы деформации остаются конечными [11].

Прежде чем перейти к построению деформационной теории сыпучих сред, отметим, что в теории пластичности имеется теорема А.А. Ильюшина [12], утверждающая, что в случае простого нагружения теория течения и деформационная теория приводят к одинаковым результа-

<sup>1</sup> Кукуджанов В.Н. и др. Исследование локализаций пластических деформаций при потере устойчивости откосов: Препринт № 538. М.: ИПМ РАН, 1994.

там, то есть уравнения теории течения могут быть проинтегрированы. При доказательстве этой теоремы используется предположение о несжимаемости материала и степенном законе упрочнения. Поскольку в модели [2] имеет место изменение объема, а материал считается не упрочняющимся, то прямой перенос теоремы Ильюшина на нее невозможен. Было показано [13, 14], что для случая простого деформирования уравнения теории течения [2] удастся проинтегрировать и представить определяющие уравнения механики сыпучих сред в виде уравнений деформационной теории пластичности [15].

**1. Условие интегрируемости уравнений теории течения.** В механике грунтов, горных пород и сыпучих сред критерий предельного состояния (условие пластического течения) обычно принимается в виде

$$\Phi(\sigma, \tau) = 0, \quad \sigma = \sigma_{ii}/3, \quad \tau = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}/2 \tag{1.1}$$

где  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений. Вид функции определяется из эксперимента, причем  $d\tau/d\sigma \leq 0$ . Здесь и далее полагается, что растягивающие напряжения положительны.

На основании ассоциированного закона течения [2] для компонент скоростей пластических деформаций и скорости изменения относительного объема будем иметь

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \left( \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \delta_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \frac{s_{ij}}{2\tau} \right), \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{\lambda \partial \Phi}{3 \partial \sigma} \tag{1.2}$$

Введем девиатор скоростей пластических деформаций с компонентами  $e_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p - \dot{\epsilon}^p \delta_{ij}$  и интенсивность скоростей пластических деформаций сдвига  $\eta^p = \sqrt{e_{ij}^p e_{ij}^p}/2$ . Тогда для параметра  $\lambda$  получим  $\lambda = 2\eta^p / |\partial \Phi / \partial \tau|$ . Без ограничения общности будем считать что  $\partial \Phi / \partial \tau > 0$ . При этом соотношения (1.2) примут вид

$$\dot{e}_{ij}^p = \frac{\eta^p}{\tau} s_{ij}, \quad \dot{\epsilon}^p = -\frac{2}{3} \eta^p \frac{d\tau}{d\sigma} \tag{1.3}$$

В случае простого деформирования [13, 14]  $\epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij}^0 t$ , и следовательно,  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^0$ ,  $\dot{e}_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^0$ ,  $\eta^p = \sqrt{e_{ij}^0 e_{ij}^0}/2$ , т.е. скорости деформаций не меняются со временем, в гиперпространстве  $\epsilon_{ij}^p$  траектория деформирования – прямая линия, а компоненты тензора напряжений, в силу соотношений (1.1), (1.3), остаются постоянными. Значения  $\epsilon_{ij}^0$  должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие ортогональности траектории деформирования к предельной поверхности (1.1) т.е. выполнялось второе из равенств (1.3). Тогда

$$\epsilon^0 = -\sqrt{2e_{ij}^0 e_{ij}^0} d\tau/d\sigma$$

Это важное обстоятельство ранее [13, 14] не учитывалось.

Интегрируя уравнения по  $t$  и учитывая, что

$$\dot{\epsilon}^p t = \epsilon^0 t = \epsilon^p, \quad \eta^p t = \sqrt{e_{ij}^0 e_{ij}^0}/2 t = \sqrt{e_{ij}^p e_{ij}^p}/2 = \gamma^p$$

где  $\gamma^p$  – интенсивность пластических деформаций сдвига, получим выражения

$$e_{ij}^p = \frac{\gamma^p}{\tau} s_{ij} + e_{ij}^*, \quad \epsilon^p = -\frac{2}{3} \gamma^p \frac{d\tau}{d\sigma} + \epsilon^* \tag{1.4}$$

Здесь  $\varepsilon^*$  и  $e_{ij}^*$  – постоянные интегрирования, которые следует определять из начальных условий. Если считать что время  $t$  отсчитывается от момента наступления пластического состояния, то постоянные  $\varepsilon^*$ ,  $e_{ij}^*$  следует принять равными нулю.

В теории упругости тензоры деформаций и напряжений связаны законом Гука

$$e_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij}, \quad \varepsilon^e = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma, \quad \gamma^e = \frac{\tau}{2G} \quad (1.5)$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Допуская, как обычно [15], что полные деформации можно представить в виде суммы пластических и упругих деформаций, из равенств (1.4) и (1.5) и получим соотношения

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \left( \frac{1}{2G} + \frac{\gamma^p}{\tau} \right) s_{ij} = \frac{\gamma}{\tau} s_{ij}, \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \left( \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} - \frac{2\gamma^p}{3\sigma} \frac{d\tau}{d\sigma} \right) \sigma \quad (1.6)$$

подобные соотношениям Генки в деформационной теории пластичности [15]. Отметим, что из иных соображений они были получены ранее [13, 14]. Такое представление определяющих уравнений позволяет разработать итерационные методы решения [16, 17] задач механики сыпучих сред, аналогичные методам упругих решений в деформационной теории пластичности.

Если зависимость (1.1) – линейная функция вида

$$\Phi(\sigma, \tau) = \tau - (H - \sigma) \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad (1.7)$$

где  $H$  и  $\alpha$  – постоянные материала, определяемые его механическими свойствами, то в пространстве главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  она представляет круговой конус с осью  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  и углом при вершине  $\varphi = \operatorname{arctg}(\sqrt{2/3} \operatorname{tg} \alpha)$ .

Обычно используемый в приложениях критерий Кулона [1, 18] (если отказаться от требования  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) имеет вид

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq [2H - (\sigma_1 + \sigma_2)] \sin \rho \quad (1.8)$$

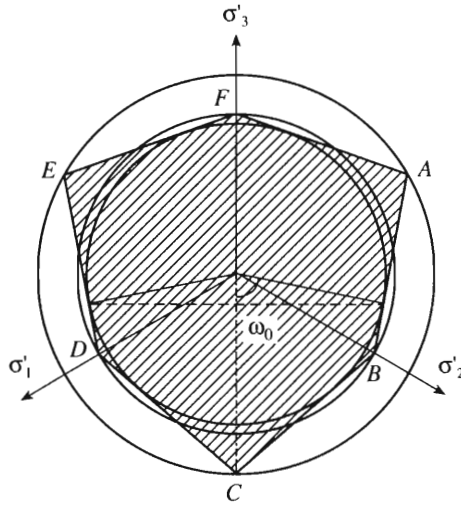
где  $\rho$  – угол внутреннего трения,  $H$  – приведенный коэффициент сцепления, и в этом же пространстве является шестигранной пирамидой, имеющей три плоскости симметрии, которые пересекаются по той же оси  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ .

Использование критерия (1.8) при исследовании уравнений, описывающих трехмерное напряженное состояние среды, приводит к значительным математическим трудностям, и с этой точки зрения конус (1.7) может рассматриваться как аппроксимация критерия (1.8).

Обычно [18] в качестве аппроксимирующего рекомендуется использовать конус, вписанный в пирамиду (1.8). Однако возможны и другие подходы. На фиг. 1 показан шестиугольник, образованный пересечением пирамиды (1.8) с девiatorной плоскостью  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ , и три окружности, образованные пересечением конуса (1.7) с этой же плоскостью, для трех разных значений  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sqrt{3} \sin \rho}{\sqrt{3 + \sin^2 \rho}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{2,3} = \frac{2\sqrt{3} \sin \rho}{3 \pm \sin \rho} \quad (1.9)$$

причем  $\alpha_1$  соответствует конусу, вписанному в пирамиду (1.7),  $\alpha_2$  – малому, а  $\alpha_3$  – большому описанному вокруг нее конусам.



Фиг. 1

**2. Разрешающая система уравнений. Плоское деформированное состояние.** Главные значения тензора напряжений могут быть выражены через величины  $\sigma$ ,  $\tau$  и новую функцию  $\omega$  в виде

$$\sigma_{1,2} = \sigma + 2\tau \cos(\omega \mp \pi/3) / \sqrt{3}, \quad \sigma_3 = \sigma - 2\tau \cos \omega / \sqrt{3} \quad (2.1)$$

Тогда главные значения тензора деформаций на основании выражений (1.6) запишутся так:

$$\epsilon_{1,2} = \epsilon + 2\gamma \cos(\omega \mp \pi/3) / \sqrt{3}, \quad \epsilon_3 = \epsilon - 2\gamma \cos \omega / \sqrt{3} \quad (2.2)$$

При этом имеет место конечное соотношение

$$\epsilon = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma - \frac{2}{3} \left( \gamma - \frac{\tau}{2G} \right) \frac{d\tau}{d\sigma} \quad (2.3)$$

Компоненты тензора напряжений в ортогональной декартовой системе координат могут быть представлены в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + 2\tau [n_{i1}n_{j1} \cos(\omega - \pi/3) + n_{i2}n_{j2} \cos(\omega + \pi/3) - n_{i3}n_{j3} \cos \omega] / \sqrt{3} \quad (2.4)$$

где  $n_{ij}$  – девять направляющих косинусов, задающих направления главных осей тензора напряжений, однозначно определяемые тремя углами Эйлера. Аналогичным образом могут быть представлены и компоненты тензора деформаций через величины (2.2), (2.3) и те же значения направляющих косинусов. Следовательно, компоненты тензора напряжений и деформаций определяются пятью функциями  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$  и тремя углами Эйлера. Трех дифференциальных уравнений равновесия и двух конечных соотношений (1.1), (2.3), недостаточно для их нахождения, т. е. задача статически неопределима и для ее решения требуется привлечь уравнения для перемещений.

Разрешающую систему дифференциальных уравнений получим для случая плоского деформированного состояния, когда  $\epsilon_z = 0$  и тензоры напряжений и деформаций от координаты  $z$  не зависят. Ось  $z$  – главная ось, т. е.  $\sigma_z = \sigma_3$ ; угол собственного вращения  $\varphi$  является углом между осью  $x$  и направлением главного напряжения  $\sigma_1$ , а

остальные углы Эйлера равны нулю. В этом случае равенства (2.4) можно представить в виде

$$\sigma_{x,y} = \sigma + \tau[\cos\omega/\sqrt{3} \pm \sin\omega\cos 2\varphi], \quad \tau_{xy} = \tau \sin\omega \sin 2\varphi \quad (2.5)$$

Главные значения компонентов тензора деформаций (2.2) запишутся так:

$$\varepsilon_{1,2} = 2\gamma \sin(\pi/3 \pm \omega), \quad \varepsilon_3 = 0 \quad (2.6)$$

а для самих компонентов тензора деформаций получим

$$\varepsilon_{x,y} = \gamma[\sqrt{3}\cos\omega \pm \sin\omega\cos 2\varphi], \quad \gamma_{xy} = \gamma \sin\omega \sin 2\varphi \quad (2.7)$$

Подставляя компоненты (2.5) в два уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}[\sigma + \tau(\cos\omega/\sqrt{3} + \sin\omega\cos 2\varphi)] + \frac{\partial}{\partial y}(\tau \sin\omega \sin 2\varphi) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}[\sigma + \tau(\cos\omega/\sqrt{3} - \sin\omega\cos 2\varphi)] + \frac{\partial}{\partial x}(\tau \sin\omega \sin 2\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Двух уравнений (2.8) и критерия (1.1) недостаточно для определения напряженного состояния, т. е. задача продолжает оставаться статически неопределимой.

Выражая в левых частях формул (2.7) компоненты тензора деформации через компоненты вектора перемещений

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

и деля первые два равенства на третье, получим два уравнения для определения поля смещений

$$\begin{aligned} 2 \sin\omega \sin 2\varphi \frac{\partial u}{\partial x} - (\sqrt{3}\cos\omega + \sin\omega\cos 2\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) &= 0 \\ 2 \sin\omega \sin 2\varphi \frac{\partial v}{\partial y} - (\sqrt{3}\cos\omega - \sin\omega\cos 2\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Конечное соотношение (2.3) в случае плоского деформированного состояния принимает вид

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\gamma\cos\omega = \frac{1}{2G}\frac{1-2\nu}{1+\nu}\sigma - \frac{2}{3}\left(\gamma - \frac{\tau}{2G}\right)\frac{d\tau}{d\sigma} \quad (2.10)$$

Четыре дифференциальных (2.8), (2.9) и два конечных соотношения (1.1) и (2.10) содержат шесть искоемых функций  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $u$ ,  $v$  и позволяют найти компоненты тензора напряжений и вектора перемещений  $u$ ,  $v$ .

Полученная система уравнений существенно упрощается если пренебречь упругими деформациями. Для этого достаточно в формуле (2.10) положить равными нулю члены, содержащие множитель  $1/G$ . Полагая, для упрощения дальнейших выкладок, что критерий предельного состояния (1.1) имеет вид линейной функции (1.7), из формулы (2.10) получим

$$\omega = \arccos \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3}} = \omega_0 \quad (2.11)$$

Отметим, что этот же результат можно получить, если допустить что деформации среды, а следовательно и величина  $\gamma$ , неограниченно возрастают. Как будет показано ниже при решении конкретных задач, именно такой предельный переход  $\gamma \rightarrow \infty$  приводит к тому, что решения, полученные с помощью теории упругопластического деформирования, стремятся к решениям, даваемым теорией предельного равновесия.

При выводе формулы (2.11) предполагалось, что конус (1.7) вписан в шестигранную пирамиду Кулона. При этом линии касания конуса с пирамидой лежат в плоскости

$$\sigma_3 = -H \sin^2 \rho + (1 + \sin^2 \rho)(\sigma_1 + \sigma_2)/2 \tag{2.12}$$

которая проходит через вершину пирамиды и пересекает девиаторную плоскость по прямой, показанной на фиг. 1 штриховой линией. Нормаль к поверхности конуса ортогональна оси  $\sigma_3 = \sigma_z$  только вдоль этих двух линий касания, и следовательно, только вдоль них для жесткопластического материала выполняется условие плоского деформирования  $\epsilon_3 = \epsilon_z = 0$ . Иными словами, в этом случае в пространстве главных напряжений точки, соответствующие этому напряженному состоянию, могут находиться только на указанных линиях касания. Тогда очевидно, что критерий (1.7) может быть заменен условием (1.8), которое в данном случае переписется как

$$t = (H - s) \sin \rho; \quad s = (\sigma_1 + \sigma_2)/2, \quad t = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \tag{2.13}$$

Используя известные формулы  $\sigma_{x,y} = s \pm t \cos 2\varphi$ ,  $\tau_{xy} = t \sin 2\varphi$ , получим из условия (2.13)

$$\sigma_{x,y} = s \pm (H - s) \sin \rho \cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = (H - s) \sin \rho \sin 2\varphi$$

Отметим, что эти выражения с учетом формул (2.11), (2.12) и (1.7) могут быть получены непосредственно из соотношений (2.5). При этом уравнения (2.8) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} + \cos 2\varphi \frac{\partial t}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial t}{\partial y} - 2t \left( \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial y} + \sin 2\varphi \frac{\partial t}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial t}{\partial y} + 2t \left( \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

При учете равенства (2.13) для граничных условий, заданных в напряжениях, они позволяют определить напряженное состояние среды, т.е. в результате пренебрежения упругими деформациями задача стала статически определимой.

Уравнения (2.14) принадлежат к гиперболическому типу и имеют два семейства характеристик

$$\lambda \mp \varphi = \text{const}, \quad dy/dx = \text{tg}(\varphi \mp \psi) \tag{2.15}$$

Здесь введены обозначения

$$dt/ds = \cos 2\varphi, \quad 2\psi = \pi/2 + \rho, \quad d\lambda = \sin 2\psi ds/t$$

Уравнения переписутся так:

$$\begin{aligned} 2 \sin 2\varphi \frac{\partial u}{\partial x} - (\cos 2\varphi - \cos 2\psi) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0 \\ 2 \sin 2\varphi \frac{\partial v}{\partial y} + (\cos 2\varphi + \cos 2\psi) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Они также принадлежат к гиперболическому типу, уравнения их характеристик совпадают с (2.15), а условия вдоль характеристик имеют вид

$$du/dv = -\operatorname{tg}(\varphi \mp \psi) \quad (2.17)$$

Отметим, что уравнения (2.14)–(2.17), с точностью до обозначений совпадают с уравнениями теории предельного равновесия, полученными [19] с помощью критерия (1.1), ассоциированного закона течения (1.2) и предположения о жесткопластическом поведении материала. Отличие состоит в том, что в уравнениях (2.16),  $u$ ,  $v$  – компоненты вектора перемещения, а ранее [19] через  $u$ ,  $v$  были обозначены компоненты вектора скорости. Однако уравнения (2.14), (2.16), также являются уравнениями теории предельного равновесия, но получены путем соответствующего предельного перехода из уравнений (2.8), (2.9), учитывающих упругие деформации в пластических областях. Следовательно, разработанная теория упругопластического деформирования содержит в себе теорию предельного равновесия и позволяет исследовать переход среды от чисто упругого состояния к состоянию предельного равновесия.

**3. Нагружение цилиндрической трубы внутренним давлением.** С целью применения полученных уравнений рассмотрим задачу об упругопластическом деформировании цилиндрической трубы внутреннего радиуса  $a$  и внешнего радиуса  $b$ , нагруженную внутренним давлением  $p$  и находящуюся в плоском деформированном состоянии. Внешнее давление равно нулю.

Пока давление  $p$  достаточно мало, труба находится в упругом состоянии по всему сечению. Компоненты тензора деформаций в цилиндрической системе координат, связанной с осью трубы, выражаются через радиальное смещение так:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = 0 \quad (3.1)$$

Они удовлетворяют уравнению совместности деформаций

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0 \quad (3.2)$$

и связаны с компонентами тензора напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  законом Гука

$$\sigma_{r,\theta} = \frac{2G}{1-2\nu}((1-\nu)\varepsilon_{r,\theta} + \nu\varepsilon_{\theta,r}), \quad \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (3.3)$$

Последние, в свою очередь, удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (3.4)$$

Решая систему уравнений (3.1)–(3.4), получим

$$\sigma_{r,\theta} = C_2 \mp \frac{C_1}{r}, \quad \sigma_z = 2\nu C_2, \quad u = \frac{1}{2G} \left( (1-2\nu)C_2 r + \frac{C_1}{r} \right) \quad (3.5)$$

Постоянные интегрирования можно найти из граничных условий

$$\sigma_r|_{r=a} = -p, \quad \sigma_r|_{r=b} = 0 \quad (3.6)$$

Окончательно решение принимает вид

$$\sigma_{r,\theta} = \chi p \left( 1 \mp \frac{b^2}{r^2} \right), \quad \sigma_z = 2\nu \chi p, \quad u = \frac{1}{2G} \chi p \left( (1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right); \quad \chi = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad (3.7)$$

Оно справедливо только в случае, когда труба находится в упругом состоянии по всему сечению. Для того чтобы найти область его применимости, подставим выражение (3.7) при  $r = a$  в критерий текучести (1.7) и найдем критическое давление

$$p_0 = \frac{H \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{(1 + \chi)^2 + (1 - 2\nu)^2 \chi^2/3 + 2(1 + \nu)\chi \operatorname{tg} \alpha/3}} \quad (3.8)$$

после превышения которого в трубе появляется область  $a \leq r \leq c$  пластического состояния. При этом в области  $c \leq r \leq b$  по-прежнему останутся справедливыми формулы (3.5), только постоянные интегрирования уже нужно будет находить из условия непрерывности  $\sigma_r$  в точке  $c$  и второго из граничных условий (3.6).

Поскольку оси  $r, \theta, z$  – главные оси тензоров напряжений и деформаций, компоненты этих тензоров совпадают с выражениями (2.1), (2.2), с точностью до замены индексов 1, 2, 3 на  $\theta, r, z$ . Таким образом, ненулевые компоненты тензоров напряжений и деформаций имеют вид

$$\sigma_{r, \theta} = \sigma + 2\tau \cos(\omega \pm \pi/2)/\sqrt{3}, \quad \sigma_z = \sigma - 2\tau \cos \omega/\sqrt{3} \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{r, \theta} = \varepsilon + 2\gamma \cos(\omega \pm \pi/3)/\sqrt{3}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon - 2\gamma \cos \omega/\sqrt{3} = 0 \quad (3.10)$$

Внося в уравнения равновесия (3.4) и совместности деформаций (3.2) выражения (3.9), (3.10) и принимая критерий текучести в форме (1.7), получим

$$r \frac{d}{dr} \left[ \sigma + \frac{2}{\sqrt{3}}(H - \sigma) \operatorname{tg} \alpha \cos \left( \omega + \frac{\pi}{3} \right) \right] - 2(H - \sigma) \operatorname{tg} \alpha \sin \omega = 0 \quad (3.11)$$

$$r \frac{d}{dr} \left[ \gamma \sin \left( \omega + \frac{\pi}{3} \right) \right] + \gamma \sin \omega = 0 \quad (3.12)$$

Конечное соотношение (2.10) при учете выражения (1.7) принимает вид

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \gamma \cos \omega = \frac{1}{2G} \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \sigma + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha \left( \gamma - \frac{1}{2G} (H - \sigma) \operatorname{tg} \alpha \right) \quad (3.13)$$

Система из трех уравнений (3.11)–(3.13) позволяет найти три искомые функции  $\sigma, \gamma$  и  $\omega$ , которые полностью определяют напряженно-деформированное состояние (НДС) в области  $a \leq r \leq c$ . Радиальное смещение может быть найдено по формуле

$$u = \varepsilon_{\theta} r = 2r\gamma \sin(\omega + \pi/3)$$

Граничные условия для уравнений (3.11), (3.12) находятся из условия непрерывности компонент тензоров напряжений и деформаций на границе  $r = c$  между упругой зоной и областью пластического состояния. После преобразований эти условия приобретают вид

$$r = c: \omega = \omega_c, \quad \sigma = \sigma_c, \quad \gamma = \gamma_c \quad (3.14)$$

где

$$\operatorname{tg} \omega_c = \frac{\sqrt{3}}{1 - 2\nu} \frac{b^2}{c^2}, \quad \sigma_c = H \left[ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \cos \omega_c} \right]^{-1}, \quad \gamma_c = \frac{1}{2G} (H - \sigma_c) \operatorname{tg} \alpha \quad (3.15)$$

В упругой зоне  $c \leq r \leq b$  по-прежнему справедливы формулы (3.5), причем второе из условий (3.6) позволяет записать первые три из них так:

$$\sigma_{r, \theta} = C_1 \left( \frac{1}{b^2} \mp \frac{1}{r^2} \right), \quad \sigma_z = 2\nu \frac{C_1}{b^2}, \quad \frac{C_1}{b^2} = \frac{3\sigma_c}{2(1 + \nu)} \quad (3.16)$$

Значение  $\sigma_c$  дается вторым выражением в (3.15).

Считая величину  $c/b$  параметром нагружения, получим задачу Коши для уравнений (3.11)–(3.13) с начальными условиями (3.15) в точке  $c$  и областью интегрирования  $a \leq r \leq c$ ; в упругой зоне  $c \leq r \leq b$  решение задано аналитически соотношениями (3.16). Внутреннее давление  $p$ , соответствующее конкретному значению параметра  $c/b$ , будет найдено из условия  $p = -\sigma_r(a)$ .

Хотя указанная система уравнений и может быть решена аналитически, это нецелесообразно ввиду громоздкости получающихся выражений. Было приведено [20] подробное численное решение поставленной задачи. Отметим только, что при изменении параметра нагружения  $c/b$  от значения  $a/b$  до 1, внутреннее давление  $p$  меняется от  $p_0$  (3.8) до некоторого давления  $p_1$ , соответствующего переходу трубы в пластическое состояние по всему сечению. Деформации трубы при этом остаются конечными.

Когда внутреннее давление  $p$  в трубе превышает  $p_1$ , упругая зона отсутствует и труба полностью находится в пластическом режиме (однако при этом ее несущая способность не исчерпывается). Во всем сечении трубы по-прежнему справедливы уравнения (3.11)–(3.13) с граничными условиями (3.6). Поскольку в этом случае первое из условий (3.14), (3.15) теряет смысл, введем в качестве параметра нагружения значение функции  $\gamma$  на внешнем контуре трубы. Заданная величина  $\gamma(b)$ , а также второе и третье из условий (3.14), (3.15), позволяют найти значения  $\sigma(b)$ ,  $\omega(b)$  и тем самым определить задачу Коши в области  $a \leq r \leq b$ .

Внутреннее давление  $p$ , соответствующее выбранному значению  $\gamma(b)$ , по-прежнему будет найдено из условия  $p = -\sigma_r(a)$ . Нормируя функцию  $\gamma(b)$ , введем безразмерный параметр  $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(b)$  так, что  $\bar{\gamma}(b) = 1$  соответствует переходу трубы в пластическое состояние по всему сечению. На фиг. 2 при  $\text{tg} \alpha = 1.7$ ,  $\nu = 0.1$  и разных значениях  $\bar{\gamma}$  показаны зависимости безразмерной величины  $\bar{p} = p(b/a)/H$ . По мере возрастания  $\bar{\gamma}$ , что соответствует увеличению смещения  $u(b)$  на внешнем контуре трубы, кривые на фиг. 2 приближаются к предельной кривой, показанной штрихами. Вид этой кривой может быть достаточно просто получен, если рассмотреть предельный случай, когда нагружение трубы приводит к бесконечно большим ее деформациям. Как было показано выше, такой предельный переход равносильен замене  $1/G = 0$  в уравнениях упругопластического деформирования и переходу их в уравнения предельного равновесия.

В этом случае получим  $\omega = \omega_0 = \text{const}$  (2.11), и уравнения (3.11), (3.12) достаточно просто интегрируются:

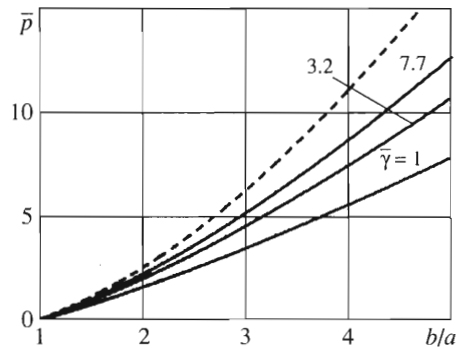
$$\sigma = H - Ar^{-m}, \quad \gamma = Br^{-n}, \quad m, n = 2/[1 + (\text{ctg}^2 \alpha - 1/3)^{\pm 1/2}] \quad (3.17)$$

$A$  и  $B$  – постоянные интегрирования. Граничные условия (3.6) позволяют определить величину  $A$ , а также внутреннее давление, соответствующее этому предельному решению,

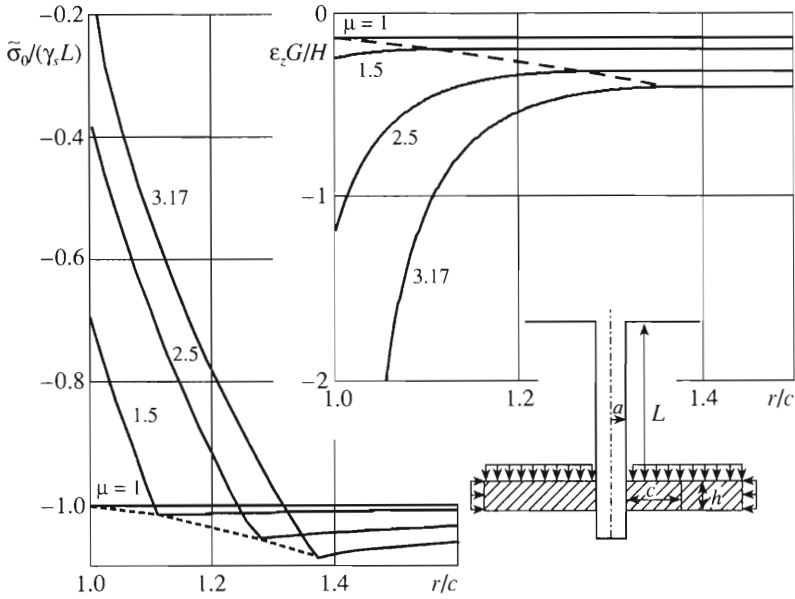
$$p^* = H((b/a)^m - 1) \quad (3.18)$$

Постоянная  $B$  может быть выбрана произвольно, поскольку материал неупрочняющийся, т.е. в предельном состоянии смещения в трубе могут быть определены только с точностью до произвольного постоянного множителя.

Итак, в зависимости от величины внутреннего давления  $p$  труба может находиться в одном из трех режимов деформирования: чисто упругом при  $0 \leq p \leq p_0$ , упруго-



Фиг. 2



Фиг. 3

пластическом при  $p_0 < p \leq p_1$ , чисто пластическом при  $p_1 < p < p^*$ . При  $p = p^*$  деформации трубы, найденные из упругопластического решения, становятся бесконечно большими (разрушение). Внутренние давления, превышающие  $p^*$ , невозможны. Из этих результатов следует, что переход трубы в пластическое состояние по всему сечению не означает наступления предельного равновесия. Нагрузки  $p$  асимптотически стремятся к предельным нагрузкам  $p^*$  (штриховая кривая на фиг. 2) при неограниченном возрастании деформаций трубы. Отметим, что ранее [20] это отмечено не было.

В большинстве случаев значения  $p_1$  и  $p^*$  различаются незначительно, а когда коэффициент Пуассона  $\nu$  и угол внутреннего трения  $\rho$  удовлетворяют равенству  $1 - 2\nu = \sin \rho$ , они просто совпадают (здесь переход от  $\alpha$  к  $\rho$  соответствует первой формуле (1.9)). Это равенство выполняется, в частности, когда материал трубы несжимаемый ( $\nu = 1/2$ ) и идеально-пластический ( $\sin \rho = 0$ ).

Задачу о предельном состоянии цилиндрической трубы рассматривал Надаи [18], полагая, что  $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2 = \sigma$  и материал является несжимаемым. Полученные им компоненты тензора напряжений  $\sigma_r, \sigma_\theta$  и значение предельного давления совпадают с полученными здесь результатами для конуса, вписанного в пирамиду Кулона, т.е.  $\text{tg} \alpha = \text{tg} \alpha_1$ , причем зависимость  $\text{tg} \alpha$  от угла внутреннего трения  $\rho$  определяется первой формулой (1.9). Однако компонента  $\sigma_z$  и смещение  $u$  существенно отличаются от найденных выше. Упругопластическое состояние трубы и переход к состоянию предельного равновесия Надаи не рассматривались.

**4. Упругопластическое деформирование кругового пласта.** В качестве второго примера рассмотрим следующую задачу. Под слоем высоты  $L$  грунта с удельным весом  $\gamma_s$  имеется пласт материала толщины  $h$ , причем  $h \ll L$ . В грунте и пласте пробурена скважина радиуса  $a$ , она заполнена жидкостью с удельным весом  $\gamma_l$  (см. фиг. 3). Требуется определить НДС в пласте, полагая, что переход от упругого состояния к предельному определяется критерием (1.7).

Если скважина отсутствует, то напряженное состояние в пласте соответствует гидростатическому сжатию:  $\sigma_{r, \theta, z} = -\gamma_s L$ , т.е. напряжения равны горному давлению.

При наличии скважины упругие напряжения выражаются формулами (3.5), а постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  определяются из граничных условий

$$\sigma_r|_{r=a} = -\gamma_l L, \quad \sigma_r, \sigma_\theta|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -\gamma_s L$$

Компоненты тензора напряжений принимают вид

$$\sigma_{r,\theta} = -\gamma_s L(1 \mp (1 - \Delta)(a/r)^2) = \sigma \pm \tau, \quad \sigma_z = -\gamma_s L; \quad \Delta = \gamma_l/\gamma_s \quad (4.1)$$

Из закона Гука получим

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \gamma_s L, \quad u = \varepsilon_\theta r = -\frac{1}{2G} \gamma_s L \left[ \frac{1-2\nu}{1+\nu} r + (1-\Delta) \frac{a^2}{r} \right] \quad (4.2)$$

Таким образом, при упругом деформировании наличие скважины не вызывает дополнительных перемещений в вертикальном направлении.

Формулы (4.1), (4.2) справедливы до тех пор, пока весь слой находится в упругом состоянии. Подставляя выражение (4.1) при  $r = a$  в критерий (1.7), найдем критическое значение глубины залегания пласта

$$L_1 = \frac{H}{\gamma_s} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \Delta - \operatorname{tg} \alpha} \quad (4.3)$$

после превышения которой в пласте возникает область пластичности  $a \leq r \leq c$ .

Произведя замену индексов 1, 2, 3  $\rightarrow \theta, r, z$  в формулах (2.1), (2.2), получим

$$-\gamma_s L = \sigma - 2(H - \sigma) \operatorname{tg} \alpha \cos \omega / \sqrt{3} \quad (= \sigma_z) \quad (4.4)$$

Конечное соотношение (2.3) примет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha \left( \gamma - \frac{1}{2G} (H - \sigma) \operatorname{tg} \alpha \right) \quad (4.5)$$

Подставляя выражения для компонент тензоров напряжений и деформаций в уравнения (3.2), (3.4), получим уравнение (3.11) и уравнение

$$r \frac{d}{dr} [\varepsilon + 2\gamma \cos(\omega - \pi/3) / \sqrt{3}] + 2\gamma \sin \omega = 0 \quad (4.6)$$

Два дифференциальных ((3.11), (4.6)) и два алгебраических ((4.4), (4.5)) уравнения позволяют найти четыре искомые функции  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$  и  $\gamma$ , которые полностью определяют НДС в области  $a \leq r \leq c$ .

В упругой зоне  $c \leq r < \infty$  компоненты тензора напряжений по-прежнему будут иметь вид (3.5); при учете условий на бесконечности имеем  $C_2 = -\gamma_s L$ , и тогда

$$\sigma_{r,\theta} = -\gamma_s L \pm C_1 / r^2 \quad (4.7)$$

Из условий непрерывности компонент тензора напряжения на границе  $r = c$  между областями упругого и предельного состояний имеем граничные условия (3.14), в которых

$$\omega_c = -\pi/2; \quad \sigma_c = -\gamma_s L, \quad \gamma_c = \frac{1}{2G} (H - \sigma_c) \operatorname{tg} \alpha \quad (4.8)$$

а для постоянной в формуле (4.7) получаем  $C_1 = c^2(H + \gamma_s L) \operatorname{tg} \alpha$ .

Если ввести относительный радиус  $r/c$ , то условия (3.14), (4.8) при  $r/c = 1$  и заданных значениях  $\gamma_s$  и  $L > L_1$  определяют задачу Коши для системы уравнений (3.11), (4.4)–(4.6).

Их численное интегрирование ведется до точки  $a/c < 1$ , в которой выполняется крайнее условие

$$\sigma_a + 2(H - \sigma_a) \operatorname{tg} \alpha \cos(\omega_a + \pi/3) / \sqrt{3} = -\gamma_l L \quad (= \sigma_r|_{r=a}) \quad (4.9)$$

Были приведены [20] подробные результаты таких расчетов. Однако систему уравнений (4.4), (4.9) можно решить в явном виде и показать, что решение существует только при

$$L \leq L_2 = 2 \frac{H}{\gamma_s} \frac{\sin \rho}{(1 - \Delta) - (1 + \Delta) \sin \rho}$$

Оказывается, что при  $L \rightarrow L_2$  компоненты тензора деформации неограниченно возрастают, а при  $L > L_2$  решение не существует, что физически соответствует разрушению (схлопыванию) пласта. Этот интересный факт иллюстрирует серия кривых  $\varepsilon_z G/H$  для ряда значений параметра  $\mu = L/L_1$ , показанная в правой верхней части фиг. 3. Как и ранее [20], для механических характеристик материала приняты значения  $\operatorname{tg} \alpha = \nu = \Delta = 1/3$ , при этом предельное значение параметра  $\mu = L_2/L_1 = 3.178$ . Пересечение штриховой линии на фиг. 3 с кривой, соответствующей определенному значению параметра  $\mu$ , дает безразмерную величину границы упругой зоны и области пластичности  $r/c$  для данного значения параметра  $\mu$ .

Итак, если в пласте разбурить скважину, то при выполнении условия (4.3) в нем возникнет область пластического деформирования. Если затем повышать давление в скважине, то пласт будет постепенно разгружаться. Когда давление станет равно горному, в отличие от случая чисто упругого деформирования пласт не вернется в исходное состояние гидростатического сжатия – в нем возникнут остаточные напряжения. На фиг. 3 приведены результаты расчетов остаточных напряжений  $\tilde{\sigma}_\theta$  в пласте, отнесенных к величине горного давления  $\gamma_s L$ , для ряда значений  $\mu$ . Случай  $\mu = 1$  соответствует горизонтальной прямой (чисто упругое деформирование). Штриховая линия – граница областей упругости и пластичности. По этим кривым можно судить о том, насколько близко давление в пласте к горному после разгрузки, т.е. насколько сильно различаются предсказания упругой и упругопластических теорий. Расчеты показывают, что остаточное радиальное напряжение в пласте отличается от горного давления не более чем на 10%; тогда как остаточное напряжение  $\tilde{\sigma}_\theta$  по модулю оказывается значительно меньше горного давления – разница доходит до 90% (при других значениях параметров задачи, например, при меньшем отношении плотностей  $\Delta$ , разница может даже превысить 100%, т.е. остаточное напряжение  $\tilde{\sigma}_\theta$  станет растягивающим).

Этот результат имеет важное практическое значение для построения теории гидроразрыва пласта. В существующих исследованиях по гидроразрыву [21, 22] предполагается, что пласт находится в упругом состоянии. При этом полученные из теоретических расчетов значения давления гидроразрыва оказываются большими, чем наблюдаемые на практике, причем последние почти везде меньше горного давления  $\gamma_s L$ . Это различие объяснялось размытием в процессе бурения скважины глинистых пород, ограничивающих сверху и снизу продуктивный пласт, меньшими значениями бокового давления по сравнению с горным и др. Нетрудно видеть, что к такому же результату приводит учет полученных выше остаточных напряжений в окрестности скважины. Тем более, что для реально встречающихся горных пород величина  $L_1$  достаточно мала, порядка сотен метров.

**5. Упругопластическое деформирование склона.** Рассмотрим плоский склон из однородного грунта с удельным весом  $\gamma_s$ . Склон расположен под углом  $\beta$  к горизонту, его поверхность не нагружена. Найдем НДС этого склона в поле сил тяжести.

Введем систему координат  $xuz$  таким образом, чтобы ось  $y$  была направлена вглубь склона, а плоскость  $y = 0$  соответствовала его поверхности. Ось  $x$  направлена вдоль поверхности склона вниз, а ось  $z$  – по траверсу.

Поскольку склон бесконечен в направлениях  $x$  и  $z$ , все физические величины в этой задаче будут функциями только координаты  $y$ , это позволяет искать вектор смещения в виде  $\mathbf{u} = (u(y), v(y), 0)$ . При этом в тензорах напряжений и деформаций останутся ненулевыми следующие компоненты:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$  и  $\gamma_{xy} = u'/2, \epsilon_y = v'$  (штрих означает производную по  $y$ ).

Уравнения равновесия

$$\tau'_{xy} + \gamma_s \sin \beta = 0, \quad \sigma'_y + \gamma_s \cos \beta = 0$$

легко интегрируются, и с учетом условий  $\sigma_y|_{y=0} = \tau_{xy}|_{y=0} = 0$  получаем

$$\tau_{xy} = -\gamma_s y \sin \beta, \quad \sigma_y = -\gamma_s y \cos \beta \quad (5.1)$$

В упругой области компоненты  $\sigma_x = \sigma_z$  определяются законом Гука

$$\sigma_x = -\gamma_s y \frac{v}{1-v} \cos \beta \quad (5.2)$$

Тогда для компонентов тензора деформаций получим выражения

$$\gamma_{xy} = -\frac{1}{2G} \gamma_s y \sin \beta = \frac{u'}{2}, \quad \epsilon_y = -\frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \gamma_s y \cos \beta = v' \quad (5.3)$$

Полученное упругое решение справедливо только в области, где выполняется соотношение  $\tau < (H - \sigma) \operatorname{tg} \alpha$ . Вычисляя интенсивности касательного напряжения  $\tau$  и среднего давления  $\sigma$ , найдем глубину границы зоны упругого деформирования

$$y_1 = \frac{H}{\gamma_s \cos \beta} \left( \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta + \frac{1}{3} \xi^2} - \frac{1}{3} \eta \right)^{-1}; \quad \xi = \frac{1-2\nu}{1-\nu}, \quad \eta = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (5.4)$$

Из формулы (5.4) следует, что если  $\operatorname{tg} \alpha > \sqrt{3} \xi / \eta$  и угол склона

$$\beta \leq \beta_1 = \arctg(\sqrt{\eta^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3\xi^2} / 3) \quad (5.5)$$

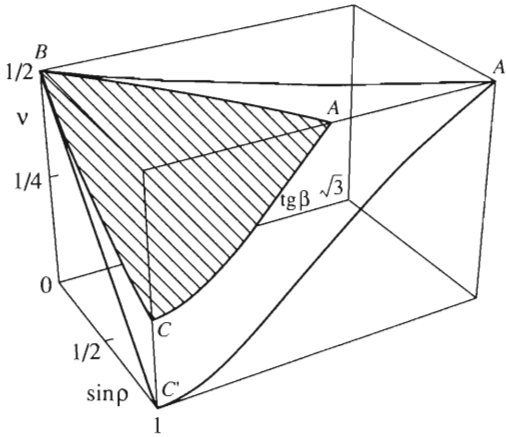
то весь склон будет находиться в упругом состоянии и пластическая область не возникнет. Этот результат будет верен и для идеально-сыпучего материала, т.е. для материала с  $H = 0$ .

Поверхность в пространстве параметров задачи  $\alpha, \beta, \nu$ , соответствующая знаку равенства в формуле (5.5), показана на фиг. 4 для случая конуса, вписанного в пирамиду Кулона, т.е.  $\operatorname{tg} \alpha$  определяется первой формулой (1.9) (заштрихованная область). Уравнения кривых, ограничивающих эту поверхность, имеют вид

$$AB: \nu = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3} \sin \rho}{\sqrt{3 + \sin^2 \rho}}; \quad AC: \sin \rho = 1, \quad \nu = \frac{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta}{5 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$BC: \beta = 0, \quad \sin \rho = \frac{1 - 2\nu}{\sqrt{\nu(2-\nu)}}$$

Появление пластической области возможно, только когда параметры задачи лежат в области под этой поверхностью. Ее вид существенно зависит от принятой аппроксимации критерия Кулона. Жирными линиями показаны кривые, ограничивающие поверх-



Фиг. 4

ность, соответствующую описанному конусу, т.е.  $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3} \sin \rho / (3 - \sin \rho)$ . Особый интерес представляет кривая  $BC$ :  $\beta = 0$ ,  $\sin \rho = 1 - 2v$ , когда угол наклона равен нулю. В этом случае в склоне (основании) возникает напряженное состояние одноосного сжатия напряжениями  $\sigma_x$ , причем  $\sigma_y = \sigma_z$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$  и напряженные состояния, приводящие к наступлению пластичности, лежат вдоль внешних граней пирамиды Кулона (режимы  $A$ ,  $C$ ,  $E$ , см. фиг. 1). При этом формула (5.4) может быть получена непосредственно из формулы (1.8), если в последней положить  $\sigma_2 = -\gamma_s y_1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2 v / (1 - v)$ . Условие того, что при таком сжатии среда остается в упругом состоянии, запишется так:  $\sin \rho \geq 1 - 2v$ . Для идеально-сыпучего

материала ( $H = 0$ ) строгое неравенство будет означать, что при подобном одноосном нагружении материал останется упругим при любых значениях сжимающего напряжения, а в случае  $\sin \rho = 1 - 2v$  перейдет в пластическое состояние.

Если же угол  $\beta > \beta_1$ , то в грунте будет существовать зона  $0 \leq y < y_1$  упругого деформирования, а на больших глубинах грунт будет находиться в предельном состоянии. Формулы (5.1) останутся верны и в пластической области, однако соотношения (5.2), (5.3) окажутся уже другими, так как вместо закона Гука необходимо будет применять закон пластического течения (1.6), (1.7).

Будем искать  $\sigma_x$  в виде

$$\sigma_x = -\gamma_s y (\cos \beta - \mu \sin \beta) \tag{5.6}$$

где  $\mu = \mu(y)$  – неизвестный множитель. Соотношение (1.7) дает

$$\sqrt{\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 / 3} = (H - (2\sigma_x + \sigma_y) / 3) \operatorname{tg} \alpha$$

или

$$(3 - 4 \operatorname{tg}^2 \alpha) \mu^2 + 12 \mu \theta \operatorname{tg}^2 \alpha + 9(1 - \theta^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0; \quad \theta = \theta(y) = (H / (\gamma_s y) + \cos \beta) / \sin \beta$$

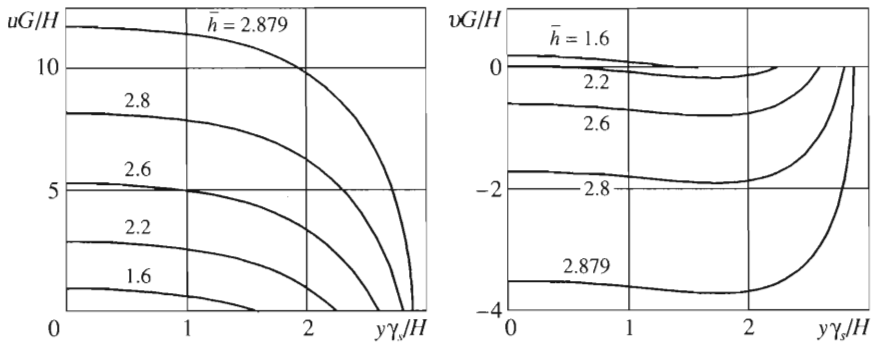
Решая это квадратное уравнение и подставляя вместо  $\operatorname{tg} \alpha$  его выражение через угол  $\rho$  ( $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \rho + 4/3}$ , первая формула в (1.9), вписанный конус), получим

$$\mu = -2\theta \operatorname{tg}^2 \rho + \sqrt{(\theta^2 \operatorname{tg}^2 \rho - 1)(3 + 4 \operatorname{tg}^2 \rho)} \tag{5.7}$$

(второй корень квадратного уравнения отбрасывается, т.к. он не удовлетворяет условию непрерывности тензора напряжений на границе между упругой и пластической областями).

Зная компоненты тензора напряжений, тензор деформаций можно найти из закона (1.6). После вычислений получим

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_y \end{matrix} \right\| = \frac{H}{2G} \frac{3 + 4 \operatorname{tg}^2 \rho}{\theta - \operatorname{ctg} \beta} \left[ \frac{\xi \eta^{-1} \operatorname{ctg} \beta + (2\eta^{-1} \operatorname{tg}^2 \rho) \theta}{\sqrt{(\theta^2 \operatorname{tg}^2 \rho - 1)(3 + 4 \operatorname{tg}^2 \rho)}} - \frac{2}{3} \left( \frac{\xi}{\eta} + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \rho}{3 + 4 \operatorname{tg}^2 \rho} \right) \right] \left\| \begin{matrix} 1 \\ \mu \end{matrix} \right\| \tag{5.8}$$



Фиг. 5

Поле смещений  $u(y)$ ,  $v(y)$  склона может быть получено интегрированием компонент тензора деформаций согласно уравнениям  $u' = 2\gamma_{xy}$ ,  $v' = \epsilon_y$  с начальными условиями  $u(h) = 0$ ,  $v(h) = 0$ , соответствующими слою глубиной  $h$  на жестком основании.

Анализ выражения (5.8) показывает, что при стремлении  $\theta$  к  $\text{ctg} \rho$ , что соответствует глубинам

$$y \rightarrow y_2 = \frac{H \sin \rho}{\gamma_s \sin(\beta - \rho)} \quad (5.9)$$

деформации  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ , а также смещения  $u$ ,  $v$  неограниченно возрастают, тогда как напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  остаются конечными. Если  $h = y_2$ , то на нижней границе пластического слоя смещения достигают бесконечно больших величин, что физически соответствует разрушению склона.

При углах  $\beta_1 \leq \beta \leq \rho$  в грунте будет существовать пластическая область, простирающаяся от  $y_1$  до бесконечности (т.е.  $h$  может быть сколь угодно большой величиной). Если же угол склона оказывается большим, чем  $\rho$ , то склон будет находиться в равновесии, только если его глубина не превышает критическое значение (5.9). Таким образом, при  $\beta > \rho$  пластическая область может занимать только слой  $y \in [y_1, y_2]$ .

Результаты численных расчетов смещений  $u(y)$ ,  $v(y)$  (в единицах  $G/H$ ) представлены на фиг. 5 для разных значений безразмерных глубин  $\bar{h} = h \gamma_s / H$  при  $\rho = 30^\circ$ ,  $\beta = 40^\circ$ ,  $\nu = 1/3$ , чему соответствуют критические значения  $\beta_1 = 7.9^\circ$ ,  $y_0 = 1.75 H/\gamma_s$ ,  $y_1 = 1.10 H/\gamma_s$ ,  $y_2 = 2.8794 H/\gamma_s$ .

Рассмотренная задача может быть также решена и в жесткопластической постановке, т.е. как задача предельного равновесия. Компоненты тензора напряжений в пластической области и в этом случае имеют вид (5.1). В упругом слое напряженное и деформированное состояния не определены и его вес следует рассматривать как дополнительную нагрузку, действующую на границе слоя, находящегося в предельном состоянии. Величина этой нагрузки определяется высотой жесткого слоя  $y_1$ , которая может быть найдена из формулы (5.4). При заданном значении угла склона  $\beta$  и механических характеристиках среды  $\alpha$ ,  $H$  величина  $y_1$  зависит от коэффициента Пуассона  $\nu$  и достигает своего максимального значения

$$y_0 = \frac{H \sin \alpha}{\gamma_s \sin(\beta - \alpha)} \quad (5.10)$$

что соответствует  $\nu = 1/2$ .

При угле склона  $\beta$ , удовлетворяющем неравенству  $\alpha \leq \beta \leq \rho$ , величина  $h$  в пределах  $y_0 < h < \infty$  может быть выбрана произвольно. Уравнения (2.16) для нахождения поля смещений однородны относительно компонент смещения, и при граничных условиях  $u(h) = v(h) = 0$  компоненты смещения  $u$  и  $v$  будут тождественно равны нулю во всей пластической области; компоненты тензора напряжений (5.1), (5.6) в этой области удовлетворяют критерию текучести.

Когда угол  $\beta$  становится больше  $\rho$ , следует принять  $h = y_2$ , и при  $y \rightarrow y_2$  угол  $\varphi$ , определяемый равенством  $\operatorname{tg} 2\varphi = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$ , стремится к значению  $\varphi_0 = -\pi/4 - \rho/2$ , т.е. линия  $y = h$  является огибающей характеристик второго семейства (2.15), которые могут быть [3] линиями разрыва смещений. При этом значения одной из компонент можно задать произвольно, а вторая найдется из условия  $v/u = \operatorname{tg} \rho$ , т.е. в пластических областях компоненты скорости постоянны, а на жесткопластической границе  $y = y_2$  они претерпевают разрыв. Следовательно пластическое течение весомого склона из жесткопластического материала невозможно при углах склона, меньших угла внутреннего трения, хотя решение в напряжениях существует. При углах склона, больших угла внутреннего трения, в состоянии пластического течения переходит не весь слой, а только его часть глубиной  $y_2$  (5.8).

Несмотря на большое количество работ, посвященных решению этой задачи [1, 18], указанный результат получен впервые, причем важную роль сыграло изложенное выше упругопластическое решение, которое, как не трудно видеть, асимптотически переходит в решение, соответствующее теории предельного равновесия.

Авторы благодарят Ф.Л. Черноушко и В.Н. Кукуджанова за обсуждение работы и замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований "Фундаментальная наука в наукоградах Калужской и Московской областей" (04-05-97200-р2004 наукоград) и Министерства образования РФ "Фундаментальные исследования в области естественных и точных наук" (Е0204.0-35).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 274 с.
2. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quart. App. Math. 1952. V. 10. № 2. P. 157–165.
3. Ширко И.В. О полях скоростей при условии пластичности общего вида // Тр. МФТИ. М.: Оборонгиз, 1961. Т. 7. С. 71–84.
4. Ширко И.В. Разрывы полей напряжений при условии пластичности общего вида // Изв. АН СССР. Инж. ж. 1961. Т. 1. № 3. С. 188–192.
5. Ширко И.В. Некоторые задачи теории пластичности со смешанными граничными условиями // Изв. АН СССР. Инж. ж. 1962. Т. 2. № 2. С. 305–311.
6. Shirko I.V. Effective Method of Numerical Solving the Problems of Plastic Flow of Materials // Proc. Adv. Tech. of Plasticity. Kyoto, 1990. V. 1. P. 435–439.
7. Долматов Б.И., Бронин В.Н., Карлов В.Д. и др. Механика грунтов. Ч. 1. Основы геотехники в строительстве. М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГА-СУ, 2000. 204 с.
8. Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В. и др. Механика грунтов, основания и фундаменты. М.: Изд-во АСВ, 1994. 527 с.
9. Ширко И.В. Упруго-пластический изгиб защемленной вдоль контура пластинки // Тр. МФТИ. М.: Оборонгиз, 1959. Т. 3. С. 180–186.
10. Ширко И.В. Нелинейные деформации и предельное равновесие пространственных криволинейных стержней // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 50–57.

11. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
12. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
13. Кондратьев Д.С., Ширко И.В. Простое деформирование в механике сыпучих сред // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук: Тез. докл. 43-й Науч. конф. М.: МФТИ. Ч. 3. 2000. С. 10.
14. Shirko I.V., Kondratyev D.S., Stetsenko P.V. Deformation theory in the mechanics of granular media // Proc. American Soc. Composites: 17th Techn. Conf., West Lafayette, 2002. P. № 168.
15. Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids. V. 1. N. Y., etc.: McGraw-Hill, 1950. 572 p. = Haddad A. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М.: Мир, 1954. 647 с.
16. Быков Д.Л. О некоторых методах решения задач теории пластичности // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1975. № 4. С. 119–139.
17. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Решение упруго-пластических задач методом конечных элементов // Вычислительная механика твердого деформированного тела. М.: Наука, 1991. Вып. 2. С. 78–122.
18. Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids. V. 2. N. Y., etc.: McGraw-Hill, 1963. 762 p. = Haddad A. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 863 с.
19. Соколовский В.В. Об уравнениях теории пластичности // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 1. С. 41–54.
20. Ширко И.В., Кондратьев Д.С., Стеценко П.В. Деформационная теория в механике гранулированных сред // Механика композиционных материалов и конструкций. 2002. Т. 8. № 4. С. 555–573.
21. Христианович С.А., Желтов Ю.П., Баренблатт Г.И., Максимович Г.К. Теоретические основы гидравлического разрыва нефтяных пластов // Избранные работы. М.: Наука, 1998. С. 269–276.
22. Бураго Н.Г., Ковшов А.Н. Напряженное состояние горной породы в окрестности скважины // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 1. С. 139–143.

Долгопрудный  
e-mail: kondratyev@career.mipt.ru

Поступила в редакцию  
23.IX.2004