

УДК 539.3

© 2005 г. И. А. Солдатенков

**О РЕЛАКСАЦИИ КАСАТЕЛЬНОГО КОНТАКТНОГО НАПРЯЖЕНИЯ
В ЗАДАЧАХ С ТРЕНИЕМ СКОЛЬЖЕНИЯ**

Рассматривается ряд постановок контактной задачи теории упругости при наличии трения в условиях однонаправленного относительного скольжения взаимодействующих тел (подвижное сопряжение типа направляющая скольжения). Основное внимание уделяется поведению во времени касательного контактного напряжения q_1 в плоскости, перпендикулярной направлению скольжения. Установлено наличие релаксации (затухания) во времени этого напряжения, что может служить обоснованием постановок контактных задач с однонаправленным скольжением тел, предполагающих отсутствие напряжения q_1 в пределах области контакта [1–4].

1. Одномерная задача. В качестве простого примера контактного взаимодействия при однонаправленном скольжении тел, позволяющего выявить характерные особенности подобного взаимодействия, рассмотрим систему из двух тел, одинаково нагруженных и связанных деформированной пружиной, скользящую с трением по плоской поверхности с постоянной скоростью V в перпендикулярном оси пружины направлении (фиг.1). Величина действующей на каждое тело силы трения \mathbf{F} определяется законом Кулона: $|\mathbf{F}| \equiv F = fQ + F_a$, где $0 \leq f$ – коэффициент трения, Q – нагрузка на тело, F_a – сила адгезионного взаимодействия; при этом $\mathbf{F} = -F\mathbf{V}_s/V_s$, где \mathbf{V}_s – скорость скольжения тела. Относительно величины T силы упругости пружины предполагается, что она линейно связана с деформацией (закон Гука): $T = -\gamma(x - \bar{x})$, где γ – жесткость пружины, x – расстояние между телами, \bar{x} – значение x при недеформированной пружине.

При скольжении рассматриваемой упругой системы расстояние x меняется. Если составить баланс сил, приравняв проекцию силы трения \mathbf{F} на ось пружины величине T силы ее упругости, можно прийти к уравнению для $x(t)$

$$\frac{Fdx(t)/dt}{\sqrt{(dx(t)/dt)^2 + V^2}} + \gamma(x(t) - \bar{x}) = 0 \tag{1.1}$$

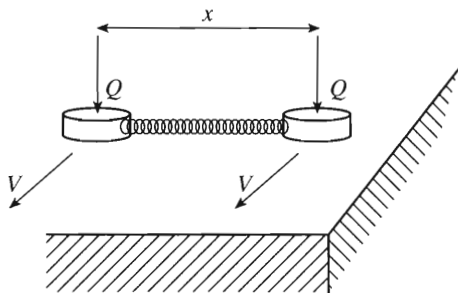
Далее предполагается, что $t \geq 0$ и задано начальное условие $x(0) = x_0$.

Неявное выражение для решения уравнения (1.1) имеет вид

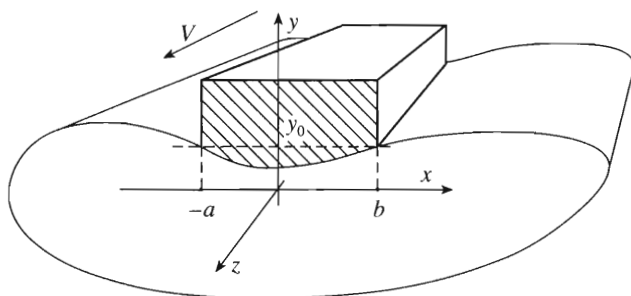
$$H(\psi(t)) - H(\psi_0) = -\omega t$$

$$H(\xi) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \xi^2}}{1 + \sqrt{1 - \xi^2}} + \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \psi(t) = \gamma \frac{x(t) - \bar{x}}{F}, \quad \psi_0 = \gamma \frac{x_0 - \bar{x}}{F}, \quad \omega = \gamma \frac{V}{F} \tag{1.2}$$

В силу равенства (1.2) $H(\psi(t)) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$, откуда следует, что $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, так как функция $H(\xi)$ четная, монотонно возрастает при $\xi > 0$ и $H(\xi) \rightarrow -\infty$ при $\xi \rightarrow 0 + 0$. Полученное предельное соотношение для $\psi(t)$ означает, что $T(t) = -F\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. в рассматриваемой упругой системе имеется релаксация касательной к поверхности скольжения силы упругости пружины.



Фиг. 1



Фиг. 2

При условии $|\gamma F^{-1}(x_0 - \bar{x})| \ll 1$ из соотношения (1.2) можно получить явные выражения для $x(t)$ и $T(t)$:

$$x(t) - \bar{x} = (x_0 - \bar{x})e^{-\omega t}, \quad T(t) = T_0 e^{-\omega t} \tag{1.3}$$

2. Основные соотношения для упругого тела. Рассмотрим цилиндрическое упругое тело, ограниченное поверхностью Γ . Следуя известному подходу [5], свяжем с некоторой точкой этого тела начало системы координат x, y, z , направив ось z вдоль образующей границы Γ (фиг. 2). Обозначим через u, v, w и q_1, q_2, q_3 компоненты векторов граничных перемещения и напряжения в системе x, y, z .

Допустим, что граница Γ имеет плоский участок, расположенный параллельно координатной плоскости xz с ординатой $y = y_0$, и по этому участку происходит однонаправленное скольжение цилиндрического штампа в направлении оси z со скоростью V (фиг. 2). Перемещение штампа вдоль оси x отсутствует, а размеры a, b области его контакта с телом считаются постоянными. Кроме того, постоянной считается удельная нагрузка $Q > 0$ на штамп вдоль оси y , при этом имеет место условие равновесия

$$Q = - \int_{-a}^b q_2(x, t) dx \tag{2.1}$$

Описанное взаимодействие штампа с упругим телом отвечает смешанной граничной задачи теории упругости. Граничные условия вне области контакта могут иметь различный вид в зависимости от возможных условий нагружения и заделки соответствующих участков границы [1, 6], тогда как в пределах области контакта эти усло-

вия определяются законом трения Кулона и условием контакта. В отличие от использованной в разд. 1 интегральной формы закона Кулона представим его здесь в виде

$$\mathbf{q}_\tau = \frac{\mathbf{V}_s}{V_s}(-f q_2 + \tau_a) \quad (2.2)$$

где \mathbf{q}_τ – вектор касательного напряжения в некоторой точке границы тела, \mathbf{V}_s – скорость скольжения штампа относительно этой точки, $0 \leq \tau_a$ – адгезионная составляющая трения. Учитывая, что $\mathbf{q}_\tau = (q_1, 0, q_3)$ и $\mathbf{V}_s = (-\dot{u}, 0, V - \dot{w})$, векторное равенство (2.2) можно записать в покомпонентной форме

$$q_1(x, t) = -\frac{\dot{u}(x, t)}{V_s(x, t)}\tau(x, t), \quad q_3(x, t) = \frac{V - \dot{w}(x, t)}{V_s(x, t)}\tau(x, t), \quad x \in [-a, b] \quad (2.3)$$

причем

$$\tau(x, t) \equiv -f q_2(x, t) + \tau_a, \quad V_s(x, t) = \sqrt{\dot{u}^2(x, t) + (V - \dot{w}(x, t))^2} \quad (2.4)$$

Точкой обозначена частная производная по времени t , $t \geq 0$.

Отметим, что удовлетворяющие уравнениям (2.3) функции $q_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$) связаны равенством

$$q_1^2(x, t) + q_3^2(x, t) = \tau^2(x, t) \equiv [-f q_2(x, t) + \tau_a]^2 \quad (2.5)$$

которое непосредственно следует из соотношений (2.3) и (2.4).

Условие контакта штампа с упругим телом имеет вид

$$v(x, t) = g(x) - \delta(t), \quad x \in [-a, b] \quad (2.6)$$

где $\delta(t) = -v(0, t)$ – величина осадки границы тела при $x = 0$, $g(x)$ – функция, описывающая форму штампа, $g(0) = 0$.

Уравнения (2.3) определяют скорость изменения во времени перемещений u и w в пределах области контакта в зависимости от текущих контактных напряжений q_i , что в совокупности с условиями равновесия (2.1) и контакта (2.6), а также граничными условиями вне области контакта определяет кинетику изменения во времени напряженно-деформированного состояния (НДС) упругого тела. Далее полагаются заданными начальными условиями

$$q_i(x, 0) = q_{i0}(x), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

В случае большой скорости V скольжения штампа, когда

$$|\dot{u}(x, t)/V| \sim \varepsilon \ll 1, \quad |\dot{w}(x, t)/V| \sim \varepsilon \ll 1 \quad (2.8)$$

для фигурирующих в правых частях равенств (2.3) дробей с точностью до $O(\varepsilon^2)$ справедливы выражения

$$\dot{u}(x, t)/V_s(x, t) = \dot{u}(x, t)/V, \quad (V - \dot{w}(x, t))/V_s(x, t) = 1$$

используя которые, уравнения (2.3) можно записать в виде

$$q_1(x, t) = -\dot{u}(x, t)\tau(x, t)/V, \quad q_3(x, t) = \tau(x, t), \quad x \in [-a, b] \quad (2.9)$$

Сделаем ряд заключений относительно структуры НДС упругого тела в условиях однонаправленного скольжения, которые позволят в дальнейшем свести решение

соответствующей трехмерной задачи к более простой двумерной задаче. Обозначим через u_i и σ_{ij} компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, приписывая индексы $i, j = 1, 2, 3$ координатным осям x, y, z соответственно. При рассматриваемом взаимодействии штампа с упругим телом НДС упругого тела, равно как и его геометрия, не меняются вдоль оси z , и поэтому производные перемещений u_i по z равны нулю. Если учесть это обстоятельство и, следуя известному подходу [1], записать дифференциальные уравнения упругого равновесия в перемещениях (уравнения Ламе) и соотношения закона Гука, то окажется, что часть этих равенств описывает плоскую деформацию [7] и содержит компоненты $u_1, u_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$, тогда как оставшиеся равенства описывают антиплоскую деформацию (чистый сдвиг) [6] и содержат компоненты $u_3, \sigma_{13}, \sigma_{23}$. С указанными системами НДС, в свою очередь, оказываются связанными различные совокупности компонентов u, v, q_1, q_2 и w, q_3 :

для плоской деформации

$$u_1|_{\Gamma} = u, \quad u_2|_{\Gamma} = v, \quad (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2)|_{\Gamma} = q_1, \quad (\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2)|_{\Gamma} = q_2 \quad (2.10)$$

для антиплоской деформации

$$u_3|_{\Gamma} = w, \quad (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2)|_{\Gamma} = q_3 \quad (2.11)$$

причем $n_1, n_2, n_3 = 0$ – компоненты вектора внешней нормали к границе Γ тела.

В общем случае, когда имеют место уравнения (2.3), обе системы НДС оказываются взаимосвязанными через граничные условия (равенства (2.10), (2.11)). Действительно, первое равенство (2.3) кроме u, q_1, q_2 содержит компоненту w , связанную с системой антиплоской деформации, тогда как второе равенство (2.3) кроме w, q_3 содержит компоненты u, q_2 , связанные с системой плоской деформации. Положение упрощается в случае использования уравнений (2.9), так как первое равенство (2.9) содержит только компоненты u, q_1, q_2 , связанные, в силу соотношений (2.10), с плоской деформацией. Совместно с условиями равновесия (2.1) и контакта (2.6) это равенство образует совокупность граничных условий для уравнений плоской деформации, после решения которых и определения q_2 второе равенство (2.9) можно использовать в качестве граничного условия для уравнений антиплоской деформации.

Отметим, что об отсутствии влияния антиплоской деформации на плоскую упоминалось ранее [3]. Аналогичная ситуация имеет место при рассмотрении осесимметричной контактной задачи с трением [1].

3. Тонкий слой (тело Винклера). Пусть упругим телом служит тонкий слой толщины h , связанный с абсолютно жестким основанием по своей нижней границе (фиг. 3). С некоторой точкой этой границы свяжем и начало системы координат. В предположении тонкости слоя, т.е. при $h \ll (a + b)$, его деформирование описывается моделью тела Винклера [8]

$$u = \alpha q_1, \quad v = \beta q_2, \quad w = \alpha q_3; \quad \alpha = \frac{h}{G}, \quad \beta = \frac{(1 - 2\nu)h}{2G(1 - \nu)} \quad (3.1)$$

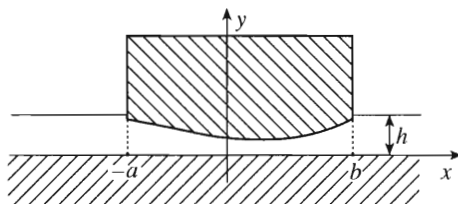
где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Замена перемещения v во во втором соотношении (3.1) правой частью условия контакта (2.6) дает выражение

$$q_2(x, t) = \beta^{-1}[g(x) - \delta(t)] \leq 0 \quad (3.2)$$

подстановка которого в условие равновесия (2.1) и учет постоянства величин Q, a и b позволяет установить, что фигурирующая в условии контакта величина δ не зависит от времени:

$$\delta(t) = (a + b)^{-1} \left[\beta Q + \int_{-a}^b g(x) dx \right] = \text{const}$$



Фиг. 3

Принимая во внимание этот результат и выражение (3.2) для $q_2(x, t)$, преобразуем равенство (2.4), определяющее $\tau(x, t)$, следующим образом:

$$\tau(x, t) = -f\beta^{-1}[g(x) - \delta] + \tau_a \equiv \tau_0(x) \geq 0 \quad (3.3)$$

Воспользуемся теперь уравнениями (2.3). Подстановка в них первого и третьего выражений (3.1) и учет выражения (3.3) дает

$$q_1(x, t) = -\alpha \frac{\dot{q}_1(x, t)}{V_s(x, t)} \tau_0(x), \quad q_3(x, t) = \frac{V - \alpha \dot{q}_3(x, t)}{V_s(x, t)} \tau_0(x), \quad x \in [-a, b] \quad (3.4)$$

Из первого уравнения (3.4) в силу неотрицательности величин α , τ_0 , V_s непосредственно следует, что $\dot{q}_1(x, t) > 0$ при $q_1(x, t) < 0$ и $\dot{q}_1(x, t) < 0$ при $q_1(x, t) > 0$, т.е. удовлетворяющая соотношениям (3.4) функция затухает со временем:

$$|q_1(x, t)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \quad x \in [-a, b] \quad (3.5)$$

Отметим, что в соответствии со сделанным в разд. 2 заключением о взаимосвязи систем плоской и антиплоской деформаций при использовании общих уравнений (2.3), каждое из равенств (3.4) содержит величины, относящиеся к обеим этим системам, и зависит от другого. Тем не менее для уравнений (3.4) может быть получено точное решение, если преобразовать их следующим образом: разделить первое уравнение на второе, а затем из полученного равенства поочередно исключить производные $\dot{q}_1(x, t)$, $\dot{q}_3(x, t)$ с помощью равенств (2.5) и (3.3). В результате уравнения (3.4) примут вид

$$\dot{q}_1(x, t) = -\frac{Vq_1(x, t)q_3(x, t)}{\alpha \tau_0^2(x)}, \quad \dot{q}_3(x, t) = \frac{V}{\alpha} \left[1 - \frac{q_3^2(x, t)}{\tau_0^2(x)} \right], \quad x \in [-a, b] \quad (3.6)$$

Решая вначале второе уравнение (3.6), а затем, используя найденную функцию $q_3(x, t)$, решая первое уравнение (3.6), можно с учетом начальных условий (2.7) получить выражения

$$q_1(x, t) = \frac{2q_{10}(x)e^{-\omega(x)t}}{B_+(x, t)}, \quad q_3(x, t) = \tau_0(x) \frac{B_-(x, t)}{B_+(x, t)} \quad (3.7)$$

где

$$B_{\pm}(x, t) = A_+(x) \pm A_-(x)e^{-2\omega(x)t}, \quad A_{\pm}(x) = 1 \pm \frac{q_{30}(x)}{\tau_0(x)}, \quad \omega(x) = \frac{V}{\alpha \tau_0(x)}$$

В случае использования уравнений (2.9) вместо (2.3) имеем

$$q_1(x, t) = q_{10}(x)e^{-\omega(x)t} \quad (3.8)$$

Как и следовало ожидать, оба выражения (3.7) и (3.8) удовлетворяют соотношению (3.5), при этом релаксация (затухание) напряжения $q_1(x, t)$ во времени происходит по экспоненциальному закону.

Замечание 1. Начальное касательное напряжение q_1 в рассматриваемом случае может быть обусловлено предварительным сдвигом штампа вдоль оси x . Например, если такой сдвиг приводит к полному проскальзыванию штампа, то, в силу соотношений (2.2), (2.5), (3.3), $q_{10}(x) = \pm \tau_0(x)$, $q_{30}(x) = 0$ и выражения (3.7) принимают вид

$$q_1(x, t) = \pm \tau_0(x) / \text{ch}(\omega(x)t), \quad q_3(x, t) = \tau_0(x) \text{th}(\omega(x)t) \quad (3.9)$$

4. Композиция тонкий слой – полупространство. В отличие от предыдущей постановки допустим здесь, что связанное со слоем основание представляет из себя упругое полупространство, сам штамп и условия его нагружения симметричны относительно оси y ($b = a$), при этом начало координат предполагается связанным с точкой верхней границы слоя, расположенной посередине области контакта $[-a, a]$. При таком выборе системы координат условие контакта (2.6) принимает вид

$$v(x, t) = g(x), \quad x \in [-a, a] \quad (4.1)$$

причем в силу симметрии задачи $g(x)$ – четная функция. Кроме того, симметрия задачи позволяет предположить, что $q_1(x, t)$ – нечетная по x , а $q_2(x, t)$ – четная по x функция.

В дополнение к прежнему условию $h \ll 2a$ тонкости слоя будем считать, что $n \equiv \equiv G_1/G_2 \ll 1$, т.е. слой является мягким по сравнению с полупространством. Здесь и далее индексы 1 и 2 приписываются величинам, относящимся к слою и полупространству соответственно. Целью дальнейших выкладок, как и прежде, будет анализ поведения во времени касательного контактного напряжения q_1 .

Выше (разд. 2) было показано, что в условиях однонаправленного скольжения штампа по упругому телу цилиндрической формы НДС последнего распадается на две системы: плоской и антиплоской деформации. Нетрудно установить, что и в рассматриваемой здесь двуслойной композиции существуют те же две системы НДС, причем первая из них определяется, согласно соотношениям (2.10), компонентами u, v, q_1, q_2 на верхней границе слоя (при $y = 0$). Действительно, в силу отсутствия изменения вдоль оси z условий нагружения и геометрий слоя и полупространства, НДС каждого из них распадается на две указанные выше системы (разд. 2), при этом какое-либо изменение компонент w, q_3 на верхней границе слоя при неизменных u, v, q_1, q_2 не влияет на плоскую деформацию слоя (см. равенства (2.10), (2.11)) и, в частности, на значения компонент u, v, q_1, q_2 при $y = -h$ (т.е. на границе раздела слоя и полупространства), которыми целиком определяется плоскодеформированное состояние полупространства.

Присутствие в рассматриваемом упругом теле системы плоской деформации, включающей напряжение q_1 , дает возможность воспользоваться уравнениями плоской деформации для композиции полоса – полуплоскость с целью определения напряжения q_1 . Согласно этим уравнениям при условиях $h \ll 2a$ и $n \ll 1$ имеют место следующие соотношения между компонентами u, v, q_1, q_2 на верхней границе слоя [9]:

$$\begin{aligned} G u'(x, t) &= A_\tau q_1'(x, t) + n M_c q_2(x, t) + n M_D (\mathcal{H} q_1)(x, t) \\ G v'(x, t) &= A_v q_2'(x, t) - n M_c q_1(x, t) + n M_D (\mathcal{H} q_2)(x, t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} G &= G_1, \quad M_c = \frac{1 - 2\nu_2}{2}, \quad M_D = \frac{1 - \nu_2}{\pi} \\ A_\tau &= [1 + (1 - 2\nu_2)n]h + O(n^2), \quad A_v = \frac{1 - 2\nu_1}{2(1 - \nu_1)} \left[1 - \frac{2\nu_1(1 - 2\nu_2)}{1 - 2\nu_1} n \right] h + O(n^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$(\mathcal{H}\varphi)(x) = \int_{-a}^a \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - x}$$

Штрих означает дифференцирование по x .

Преобразуем равенства (4.2). Для этого будем считать функции $q_{1,2}(x, t)$ в пределах области контакта квадратично суммируемыми по x :

$$q_{1,2}(x, t) \in L_2[-a, a]; \quad t \in [0, T] \quad (4.4)$$

где $0 < T$ – некоторая величина, причем здесь и далее интегралы понимаются в смысле Лебега [10]. Вне области контакта напряжения $q_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$) полагаются равными нулю.

Введем в рассмотрение операторы

$$(\mathcal{L}_0\varphi)(x) = -\int_{-a}^a \varphi(\xi) \ln \left| \frac{\xi - x}{\xi} \right| d\xi, \quad (\mathcal{P}_0\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi(x) \in L_2[-a, a] \quad (4.5)$$

и отметим равенство, связывающее оператор \mathcal{H} вида (4.3) с \mathcal{L}_0 [11]

$$\int_0^x (\mathcal{H}\varphi)(\xi) d\xi = (\mathcal{L}_0\varphi)(x), \quad \varphi(x) \in L_2[-a, a] \quad (4.6)$$

Возвращаясь к равенствам (4.2), заменим в них переменную x на ξ и проинтегрируем результат по ξ от 0 до x . Пользуясь соотношениями (4.4)–(4.6), можно прийти к равенствам

$$\begin{aligned} A_\tau q_1(x, t) &= Gu(x, t) - nM_C(\mathcal{P}_0 q_2)(x, t) - nM_D(\mathcal{L}_0 q_1)(x, t) \\ A_\nu [q_2(x, t) - q_2(0, t)] &= Gv(x, t) + nM_C(\mathcal{P}_0 q_1)(x, t) - nM_D(\mathcal{L}_0 q_2)(x, t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Воздействие на правые части равенств (4.7) оператором \mathcal{P}_0 позволяет получить выражения для $(\mathcal{P}_0 q_{1,2})(x, t)$, подстановка которых в эти же равенства дает

$$\begin{aligned} A_\tau q_1(x, t) &= Gu(x, t) - nM_D(\mathcal{L}_0 q_1)(x, t) - \\ &- nM_C q_2(0, t)x - nM_C \frac{G}{A_\nu} (\mathcal{P}_0 v)(x, t) - n^2 A_\tau \rho_1(x, t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$A_\nu [q_2(x, t) - q_2(0, t)] = Gv(x, t) - nM_D(\mathcal{L}_0 q_2)(x, t) + nM_C \frac{G}{A_\tau} (\mathcal{P}_0 u)(x, t) - n^2 A_\nu \rho_2(x, t)$$

причем для функций $\rho_{1,2}(x, t)$ справедлива оценка

$$|\rho_{1,2}(x, t)| \leq 2a^{3/2} |A_\tau A_\nu|^{-1} \max \{ \|q_1\|, \|q_2\| \}$$

показывающая, что последние слагаемые в уравнениях (4.8) имеют порядок n^2 и при условии $n \ll 1$ могут быть опущены. Здесь и далее $\|\varphi\|$ – норма функции $\varphi(x)$ в пространстве $L_2[-a, a]$.

Для анализа поведения касательного напряжения $q_1(x, t)$ будет использоваться первое равенство (4.8), которое кроме искомой $q_1(x, t)$ содержит неизвестные функции $q_2(0, t)$ и $v(x, t)$. Однако последние несложно исключить из этого равенства. Дей-

ствительно, функция $v(x, t)$ выражается через $g(x)$ согласно условию контакта (4.1), тогда как для функции $q_2(0, t)$ оказывается справедливым выражение

$$q_2(0, t) = -(2aA_v)^{-1} \left[A_v Q + \int_{-a}^a g(x) dx \right] + O(n)$$

которое получается, если проинтегрировать второе равенство (4.8) по x от $-a$ до a и учесть условия равновесия (2.1) и контакта (4.1). При учете таких выражений первое равенство (4.8) принимает вид

$$A_\tau q_1(x, t) = Gu(x, t) - nM_D(\mathcal{L}_0 q_1)(x, t) + U(x) \tag{4.9}$$

$U(x)$ – известная функция зависящая от Q и $g(x)$.

Далее будет рассматриваться случай (2.8) большой скорости V скольжения штампа при условии, что его фрикционное взаимодействие со слоем носит чисто адгезионный характер, т.е. $f = 0$. Эти допущения позволяют воспользоваться для описания кинетики изменения напряжения q_1 первым равенством (2.9), представив его с учетом первого выражения (2.4) в виде $q_1(x, t) = -\tau_a V^{-1} \dot{u}(x, t)$ или после интегрирования по t

$$u(x, t) = -\frac{V}{\tau_a} \int_0^t q_1(x, \tau) d\tau + u(x, 0) \tag{4.10}$$

Если заменить правой частью (4.10) функцию $u(x, t)$ в уравнении (4.9) и произвести несложные преобразования этого уравнения, связанные с использованием свойства нечетности $q_1(x, t)$ по x и определения функции $U(x)$ через начальное распределение $q_{10}(x) = q_1(x, 0)$, можно получить окончательно следующее уравнение для $q_1(x, t)$:

$$A_0 q_1(x, t) = -\int_0^t q_1(x, \tau) d\tau - A_1(\mathcal{L} q_1)(x, t) + A_0 q_{10}(x) + A_1(\mathcal{L} q_{10})(x) \tag{4.11}$$

где

$$(\mathcal{L}\varphi)(x) = -\int_{-a}^a \varphi(\xi) \ln \left| \frac{\xi - x}{a} \right| d\xi; \quad A_0 = \frac{\tau_a A_\tau}{VG}, \quad A_1 = \frac{\tau_a n M_D}{VG} \tag{4.12}$$

причем $A_{0,1} > 0$ для $n \ll 1$ и $v \in [0, 1/2)$.

Полученное уравнение (4.11) не содержит каких-либо величин, относящихся к системе антиплоской деформации тела, и это согласуется со сделанным в разд. 2 заключением о независимости плоской деформации от антиплоской при использовании уравнений (2.9).

Приступая к решению уравнения (4.11), отметим, что оператор \mathcal{L} – строго положительный [2], самосопряженный (так как ядро $\ln|(\xi - x)/a|$ симметрично) и вполне непрерывный в пространстве $L_2[-a, a]$ [12], причем последнее является сепарабельным гильбертовым. Эти свойства обеспечивают существование систем собственных значений λ_k и функций $X_k(x)$ оператора \mathcal{L} [12]:

$$\lambda_k(\mathcal{L} X_k)(x) = X_k(x), \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.13}$$

причем система $\{X_k(x)\}$, являясь полной в пространстве $L_2[-a, a]$, образует в нем ортонормированный базис, такой, что для любой функции $\varphi(x)$ из этого пространства (всюду далее, если не оговорено иное, суммирование ведется от $k = 1$ до $k = \infty$)

$$(\mathcal{L}\varphi)(x) = \sum \lambda_k^{-1}(\varphi, X_k) X_k(x); \quad (\varphi, X_k) = \int_{-a}^a \varphi(x) X_k(x) dx \tag{4.14}$$

Из равенства (4.13) при условии, что \mathcal{L} – строго положительный оператор, вытекает положительность значений λ_k . В дальнейшем λ_k будут нумероваться в порядке их возрастания:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$$

Пользуясь допущением (4.4) и следуя методу Фурье [13, 14], представим функцию $q_1(x, t)$ в виде разложения по ортонормированному базису $\{X_k(x)\}$

$$q_1(x, t) = \sum a_k(t) X_k(x), \quad t \in [0, T] \quad (4.15)$$

Как известно [13, 14], для определения коэффициентов $a_k(t)$ этого разложения следует ряд (4.15) подставить в уравнение (4.11) и формально внести операции интегрирования в нем под знак суммы ряда, после чего, пользуясь равенством (4.13) и свойством ортонормированности системы $\{X_k(x)\}$, можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для $a_k(t)$ с решением

$$a_k(t) = a_k(0) e^{-\omega_k t}, \quad \omega_k = \lambda_k (A_0 \lambda_k + A_1)^{-1} > 0 \quad (4.16)$$

Учитывая начальные условия (2.7) и разложение (4.15), значения $a_k(0)$ будем определять из равенства

$$q_{10}(x) = \sum a_k(0) X_k(x) \quad (4.17)$$

Тогда, предполагая относительно известной функции $q_{10}(x)$, что

$$q_{10}(x) \in L_2[-a, a] \quad (4.18)$$

получим: $a_k(0) = (q_{10}, X_k)$, причем, согласно равенству Парсеваля [12]

$$\|q_{10}\|^2 \equiv \int_{-a}^a q_{10}^2(x) dx = \sum a_k^2(0) < \infty \quad (4.19)$$

Прежде чем установить условия, при которых ряд (4.15) с коэффициентами (4.16) может быть использован в качестве решения рассматриваемой задачи, отметим некоторые результаты, связанные с равномерной по $t \in [0, T]$ сходимостью этого ряда.

Утверждение 1. Пусть при некотором $x \in [-a, a]$ ряд (4.17) сходится в обычном смысле. Тогда при этом x имеют место равномерная по $t \in [0, T]$ сходимости ряда (4.15) с коэффициентами (4.16) и равенство

$$\int_0^t [\sum a_k(0) e^{-\omega_k \tau} X_k(x)] d\tau = \sum \left[\int_0^t e^{-\omega_k \tau} d\tau \right] a_k(0) X_k(x) \quad (4.20)$$

Доказательство. Принимая во внимание равенство (4.17), представим ряд (4.15) с коэффициентами (4.16) в виде

$$\begin{aligned} \sum a_k(0) e^{-\omega_k t} X_k(x) &= \sum a_k(0) X_k(x) v_k(t) + e^{-A_0^{-1} t} q_{10}(x) \\ v_k(t) &= e^{-\omega_k t} - e^{-A_0^{-1} t}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = A_0^{-1} > 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Положительная последовательность $\{v_k(t)\}$ является невозрастающей на множестве $[0, T]$ и равномерно на этом множестве сходится к нулю. Кроме того, вследствие сходимости ряда (4.17)

в точке x последовательность $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k(0) X_k(x) \right\}$ равномерно ограничена на множестве $[0, T]$.

Данные свойства позволяют воспользоваться признаком Дирихле–Абеля [15] и установить равномерную сходимость по $t \in [0, T]$ ряда в правой части (4.21), а следовательно, и ряда (4.15).

После установления равномерной по $t \in [0, T]$ сходимости ряда (4.15) с коэффициентами (4.16), справедливость равенства (4.20) непосредственно следует из известной теоремы о полном интегрировании равномерно сходящегося ряда [15].

Утверждение 2. Пусть имеет место включение (4.18), функция $q_{10}(x)$ – нечетная и ряд (4.17) сходится в каждой точке отрезка $[-a, a]$ в обычном смысле. Тогда функция $q_1(x, t)$ в виде ряда (4.15) с коэффициентами (4.16) удовлетворяет уравнению (4.11), она оказывается нечетной по x и для нее справедливо допущение (4.4).

Доказательство. Напомним, что выражение (4.16) для коэффициентов $a_k(t)$ ряда (4.15) было получено путем подстановки последнего в уравнение (4.11) и формальной перестановки порядка операций интегрирования и суммирования. Имея в распоряжении равенства (4.14) и (4.20), можно обосновать корректность подобных перестановок, тем самым установив, что ряд (4.15) с коэффициентами (4.16) удовлетворяет уравнению (4.11).

Для проверки допущения о нечетности функции $q_1(x, t)$ по x введем в рассмотрение систему функций $Y_k(x) = X_k(-x)$, которой отвечают прежние собственные значения λ_k оператора \mathcal{L} и которая также образует ортонормированный базис в $L_2[-a, a]$. Пользуясь свойством нечетности функции $q_{10}(x)$, можно установить, что разложение функции $q_1(x, t)$ по системе $Y_k(x)$ отличается от разложения (4.15) с коэффициентами (4.16) только знаком. Складывая эти разложения получим равенство

$$2q_1(x, t) = \sum a_k(0)e^{-\omega_k t} [X_k(x) - Y_k(x)]$$

свидетельствующее о нечетности $q_1(x, t)$ по x .

Для проверки допущения (4.4) воспользуемся теоремой Рисса–Фишера [10], согласно которой, ряд (4.15) при заданном $t \in [0, T]$ сходится в среднем квадратичном к некоторой функции из $L_2[-a, a]$, если только при этом t сходится ряд $\sum a_k^2(t)$. Последнее действительно имеет место в силу соотношения (4.19) и неравенства $a_k^2(t) \leq a_k^2(0)$, вытекающего из соотношений (4.16).

Используя для разложения (4.15) равенство Парсеваля [12], можно с учетом выражения (4.16) для $a_k(t)$ записать

$$\|q_1\|^2(t) = \sum a_k^2(t) = \sum a_k^2(0)e^{-2\omega_k t} \tag{4.22}$$

Напомним, что последовательность $\{\omega_k\}$ определяется равенством (4.16) через положительные постоянные A_0, A_1 и является монотонно возрастающей. Это обстоятельство совместно с равенством (4.19) позволяет получить из соотношения (4.22) оценку

$$\|q_1\|(t) \leq \|q_{10}\|e^{-\omega_1 t}$$

свидетельствующую о затухании во времени нормы $\|q_1\|$. Такое свойство можно интерпретировать как наличие релаксации во времени функции $q_1(x, t)$ из $L_2[-a, a]$.

Замечание 2. Выполнение условия (4.18) обеспечивает сходимость ряда (4.17) в среднем квадратичном, что не гарантирует сходимости этого ряда в точках отрезка $[-a, a]$ [10], и поэтому присутствующее в утверждениях 1 и 2 условие поточечной сходимости ряда (4.17) носит независимый характер. С другой стороны, для любой заданной функции $q_{10}(x) \in L_2[-a, a]$ найдется функция $q_{10}^*(x) \in L_2[-a, a]$, сколь угодно мало отличающаяся по норме пространства $L_2[-a, a]$ от $q_{10}(x)$ и для которой условие поточечной сходимости на отрезке $[-a, a]$ ряда (4.17) выполняется; в силу сходимости в среднем квадратичном этого ряда таким свойством обладает линейная комбинация

$$q_{10}^*(x) = a_1(0)X_1(x) + \dots + a_{n_*}(0)X_{n_*}(x)$$

при достаточно большом целом $n_* > 0$.

Замечание 3. Положим в соотношениях (4.15), (4.16) $n = 0$, что отвечает случаю абсолютно жесткого полупространства, рассмотренного в предыдущем разделе, – выражение (3.8) при $f = 0$.

Согласно равенству (4.16) коэффициенты ω_k при $n = 0$ принимают не зависящее от k значение: $\omega_* = GV(\tau_a h)^{-1}$, поэтому при учете равенства (4.17) разложение (4.15) дает выражение

$$q_1(x, t) = q_{10}(x)e^{-\omega_* t} \quad (4.23)$$

совпадающее с вышеупомянутым выражением (3.8) при $f = 0$.

Кроме того, отметим аналогию выражения (4.23) и выражения (1.3) для касательной к поверхности скольжения силы T упругости пружины в задаче из разд. 1. В обоих случаях показатели ω и ω_* экспоненциального затухания T и q_1 оказываются прямо пропорциональными скорости V и жесткости упругой системы (γ и G/h) и обратно пропорциональными параметру трения (F и τ_a).

Замечание 4. Сравнение постановок рассмотренных задач позволяет выявить следующие основные условия асимптотики $q_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$: однонаправленность скольжения штампа (т.е. отсутствие смещения штампа относительно системы координат в направлении оси x после начала скольжения вдоль оси z), неизменность области контакта и постоянство нагрузки на штамп вдоль оси y .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00034) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 99-0671).

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
2. Александров В.М., Галин Л.А., Пириев Н.П. Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 4. С. 60–67.
3. Александров В.М., Коваленко Е.В. К теории контактных задач при наличии нелинейного износа // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 98–108.
4. Горячева И.Г., Солдатенков И.А. Теоретическое исследование приработки и установившегося режима изнашивания твердых смазочных покрытий // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 3. С. 420–431.
5. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Кн. 2. Механика упругих и абсолютно твердых тел. М.: Наука, 1986. 415 с.
6. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
7. Hahn H.G. Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme. Stuttgart: Teubner, 1985 = Хан Х. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.
8. Механика контактных взаимодействий // Под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. 670 с.
9. Солдатенков И.А. Контактное деформирование упругой композиции полуплоскость – полоса переменной ширины // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 148–156.
10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
11. Хведелидзе Б.В. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Тр. Тбил. мат. ин-та. 1956. Т. 23. 158 с.
12. Ворович И.И., Лебедев Л.П. Функциональный анализ и его приложения в механике сплошной среды. М.: Вуз. книга, 2000. 316 с.
13. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
14. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
15. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука. Ч. 1. 1971. 599 с.; Ч. 2. 1973. 447 с.