

УДК 531.36

© 2004 г. В. С. Асланов, А. В. Дорошин

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Рассматривается движение механической системы соосных осесимметричных тел переменной массы в поступательно движущейся системе координат. Записана теорема об изменении кинетического момента системы соосных тел переменной массы относительно поступательно движущихся осей. На примере двух соосных тел построены динамические уравнения движения. В предположении, что относительные смещения центра масс малы вследствие изменения массы системы, находятся приближенные решения для углов пространственной ориентации и условия уменьшения амплитуды нутационных колебаний. Полученные результаты могут быть использованы для описания движения космических аппаратов, выполненных по соосной схеме, при совершении активных маневров с изменением массы.

Движение космического аппарата с двойным вращением и неизменной массой при наличии малой асимметрии было рассмотрено авторами ранее [1].

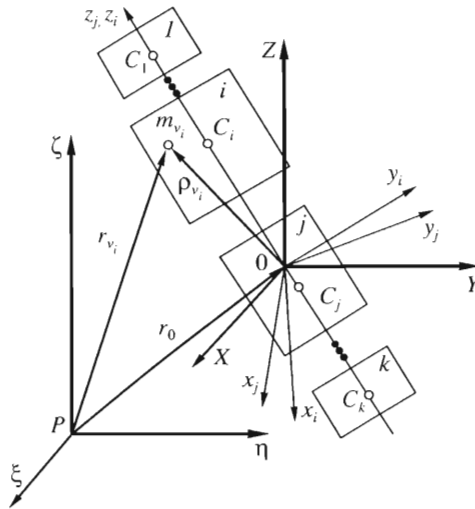
1. Постановка задачи и теорема об изменении кинетического момента системы соосных тел. Ставятся задачи вывода уравнений движения системы k тел переменной массы относительно поступательно движущихся осей и получения приближенных аналитических зависимостей для свободной системы двух соосных тел. В процессе изменения массы динамическая симметрия не нарушается.

Введем следующие системы координат (фиг. 1): $P\xi\eta\zeta$ – неподвижная в абсолютном пространстве система координат; $OXYZ$ – подвижная система координат с началом в точке системы O , оси которой остаются коллинеарными осям неподвижной системы все время движения; $Ox_iy_iz_i$ – системы координат с общим началом, жестко связанные с i -м телом ($i = 1, 2, \dots, k$), вращающиеся относительно системы $OXYZ$. В качестве начала координат $OXYZ$ выбирается точка, лежащая на общей оси вращения тел и совпадающая с начальным положением центра масс. Точки, входящие в состав системы, отличаются своей принадлежностью тому или другому телу, поэтому при записи выражений будем указывать принадлежность точек i -му телу индексом v_i .

Для построения уравнений движения воспользуемся гипотезой “близкодействия”, согласно которой частицы, получившие относительную скорость при отделении от тела, уже не принадлежат телу и никак на него не действуют, тогда теорема об изменении кинетического момента системы переменной массы [2], записанной относительно неподвижной системы координат $P\xi\eta\zeta$, примет вид

$$\frac{d\mathbf{K}_P}{dt} = \mathbf{M}_P^e + \mathbf{M}_P^R + \sum_{i=1}^k \mathbf{S}_i^e, \quad \mathbf{S}_i^e = \sum_{v_i} \mathbf{r}_{v_i} \times \frac{dm_{v_i}}{dt} \mathbf{v}_{v_i} \tag{1.1}$$

где \mathbf{M}_P^e – главный момент внешних сил; \mathbf{M}_P^R – главный момент реактивных сил; \mathbf{S}_i^e – сумма моментов количеств движений частиц тела i , отброшенных в единицу времени в их переносном движении относительно неподвижной системы координат.



Фиг. 1

Кинетический момент системы k тел в системе координат $OXYZ$ (фиг. 1) определяется формулой

$$\mathbf{K}_P = \sum_{i=1}^k \sum_{v_i} \mathbf{r}_{v_i} \times m_{v_i} \mathbf{v}_{v_i} = \sum_{i=1}^k \sum_{v_i} [(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}_{v_i}) \times m_{v_i} (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\rho}_{v_i})] \quad (1.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}_i$ – абсолютная угловая скорость тела i и связанной с ним системы координат $Ox_i y_i z_i$.

Для записи теоремы об изменении кинетического момента относительно подвижной системы координат $OXYZ$ воспользуемся понятием центра масс для каждого тела и выпишем вспомогательные соотношения

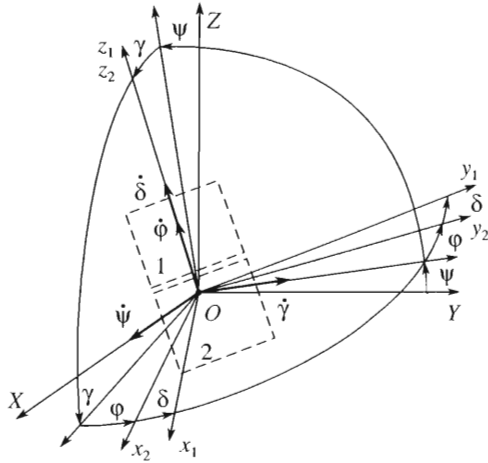
$$\frac{d\boldsymbol{\rho}_{C_i}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\rho}_{C_i} + \mathbf{q}_{C_i}$$

$$\sum_{v_i} \frac{dm_{v_i}}{dt} (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\rho}_{v_i}) = \boldsymbol{\omega}_i \times \left[\frac{dm_i}{dt} \boldsymbol{\rho}_{C_i} + m_i \mathbf{q}_{C_i} \right]$$

где $\boldsymbol{\rho}_{C_i}$ – радиус-вектор центра масс C_i тела i в системе $OXYZ$, \mathbf{q}_{C_i} – относительная скорость центра масс C_i , обусловленная изменением его положения относительно тел в связи с переменностью их масс. Если использовать эти соотношения и сгруппировать точки системы в соответствии с их принадлежностью телам i , то теорему об изменении кинетического момента относительно системы осей $OXYZ$ можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^k \frac{d\mathbf{K}_{i,O}}{dt} = \mathbf{M}_O^e + \mathbf{M}_O^R + \sum_{i=1}^k \sum_{v_i} \boldsymbol{\rho}_{v_i} \times \frac{dm_{v_i}}{dt} (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\rho}_{v_i}) - \boldsymbol{\rho}_C \times m \mathbf{w}_O \quad (1.3)$$

где \mathbf{M}_O^e и \mathbf{M}_O^R – главные моменты внешних и реактивных сил относительно точки O . Выражение (1.3) соответствует утверждению известной теоремы [2] при учете группировки слагаемых согласно принадлежности точек телу i ($i = 1, \dots, k$).



Фиг. 2

С помощью понятия локальной производной для вектора кинетического момента каждого тела в связанной с телом системе координат \$Ox_iy_iz_i\$, вращающейся относительно \$OXYZ\$ с угловой скоростью \$\omega_i\$, уравнение (1.3) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^k \left[\left(\frac{d\mathbf{K}_{i,O}}{dt} \right)_{Ox_iy_iz_i} + \omega_i \times \mathbf{K}_{i,O} \right] = \mathbf{M}_O^e + \mathbf{M}_O^R + \sum_{i=1}^k \sum_{v_i} \rho_{v_i} \times \frac{dm_{v_i}}{dt} (\omega_i \times \rho_{v_i}) - \rho_C \times m \mathbf{w}_O \tag{1.4}$$

За скобками локальных производных в нижнем индексе указаны системы координат, в которых они берутся.

Уравнение (1.4) определяет в векторной форме теорему об изменении кинетического момента тел переменной массы относительно поступательно движущихся осей.

2. Система двух соосных тел. Будем рассматривать свободное движение системы двух динамически симметричных тел, причем переменным по массе является только тело 1. Отброс точек при изменении массы происходит симметрично, так что вектор реактивных сил направлен строго вдоль оси вращения. Тело 2 не изменяет своих инерционно-массовых характеристик, вычисленных в связанной с телом системе координат \$Ox_2y_2z_2\$, и, следовательно, не создает реактивных сил. Центр масс системы вследствие изменения массы тела 1 смещается с некоторой скоростью \$\mathbf{q}_C\$ строго вдоль направления продольной оси. На фиг. 2 изображен случай, когда в начальный момент времени масса второго тела больше массы первого.

Запишем угловые скорости и кинетические моменты тел в проекциях на оси своих связанных систем координат

$$\omega_i = p_i \mathbf{i}_i + q_i \mathbf{j}_i + r_i \mathbf{k}_i \tag{2.1}$$

$$\mathbf{K}_{1,O} = A_1(t)(p_1 \mathbf{i}_1 + q_1 \mathbf{j}_1) + C_1(t)r_1 \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{K}_{2,O} = A_2(p_2 \mathbf{i}_2 + q_2 \mathbf{j}_2) + C_2 r_2 \mathbf{k}_2 \tag{2.2}$$

где \$A_i\$ и \$C_i\$ – экваториальный и продольный моменты инерции тела \$i\$, вычисленные в связанной с телом соответствующей системе координат; \$\{\mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{k}_i\}\$ – орты систем \$Ox_iy_iz_i\$ (\$i = 1, 2\$).

Тела системы могут вращаться относительно друг друга лишь в направлении общей продольной оси, совпадающей с Oz_2 (и с Oz_1). При этом угол и скорость закручивания тела 1 относительно тела 2 в направлении продольной оси Oz_2 обозначим соответственно как δ и $\sigma = \dot{\delta}$. Углы пространственной ориентации соосных тел относительно поступательно движущейся системы координат $OXYZ$ указаны на фиг. 2. Связь между угловыми скоростями и угловыми ускорениями двух тел в векторном виде определяются формулами

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.3)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = (0, 0, \dot{\delta})$ – вектор относительной угловой скорости тел, который имеет проекцию только на общую ось вращения Oz_2 . Связь между компонентами угловых скоростей для двух тел имеет вид

$$p_1 = p_2 \cos \delta + q_2 \sin \delta, \quad q_1 = q_2 \cos \delta - p_2 \sin \delta, \quad r_1 = r_2 + \sigma \quad (2.4)$$

При свободном движении системы ($M_O^e = 0$, $M_O^R = 0$) теорему об изменении кинетического момента (1.4) в поступательно движущихся осях $OXYZ$, можно переписать в виде

$$\left[\left(\frac{d\mathbf{K}_{1,O}}{dt} \right)_{Ox_1y_1z_1} - \sum_{v_1} \boldsymbol{\rho}_{v_1} \times \frac{dm_{v_1}}{dt} (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}) \right] + \left(\frac{d\mathbf{K}_{2,O}}{dt} \right)_{Ox_2y_2z_2} + \sum_{i=1}^2 \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{K}_{i,O} = -\boldsymbol{\rho}_C \times m \mathbf{W}_O \quad (2.5)$$

где

$$\boldsymbol{\rho}_{v_1} = x_{v_1} \mathbf{i}_1 + y_{v_1} \mathbf{j}_1 + z_{v_1} \mathbf{k}_1 \quad (2.6)$$

Проецируя выражение, стоящее в квадратных скобках в уравнении (2.5), на оси системы $Ox_1y_1z_1$ и используя формулы (2.1), (2.2) и (2.6), получим

$$\left[\left(\frac{d\mathbf{K}_{1,O}}{dt} \right)_{Ox_1y_1z_1} - \sum_{v_1} \boldsymbol{\rho}_{v_1} \times \frac{dm_{v_1}}{dt} (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}) \right] = A_1(t)(\dot{p}_1 \mathbf{i}_1 + \dot{q}_1 \mathbf{j}_1) + C_1(t) \dot{r}_1 \mathbf{k}_1 \quad (2.7)$$

Следует отметить, что при упрощении соотношения (2.7) члены, содержащие производные от переменных во времени моментов инерции, взаимно уничтожаются с членами, следующими из суммы, стоящей в квадратных скобках. Это можно видеть, например, из проекции на связанную ось Ox_1 вектора, представленного в квадратных скобках в левой части равенства (2.7):

$$\begin{aligned} [\dots]_{x_1} &= \frac{dA_1}{dt} p_1 + A_1 \dot{p}_1 - \sum_{v_1} [\boldsymbol{\omega}_1 \rho_{v_1}^2 - \boldsymbol{\rho}_{v_1} (\boldsymbol{\rho}_{v_1} \cdot \boldsymbol{\omega}_1)]_{x_1} \dot{m}_{v_1} = \\ &= \frac{dA_1}{dt} p_1 + A_1 \dot{p}_1 - p_1 \sum_{v_1} \frac{dm_{v_1}}{dt} (y_{v_1}^2 + z_{v_1}^2) + q_1 \sum_{v_1} \frac{dm_{v_1}}{dt} x_{v_1} y_{v_1} + \\ &+ r_1 \sum_{v_1} \frac{dm_{v_1}}{dt} x_{v_1} z_{v_1} = \frac{dA_1}{dt} p_1 + A_1 \dot{p}_1 - p_1 \frac{dA_1}{dt} = A_1 \dot{p}_1 \end{aligned}$$

С учетом выражения (2.7) и формул (2.4) запишем уравнение (2.5) в проекциях на оси системы $Ox_2y_2z_2$, связанной с телом 2. При переходе от системы $Ox_1y_1z_1$ к системе $Ox_2y_2z_2$ используется ортогональная матрица поворота на угол δ . В результате получим

$$\begin{aligned} A_3(t)\dot{p}_2 + (C_3(t) - A_3(t))q_2r_2 + C_1(t)q_2\sigma &= -[\mathbf{p}_C \times m\mathbf{w}_O]_x \\ A_3(t)\dot{q}_2 - (C_3(t) - A_3(t))p_2r_2 - C_1(t)p_2\sigma &= -[\mathbf{p}_C \times m\mathbf{w}_O]_y \\ C_3(t)\dot{r}_2 + C_1(t)\dot{\sigma} &= -[\mathbf{p}_C \times m\mathbf{w}_O]_z \\ A_3(t) &= A_1(t) + A_2, \quad C_3(t) = C_1(t) + C_2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

При изменении массы тела 1 отброс точек происходит симметрично относительно продольной оси и главный вектор реактивных сил в связанной с телом системе $Ox_1y_1z_1$ можно представить в виде

$$\mathbf{\Phi}_1^R = (0, 0, \Phi_{z_1}^R) \tag{2.9}$$

Из теоремы о движении центра масс системы переменной массы [2] и выражения (2.3) следует справедливость следующего соотношения:

$$m\mathbf{w}_O = \mathbf{\Phi}_1^R - \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times m\mathbf{p}_C - m\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{p}_C \tag{2.10}$$

Имея в виду, что $\mathbf{p}_C = (0, 0, p_C)$, $\mathbf{p}_C \times \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{p}_C = 0$ и принимая во внимание (2.9), с помощью уравнения (2.10) представим вектор $(-\mathbf{p}_C \times m\mathbf{w}_O)$ в проекциях на оси системы $Ox_2y_2z_2$

$$-[\mathbf{p}_C \times m\mathbf{w}_O] = m\rho_C^2[\dot{p}\mathbf{i}_2 + \dot{q}\mathbf{j}_2 + 0\mathbf{k}_2] \tag{2.11}$$

С учетом соотношения (2.11) уравнения (2.8) запишем в виде

$$\begin{aligned} (A_3(t) - m\rho_C^2(t))\dot{p}_2 + (C_3(t) - A_3(t))q_2r_2 + C_1(t)q_2\sigma &= 0 \\ (A_3(t) - m\rho_C^2(t))\dot{q}_2 - (C_3(t) - A_3(t))p_2r_2 - C_1(t)p_2\sigma &= 0 \\ C_3(t)\dot{r}_2 + C_1(t)\dot{\sigma} &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $\rho_C(t)$ – известная функция времени.

К трем динамическим уравнениям (2.12) добавим уравнение, описывающее относительное движение тел. Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента в проекции на ось вращения, записанную для первого тела

$$\frac{dK_{z_1}}{dt} = M_\delta + \left(\sum_{v_1} \mathbf{p}_{v_1} \times \frac{dm_{v_1}}{dt} \dot{\mathbf{p}}_{v_1} \right)_{z_1}$$

где $K_{z_1} = C_1(t)r_1$ – проекция кинетического момента первого тела на ось вращения, M_δ – момент внутреннего взаимодействия тел. Поскольку центробежные моменты инерции тела равны нулю, это уравнение примет вид

$$C_1(t)(\dot{r}_2 + \dot{\sigma}) = M_\delta \tag{2.13}$$

Дополним динамические уравнения (2.12) и (2.13) следующими кинематическими соотношениями (фиг. 2):

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= p_2 \sin \varphi + q_2 \cos \varphi, \quad \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \gamma} (p_2 \cos \varphi - q_2 \sin \varphi) \\ \dot{\phi} &= r_2 - \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} (p_2 \cos \varphi - q_2 \sin \varphi), \quad \dot{\delta} = \sigma \end{aligned} \tag{2.14}$$

Если при изменении массы величина $mr_C^2(t)$ остается малой по сравнению с суммарным поперечным моментом инерции системы $A_3(t)$, то система динамических уравнений приобретает вид

$$\begin{aligned} A_3(t)\dot{p}_2 + (C_3(t) - A_3(t))q_2r_2 + C_1(t)q_2\sigma &= 0 \\ A_3(t)\dot{q}_2 - (C_3(t) - A_3(t))p_2r_2 - C_1(t)p_2\sigma &= 0 \\ C_3(t)\dot{r}_2 + C_1(t)\dot{\sigma} = 0, \quad C_1(t)(\dot{r}_2 + \dot{\sigma}) &= M_\delta \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из системы (2.15) следует, что уравнения движения соосных тел переменной массы в случае небольших относительных смещений центра масс отличаются от уравнений движения соосных тел постоянной массы [1] тем, что моменты инерции переменны во времени. При скорости относительной закрутки тождественно равной нулю ($\sigma = \dot{\delta} \equiv 0$) уравнения (2.15) совпадают с известными уравнениями свободного движения динамически симметричного тела переменного состава [2, 3].

3. Решения для углов ориентации соосной системы двух тел. Пусть между соосными телами момент внутреннего взаимодействия отсутствует ($M_\delta \equiv 0$), конечное смещение центра масс невелико, а экваториальный и продольный моменты инерции тела 1 изменяются по линейным законам

$$A_1(t) = A_1 - at, \quad C_1(t) = C_1 - ct; \quad a = (A_1 - A_{1f})/T, \quad c = (C_1 - C_{1f})/T \quad (3.1)$$

где A_1, C_1, A_{1f}, C_{1f} – величины, соответствующие началу и концу процесса изменения массы, а T – его длительность.

Введем новые безразмерные переменные G, F с помощью замены

$$p_2(t) = \omega G(t) \sin F(t), \quad q_2(t) = \omega G(t) \cos F(t) \quad (3.2)$$

где $\omega = (r_0(A_1 + A_2 - C_1 - C_2) - C_1\sigma_0)/(A_1 + A_2)$ – характерная угловая скорость. Переменная G в формулах (3.2) представляет собой безразмерную поперечную угловую скорость системы тел

$$G(t) = (p_2 \sin F + q_2 \cos F)/\omega$$

а переменная фаза F определяет угол между вектором поперечной угловой скорости и осью Oy .

В новых переменных систему (2.15) можно записать следующим образом:

$$\dot{G} = 0, \quad (A - at)\dot{F} = A\omega - nt; \quad r_2 = r_0, \quad \sigma = \sigma_0 \quad (r_1 = r_0 + \sigma_0) \quad (3.3)$$

где

$$A = A_1 + A_2, \quad n = ar_0 - c(r_0 + \sigma_0)$$

Система (3.3) имеет точное решение:

$$G = L_0, \quad F(t) = s_0 + \frac{n}{a}t - \frac{A}{a^2}(a\omega - n) \ln\left(1 - \frac{a}{A}t\right) \quad (3.4)$$

где L_0, s_0 – начальные значения амплитуды и фазы.

Пусть отношение изменения экваториального момента инерции тела 1 к начальному экваториальному моменту инерции системы – малая величина

$$\mu = (A_1 - A_{1f})/(A_1 + A_2) = aT/A \ll 1$$

Представляя натуральный логарифм в решении (3.4) в виде сходящегося на всем интервале времени $t \in [0, T]$ степенного ряда и отбрасывая величины порядков μ^2 и выше, можно записать решение для фазы

$$F(t) = s_0 + \omega t + \kappa t^2, \quad \kappa = (a\omega - n)/(2A) \tag{3.5}$$

С помощью выражения (3.5) для экваториальных угловых скоростей запишем следующие решения:

$$p_2(t) = \omega L_0 \sin((\omega + \kappa)t + s_0), \quad q_2(t) = \omega L_0 \cos((\omega + \kappa)t + s_0) \tag{3.6}$$

Рассмотрим случай, когда тело 1 быстро вращается, тело 2 неподвижно относительно продольной оси ($r_0 = 0$) и модуль поперечной угловой скорости системы мал по сравнению с характерной угловой скоростью

$$\varepsilon = \sqrt{p_2^2 + q_2^2}/|\omega| = |G| = |L_0| \ll 1 \tag{3.7}$$

Углы ориентации γ и ψ будем считать малыми ($\gamma = O(\varepsilon)$, $\psi = O(\varepsilon)$). Тогда угол нутации θ (угол между осями OZ и Oz_i) определится следующей приближенной формулой:

$$\theta^2 \cong \gamma^2 + \psi^2 \tag{3.8}$$

Учитывая соотношения (3.5), (3.7) и (3.8), кинематические уравнения (2.14) запишем в виде

$$\dot{\gamma} = \omega L_0 \sin(F(t) + \varphi), \quad \dot{\psi} = \omega L_0 \cos(F(t) + \varphi), \quad \dot{\varphi} = -\gamma \omega L_0 \cos(F(t) + \varphi)$$

В силу принятых допущений величина $\dot{\varphi}$ имеет более высокий порядок малости, чем $\dot{\gamma}$ и $\dot{\psi}$, поэтому можно считать, что на малом промежутке времени $\varphi = \text{const} = 0$. Тогда для угловых скоростей $\dot{\gamma}$ и $\dot{\psi}$ можно записать

$$\dot{\gamma} = \omega L_0 \sin F(t), \quad \dot{\psi} = \omega L_0 \cos F(t) \tag{3.9}$$

Рассмотрим два возможных случая движения, реализуемых при следующих соотношениях между величинами:

$$1) \text{ sign } \omega = \text{ sign } \kappa, \quad 2) \text{ sign } \omega = -\text{ sign } \kappa \tag{3.10}$$

Считая для определенности величину частоты ω положительной, для обоих случаев (3.10) с помощью интегралов Френеля можно записать следующие аналитические зависимости для углов ориентации системы (верхние знаки плюс и минус берутся для случая 1, нижние – для случая 2):

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \pm c_{\mp} [S(\lambda(t)) - S(\lambda(0))] + s_{\mp} [C(\lambda(t)) - C(\lambda(0))] + \gamma_0 \\ \psi(t) &= c_{\mp} [C(\lambda(t)) - C(\lambda(0))] \mp s_{\mp} [S(\lambda(t)) - S(\lambda(0))] + \psi_0 \end{aligned}$$

где

$$c_{\pm} = R \cos\left(s_0 \pm \frac{\omega^2}{4\kappa}\right), \quad s_{\pm} = R \sin\left[s_0 \pm \frac{\omega^2}{4\kappa}\right], \quad \lambda(t) = \sqrt{\frac{2|\kappa|}{\pi}} \left(t + \frac{\omega}{2\kappa}\right), \quad R = L_0 \sqrt{\frac{\pi}{2|\kappa|}}$$

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$$

($C(x)$ и $S(x)$ – интегралы Френеля).

4. Анализ амплитуды нутационных колебаний при малых изменениях моментов инерции. Рассмотрим движение космического аппарата (КА), состоящего из двух соосных тел, одно из которых является тормозной двигательной установкой – тело 1. Тело 2 не вращается ($r_0 = 0$) и масса его неизменна, а тело 1 переменной массы закручено относительно второго тела ($\sigma_0 \neq 0$). Такая схема может быть использована при торможении КА при входе в атмосферу [1]. Очевидно, что следует стремиться к тому, чтобы в процессе торможения продольная ось системы сохраняла свое положение в пространстве. Получим оценку величины угла нутации на этапе торможения. При $r_0 = 0$ формула (3.5) приобретает вид

$$\kappa = \omega \frac{aC_1 - cA}{2C_1A} \quad (4.1)$$

Рассмотрим случай, когда конечные изменения величин экваториального и продольного моментов тела 1, отнесенные к суммарному экваториальному моменту инерции системы и начальному продольному моменту инерции тела 1 соответственно, являются малыми

$$\mu = \Delta_A/A \ll 1, \quad \Delta_C/C_1 \ll 1 \quad (4.2)$$

где $\Delta_A = A_1 - A_{1f}$, $\Delta_C = C_1 - C_{1f}$ – положительные конечные изменения величин соответствующих моментов инерции тела 1. Ограничения (3.7), (3.8) и (4.2) отвечают практической задаче торможения КА с помощью двигательной установки (длительность T процесса торможения не превышает 30 с).

Введем мгновенную частоту

$$\Omega(t) = \omega + \kappa t = \omega(1 + \tau(t)), \quad \tau(t) = \frac{aC_1 - cA}{2C_1A} t$$

Тогда уравнения (3.9) примут вид

$$\dot{\gamma} = \omega L_0 \sin(\Omega(t)t + s_0), \quad \dot{\psi} = \omega L_0 \cos(\Omega(t)t + s_0) \quad (4.3)$$

Наибольшее по модулю значение $\tau(t)$ будет малой величиной:

$$\sup_t |\tau(t)| = \left| \frac{aC_1 - cA}{2C_1A} \right| T = \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta_A}{A} - \frac{\Delta_C}{C_1} \right| \ll 1$$

Приближенное представление о движении системы можно получить [4], если принять $\tau(t)$ в качестве параметра, взяв его равным своему среднему значению

$$\bar{\tau} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta_A}{A} - \frac{\Delta_C}{C_1} \right)$$

В этом случае приближенные решения уравнений (4.3) имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\approx -\frac{L_0}{1 + \bar{\tau}} [\cos(\bar{\Omega}t + s_0) - \cos s_0] + \gamma_0 \\ \psi(t) &\approx \frac{L_0}{1 + \bar{\tau}} [\sin(\bar{\Omega}t + s_0) - \sin s_0] + \psi_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\bar{\Omega} = \omega(1 + \bar{\tau})$$

Из выражений (3.8) и (4.4) следует зависимость угла нутации от времени

$$\begin{aligned} \theta^2(t) &= \frac{2L_0^2}{(1 + \bar{\tau})^2} [1 - \cos(\bar{\Omega}t)] + \frac{2L_0}{1 + \bar{\tau}} \{ \psi_0 (\sin(\bar{\Omega}t + s_0) - \sin s_0) - \\ &- \gamma_0 (\cos(\bar{\Omega}t + s_0) - \cos s_0) \} + \theta_0^2, \quad \theta_0^2 = \gamma_0^2 + \psi_0^2 \end{aligned}$$

Усреднение по быстрой фазе $\chi = \bar{\Omega} t$ дает следующую приближенную формулу:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{2L_0^2}{(1 + \bar{\tau})^2} + \frac{2L_0}{1 + \bar{\tau}} D + \theta_0^2 \tag{4.5}$$

где

$$D = \sqrt{\gamma_0^2 + \psi_0^2} \cos(\alpha + s_0), \quad \cos \alpha = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\gamma_0^2 + \psi_0^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\psi_0}{\sqrt{\gamma_0^2 + \psi_0^2}}$$

Рассмотрим частный случай, когда $D = 0$, который реализуется при $\gamma_0 = \psi_0$ (тогда $\alpha = \pi/4$) и при $p_0 = q_0$ (тогда $s_0 = \pi/4$), что может быть всегда достигнуто соответствующим выбором систем координат. Тогда из формулы (4.5) следует, что для уменьшения среднего значения угла нутации необходимо увеличивать сумму $1 + \bar{\tau}$, что равносильно следующим условиям:

$$\bar{\tau} > 0, \quad |\bar{\tau}| \rightarrow \sup \tag{4.6}$$

Характерная частота ω в рассматриваемом случае имеет следующее значение:

$$\omega = -C_1 \sigma_0 / A \tag{4.7}$$

Первое условие (4.6) эквивалентно неравенству

$$\Delta_A / A > \Delta_C / C_1 \tag{4.8}$$

Второе условие (4.6) при фиксированной величине скорости относительной закрутки тел σ_0 и, как следствие, при фиксированном значении характерной частоты ω (4.7) сводится к условию увеличения модуля $\bar{\tau}$ и приобретает вид

$$\Delta_A / A - \Delta_C / C_1 \rightarrow \sup_{\{\Delta_A, \Delta_C\}} \tag{4.9}$$

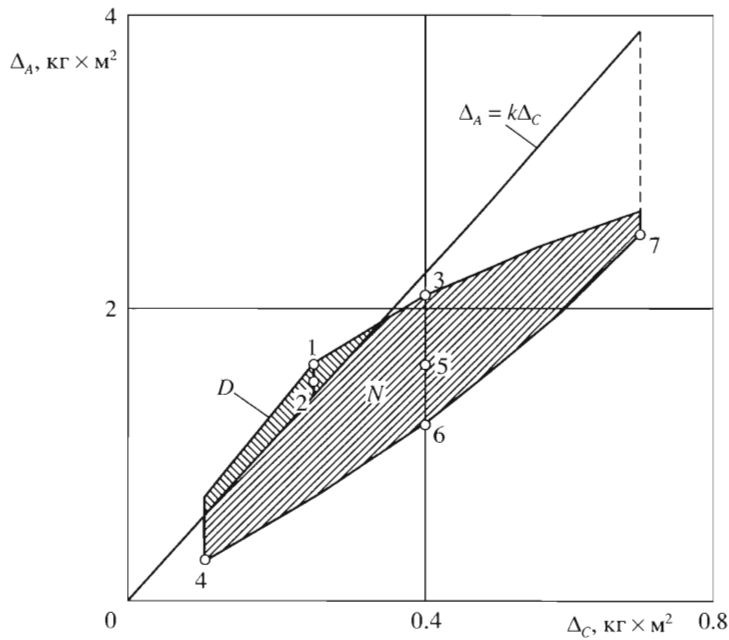
На фиг. 3 в пространстве переменных $\{\Delta_A, \Delta_C\}$ изображена прямая

$$\Delta_A = k \Delta_C, \quad k = A / C_1 \tag{4.10}$$

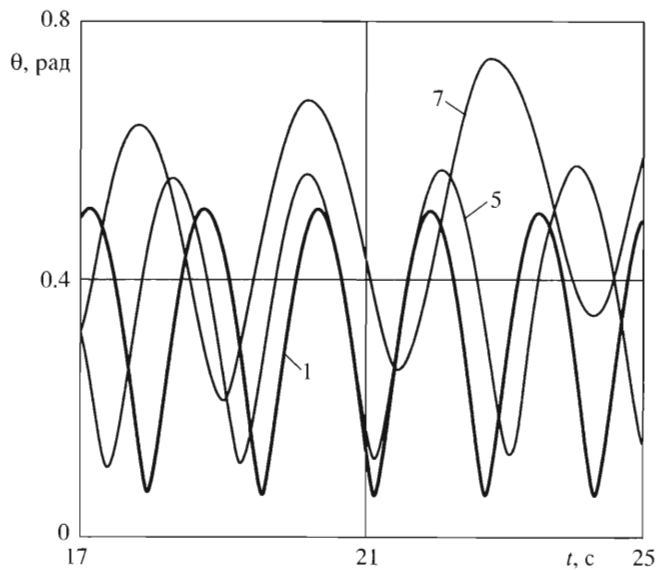
определяющая границу, выше которой (область D на фиг. 3) условие (4.8) выполняется, а ниже (область N на фиг. 3) не выполняется. При рассмотрении практического примера торможения КА указанные области N и D представляют собой подмножества множества возможных проектных параметров. Проектными параметрами являются конечные изменения моментов инерции тормозной двигательной установки $\{\Delta_A, \Delta_C\}$, определяющие форму и внутреннее размещение топливных зарядов – твердотопливных пакетов канального горения.

Условию (4.9) удовлетворяют точки $\{\Delta_A, \Delta_C\}$, находящиеся выше прямой (4.10) и наиболее удаленные от нее. На фиг. 3 приведен набор точек, соответствующий области возможных проектных параметров для КА, которые пронумерованы в соответствии с уменьшением указанного удаления; например, точка 1 имеет наибольшее положительное удаление, а точка 7 – наименьшее отрицательное удаление.

Полученные оценки позволяют на практике вырабатывать рекомендации по размещению твердотопливных пакетов в тормозной двигательной установке. Необходимо, чтобы процесс выгорания топлива приводил к таким изменениям моментов инерции, при которых, во-первых, точка проектных параметров $\{\Delta_A, \Delta_C\}$ располагалась бы в области D и, во-вторых, была бы наиболее всего удалена от прямой (4.10).



Фиг. 3



Фиг. 4

Проведены расчеты зависимостей угла нутации по полным уравнениям движения (2.14) и (2.15) с учетом соотношения (3.8) для некоторых точек $\{\Delta_A, \Delta_C\}$ из дискретного набора значений (фиг. 3), удовлетворяющих условию (4.2), при прочих одинаковых инерционно-массовых параметрах и начальных условиях движения

$$A_1 = A_2 = 2.5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad C_1 = 0.9 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad C_2 = 0.3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad \psi_0 = \gamma_0 = 0.1 \text{ рад}$$

$$r_0 = 0 \text{ рад/с}, \quad \sigma_0 = 20 \text{ рад/с}, \quad L_0 = 1.1 \text{ рад/с}, \quad s_0 = 0 \text{ рад}, \quad T = 25 \text{ с}$$

Результаты, представленные на фиг. 4, показывают, что наименьшие значения угла нутации достигаются для точки 1, а наибольшие – для точки 7 из пространства $\{\Delta_A, \Delta_C\}$. Проведенные расчеты подтверждают правильность основных аналитических выводов, сформулированных в форме условий (4.8) и (4.9).

В заключение отметим, что полученные уравнения и их приближенные решения могут быть полезны при исследовании движения других классов космических аппаратов, представляющих собой систему соосных тел переменного состава.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00151).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска // Космич. исследования. 2002. Т. 40. № 2. С. 193–200.
2. *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Просвещение, 1966. 398 с.
3. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.
4. *Аникеев Г. И.* Нестационарные почти периодические колебания роторов. М.: Наука, 1979. 136 с.

Самара
e-mail: aslanov@ssau.ru

Поступила в редакцию
26.XII.2002