

УДК 531.36

© 2004 г. А. В. Карапетян, В. А. Самсонов, Т. С. Сумин

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ВЕТВЛЕНИИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

Рассматривается задача о движении динамически симметричного тяжелого тела с неподвижной точкой и осесимметричной эллипсоидальной полостью, целиком заполненной жидкостью, при учете внутреннего трения. Найдены все перманентные вращения системы, исследованы их устойчивость и ветвление. Результаты представлены в виде атласа бифуркационных диаграмм.

Основополагающие результаты в динамике твердого тела с полостями, содержащими жидкость, изложены в монографии [1]. Была предложена [2] феноменологическая модель внутреннего вязкого трения, которая апробирована на линейных задачах описания малых колебаний в окрестности равномерных вращений системы вокруг вертикально расположенной оси симметрии. Ниже эта модель используется для построения бифуркационных диаграмм стационарных движений симметричного тяжелого тела с вязким наполнителем (нелинейная задача), которые наряду с указанным включают равномерные вращения вокруг вертикали при наклонном положении оси симметрии тела.

1. Уравнения движения. Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой и полостью, целиком заполненной однородной жидкостью. Предположим, что тело динамически симметрично, а полость представляет собой эллипсоид вращения, ось симметрии которого совпадает с осью динамической симметрии тела, на которой расположен центр масс тела. Кроме того, предположим, что жидкость совершает простое [1, 2] движение, причем при взаимодействии жидкости со стенками полости возникает трение, линейно зависящее от разности угловой скорости тела и половины вектора вихря жидкости.

Уравнения движения системы тело-жидкость имеют вид (ср. с моделью, рассмотренной ранее [2])

$$A\dot{\omega} + B\dot{\Omega} + [\omega, (A\omega + B\Omega)] = [\gamma, \partial V / \partial \gamma] \quad (1.1)$$

$$B\dot{\Omega} + [(\omega + \Omega), C\Omega] = D(\omega - \Omega) \quad (1.2)$$

$$\dot{\gamma} + [\omega, \gamma] = 0 \quad (1.3)$$

Здесь

$$A = J + J^* = \text{diag}(A_1, A_1, A_3), \quad B = I - J^* = \text{diag}(B_1, B_1, B_3)$$

$$C = \text{diag}(B_1, B_1, 4\delta^2(1 + \delta^2)^{-1}B_3), \quad D = \text{diag}(D_1, D_1, D_3), \quad \delta = a_1/a_3$$

$$J = \text{diag}(J_1, J_1, J_3), \quad J^* = \text{diag}(J_1^*, J_1^*, J_3^*), \quad I = \text{diag}(I_1, I_1, I_3)$$

ω – угловая скорость, Ω – половина вектора вихря, γ – единичный вектор восходящей вертикали, $V = mgs\gamma_3$ – потенциальная энергия системы (m – масса всей системы,

g – ускорение свободного падения, s – расстояние от неподвижной точки до центра масс системы), J – тензор инерции твердого тела для неподвижной точки, отнесенный к главным осям инерции тела, J^* – тензор инерции эквивалентного тела ($a_1, a_2 = a_1$ и a_3 – полуоси полости), I – центральный тензор инерции жидкости, отнесенный к главным осям полости.

Тензор A представляет собой сумму тензоров инерции тела и эквивалентного тела, тензор B – разность тензоров инерции жидкости и эквивалентного тела, тензор C носит вспомогательный характер, а тензор D характеризует интенсивность внутреннего трения ($(D u, u) > 0, \forall u \neq 0$). Если через $m\epsilon$ обозначить массу тела, а через $m(1 - \epsilon)$ – массу жидкости ($\epsilon \in (0, 1)$), то

$$J_1 = m\epsilon(\rho_1^2 + s^2), \quad J_3 = m\epsilon\rho_3^2, \quad J_1^* = \frac{m(1-\epsilon)}{5}a_3^2\frac{(1-\delta^2)^2}{1+\delta^2}, \quad J_3^* = 0$$

$$I_1 = \frac{m(1-\epsilon)}{5}a_3^2(1+\delta^2), \quad I_3 = \frac{2m(1-\epsilon)}{5}a_3^2\delta^2$$

($\rho_1, \rho_2 = \rho_1$ и ρ_3 – центральные радиусы инерции тела).

Уравнения (1.1) выражают закон изменения кинетического момента системы, уравнения (1.2) описывают эволюцию вектора вихря, а уравнения (1.3) означают постоянство вектора γ в абсолютной системе отсчета.

В случае $D = 0$ система уравнений (1.1)–(1.3) исследовалась Томпсоном, Пуанкаре, Жуковским и др. (см. подробную библиографию в [1, 3] и обзорах ВИНТИ).

2. Эффективный потенциал. Из системы уравнений (1.1)–(1.3) следует, что

$$\frac{dH}{dt} = -(D(\omega - \Omega), (\omega - \Omega)) \leq 0, \quad \frac{dK}{dt} = 0$$

где H – полная механическая энергия системы, K – проекция кинетического момента системы на вертикаль:

$$H = \frac{1}{2}[(A\omega, \omega) + (B\Omega, \Omega)] + V, \quad K = ((A\omega + B\Omega), \gamma)$$

Таким образом, рассматриваемая система допускает невозрастающую функцию H и первый интеграл $K = k = \text{const}$.

Найдем эффективный потенциал [4] системы как минимум функции H по переменным ω и Ω на фиксированном уровне интеграла $K = k$. Для этого рассмотрим функцию $F = H - \lambda(K - k)$, где λ – неопределенный множитель Лагранжа, и выпишем условия ее стационарности по переменным ω, Ω и λ

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = A(\omega - \lambda\gamma) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \Omega} = B(\Omega - \lambda\gamma) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = k - K = 0 \quad (2.1)$$

Из первых двух уравнений системы (2.1) следуют соотношения $\omega = \lambda\gamma$ и $\Omega = \lambda\gamma$, подставляя которые в последнее уравнение этой системы, находим

$$\lambda = k/P(\gamma), \quad P(\gamma) = P_1(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + P_3\gamma_3^2; \quad P_1 = A_1 + B_1, \quad P_3 = A_3 + B_3$$

Таким образом, минимум функции H на уровне $K = k$ достигается при

$$\omega = \frac{k}{P(\gamma)}\gamma, \quad \Omega = \frac{k}{P(\gamma)}\gamma \quad (2.2)$$

и равняется

$$W_k(\gamma) = mgs\gamma_3 + \frac{k^2}{2P(\gamma)} \quad (2.3)$$

Согласно теории Рауса, критическим точкам $\gamma = \gamma_0$ функции $W_k(\gamma)$ на сфере Пуассона $\gamma^2 = 1$ отвечают стационарные движения системы

$$\omega = \frac{k}{P(\gamma_0)}\gamma_0, \quad \Omega = \frac{k}{P(\gamma_0)}\gamma_0, \quad \gamma = \gamma_0 \quad (2.4)$$

которые, очевидно, представляют собой перманентные вращения системы как твердого тела ($\omega = \Omega$) вокруг вертикали, причем точкам минимума соответствуют устойчивые стационарные движения.

Покажем, что функция H убывает на всех движениях, отличных от стационарных движений (2.4). Действительно, $dH/dt \equiv 0$, если и только если $\omega \equiv \Omega$; при этом (см. (1.2)) $\dot{\Omega} \equiv 0$, т. е. $\dot{\omega} \equiv 0$. Таким образом $\dot{\gamma}_3 \equiv 0$ (см. выражение для функции H) и $\dot{\gamma}_1 \equiv \dot{\gamma}_2 \equiv 0$ (см. проекции уравнения (1.1) на первые две главные оси инерции тела). Следовательно, точкам минимума эффективного потенциала отвечают частично асимптотически устойчивые движения, а другим критическим точкам – неустойчивые движения. В первом случае частичная асимптотическая устойчивость означает, что возмущенное движение стремится к перманентному вращению (но не обязательно к невозмущенному).

3. Устойчивость тривиальных стационарных движений. Для исследования критических точек эффективного потенциала на сфере Пуассона приведем его к виду

$$W_k = mgsf(\gamma_3), \quad f(\gamma_3) = \gamma_3 + \frac{\kappa^2}{2[\gamma_3^2 + p(1 - \gamma_3^2)]}; \quad \kappa^2 = \frac{k^2}{mgsP_3}, \quad p = \frac{P_1}{P_3}$$

Очевидно, функция $f(\gamma_3)$ определена на отрезке $\gamma_3 \in [-1, 1]$ и всегда имеет критические точки $\gamma_3 = -1$ и $\gamma_3 = 1$. Этим точкам отвечают тривиальные равномерные вращения вокруг вертикально расположенной оси симметрии:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \gamma_3 = -1, \quad \omega_3 = \Omega_3 = \omega = -k/P_3 \quad (3.1)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \omega_3 = \Omega_3 = \omega = k/P_3 \quad (3.2)$$

при наиминиме (3.1) или наивысшем (3.2) расположении центра масс.

Первые устойчивы (неустойчивы), если $f'(-1) > 0$ (< 0), а вторые устойчивы (неустойчивы), если $f'(1) < 0$ (> 0). Вычисляя $f' = df/d\gamma_3$, имеем

$$f' = 1 - \frac{\kappa^2(1-p)\gamma_3}{[\gamma_3^2 + p(1-\gamma_3^2)]^2}$$

Таким образом, условия устойчивости (неустойчивости) равномерных вращений (3.1) и (3.2) имеют соответственно вид

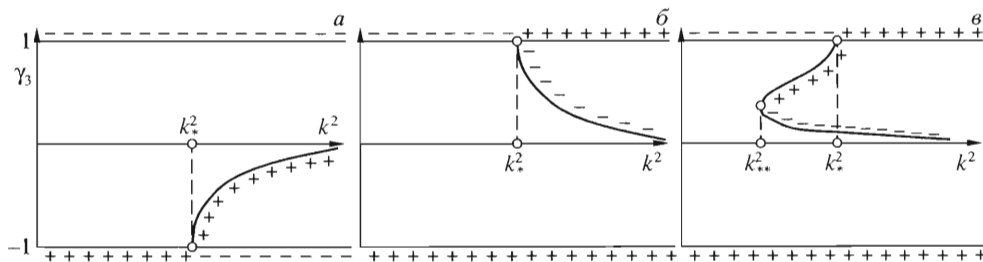
$$1 + \kappa^2(1-p) > 0 \quad (< 0), \quad 1 - \kappa^2(1-p) < 0 \quad (> 0)$$

или

$$mgs + (A_3 + B_3 - A_1 - B_1)\omega^2 > 0 \quad (< 0) \quad (3.3)$$

$$mgs - (A_3 + B_3 - A_1 - B_1)\omega^2 < 0 \quad (> 0) \quad (3.4)$$

Следовательно, равномерные вращения (3.1) всегда устойчивы (см. (3.3)) при $A_3 + B_3 > A_1 + B_1$ (т.е. при $p < 1$), а равномерные вращения (3.2) всегда неустойчивы (см. (3.4)) при $p > 1$.



При $p > 1$ равномерные вращения (3.1) устойчивы при $\kappa^2 < \kappa_*^2$ ($\omega^2 < \omega_*^2$), а при $p < 1$ равномерные вращения (3.2) устойчивы при $\kappa^2 > \kappa_*^2$ ($\omega^2 > \omega_*^2$). Здесь

$$\kappa_*^2 = \frac{p^2}{|1-p|}, \quad \omega_*^2 = \frac{mgs}{|A_3 + B_3 - A_1 - B_1|}$$

Таким образом, при $p > 1$ ($p < 1$) происходит смена устойчивости равномерных вращений (3.1) ((3.2)), и от них должны ответвляться “косые” ($\gamma_3^2 \neq 1$, т.е. $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$) перманентные вращения.

Условия (3.3) и (3.4), как видно, не содержат элементов тензора D . Это обстоятельство вполне коррелирует с известным результатом В.В. Румянцева [1]: условия устойчивости перманентного вращения тела с вязким наполнением в отсутствие внешней диссипации не содержат коэффициента вязкости наполнения. Такое свойство объясняется тем, что условия (3.3), (3.4) выделяют области “вековой устойчивости”. В случае $D = 0$ к этой области может добавиться область “гироскопической стабилизации”, которая, как известно, разрушается при сколь угодно малых диссипативных силах.

Величина вязкости влияет на скорость переходных процессов, для оценки которой можно использовать систему (1.1)–(1.3).

4. Ветвление стационарных движений. Для отыскания “косых” перманентных вращений рассмотрим уравнение $f' = 0$, из которого определяются внутренние ($\gamma_3 \in (-1, 1)$) критические точки эффективного потенциала, и представим его в виде

$$\kappa^2 = \frac{[\gamma_3^2 + p(1 - \gamma_3^2)]^2}{(1-p)\gamma_3} = \Phi(\gamma_3) \tag{4.1}$$

Очевидно, уравнение (4.1) при $p > 1$ может иметь только отрицательные корни ($\gamma_3 \in (-1, 0)$), а при $p < 1$ – только положительные ($\gamma_3 \in (0, 1)$). Заметим, что это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением, из которого определяются “косые” стационарные движения физического маятника, подвешенного на горизонтальной оси, которая может свободно вращаться вокруг вертикали (см. [4, 5]). Анализ функции $\Phi(\gamma_3)$ (см. также [4, 5]) показывает, что при $p > 1$ и $3/4 < p < 1$ эта функция монотонна, а при $p \in (0, 3/4)$ имеет только одну точку экстремума: $\gamma_3 = \sqrt{p/(3(1-p))}$. Таким образом, все критические точки функции $f(\gamma_3)$ можно представить в виде кривых $\gamma_3 = \gamma_3(k^2)$ на плоскости $(k^2; \gamma_3)$. При этом следует различать три случая: а) $p > 1$, б) $3/4 < p < 1$, в) $0 < p < 3/4$. Эти кривые представлены на фигуре, где

$$\kappa_*^2 = mgsP_3 \frac{p^2}{|1-p|}, \quad \kappa_{**}^2 = \kappa_*^2 \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{1-p}}$$

Знаками плюс (минус) отмечены устойчивые (неустойчивые) перманентные вращения, причем выводы об устойчивости или неустойчивости “косых” перманентных вращений ($\gamma_3 \neq \pm 1$) сделаны на основе теории бифуркации [4, 5].

5. Пример. В качестве примера рассмотрим случай тяжелого тонкостенного эллипсоида, заполненного жидкостью и закрепленного в вершине, лежащей на его оси симметрии. При этом

$$s = a_3, \quad A_1 = \frac{ma_3^2}{3}\varepsilon(1 + \delta^2) + ma_3^2\varepsilon = \frac{ma_3^2}{3}\varepsilon(4 + \delta^2)$$

$$A_3 = \frac{ma_3^2}{3}\varepsilon 2\delta^2, \quad B_1 = \frac{4}{5}ma_3^2(1 - \varepsilon)\frac{\delta^2}{1 + \delta^2}, \quad B_3 = \frac{2}{5}ma_3^2(1 - \varepsilon)\delta^2$$

Таким образом,

$$p = \frac{12\delta^2 + \varepsilon(5\delta^4 + 13\delta^2 + 20)}{2\delta^2(1 + \delta^2)(3 + 2\varepsilon)}$$

и если $\delta^2 < 1$ (эллипсоид вытянут вдоль оси симметрии), то $p > 1$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ (т.е. при любом отношении массы оболочки к массе всей системы). Если же $\delta^2 > 1$, то $p \geq 1$ при $\varepsilon \geq \varepsilon_1$, причем $p \geq 3/4$ при $\varepsilon \geq \varepsilon_2$, где

$$\varepsilon_1 = \frac{6\delta^2(\delta^2 - 1)}{(\delta^2 + 4)(\delta^2 + 5)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{3\delta^2(3\delta^2 - 5)}{4\delta^4 + 5\delta^2 + 10}$$

(очевидно, $\varepsilon_2 < 0$, если $\delta^2 < 5/3$).

Следовательно, если полость вытянута вдоль оси симметрии ($a_1 < a_3$), то при любом отношении массы оболочки к массе всей системы бифуркационная диаграмма (БД) имеет вид, указанный на фигуре *a*. Если же полость сжата вдоль оси симметрии ($a_1 > a_3$), то вид БД зависит и от степени сжатости, и от отношения массы оболочки к массе всей системы: если полость не очень сильно сжата вдоль оси симметрии ($1 < a_1/a_3 < \sqrt{5/3}$), то БД имеет вид, указанный на фигуре *a* при $\varepsilon > \varepsilon_1$ (оболочка достаточно тяжелая) или на фигуре *b* при $\varepsilon < \varepsilon_1$ (оболочка достаточно легкая); если же полость сильно сжата вдоль оси симметрии ($a_1/a_3 > \sqrt{5/3}$), то БД имеет вид, указанный на фигуре *a* при $\varepsilon > \varepsilon_1$, на фигуре *b* при $\varepsilon \in (\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ или на фигуре *b* при $\varepsilon < \varepsilon_2$.

В частности, для почти невесомой оболочки ($\varepsilon = +0$) БД имеет вид *a*, *b* или *b* при $\delta^2 < 1$, $1 < \delta^2 < 5/3$ или $\delta^2 > 5/3$ соответственно. Если же жидкость очень легкая ($\varepsilon = 1 - 0$), то БД имеет вид *a*, *b* или *b* при $\delta^2 < 4$, $4 < \delta^2 < 8$ или $\delta^2 > 8$ соответственно.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00398 и 03-01-00190) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (А0097).

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. Досаев М.З., Самсонов В.А. Об устойчивости вращения тяжелого тела с вязким наполнителем // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 427–433.
3. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М.: Наука, 1991. 330 с.
4. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
5. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.