

УДК 531.36

© 2004 г. Н. В. Дерендяев, И. Н. Солдатов

**УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ  
РОТОРНОЙ СИСТЕМЫ С ЖИДКОСТЬЮ  
В РАМКАХ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ**

Предлагается дискретная модель роторной системы с жидкостью. Модель содержит вращающийся диск, прямо симметрично посаженный на оси, расположенной в изотропном вязкоупругом закреплении, и кольцо, скользящее с трением по диску. Центры диска и кольца вязкоупруго соединены. Диск моделирует ротор, кольцо – жидкую массу заполнения. При скольжении кольца по диску возникает сила взаимодействия, направленная под углом к относительной скорости. Показано, что при правильном подборе параметров модель позволяет приближенно определить область устойчивости режима стационарного вращения в плоскости параметров вязкоупругого закрепления оси. Установлено, что при выходе из области устойчивости происходит бифуркация Андронова – Хопфа и от режима стационарного вращения рождается (“мягко” или “жестко”) периодическое движение типа круговой прецессии.

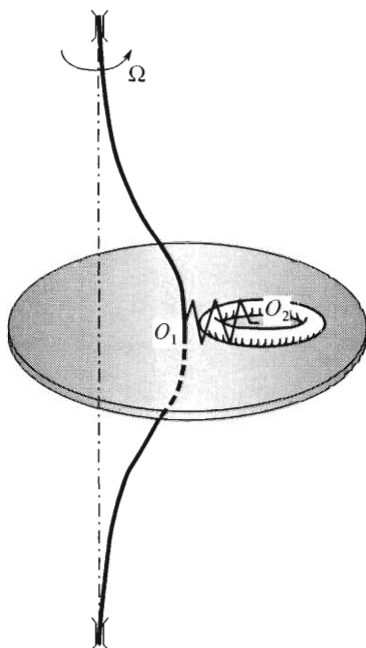
Математические модели роторных систем с жидкостью, включающие в себя уравнения Навье–Стокса, достаточно сложны для анализа устойчивости [1]. Исследовалась [2] устойчивость ротора, частично заполненного жидкостью, при условии постоянства угловой скорости вращения и были построены границы областей с различной степенью неустойчивости в пространстве параметров задачи. Трудности исследования распределенных моделей побуждают к анализу возможности построения дискретных моделей [3], которые могли бы с удовлетворительной точностью описать некоторые важные особенности поведения роторных систем, содержащих жидкость.

В реальных системах с течением времени могут происходить малые изменения параметров, и эта эволюция параметров может привести к тому, что система выйдет на границу области устойчивости. Если при этом возникло сколь угодно малое нарушение “опасной” границы, то система перейдет в новое состояние, которое не может быть приближено к исходному выбором нарушения границы достаточно малым (определения “безопасных” и “опасных” границ см. [4, 5]). Таким образом, исследование устойчивости было бы желательным дополнить исследованием характера границ, что, как показано ниже, достаточно просто сделать для дискретной модели.

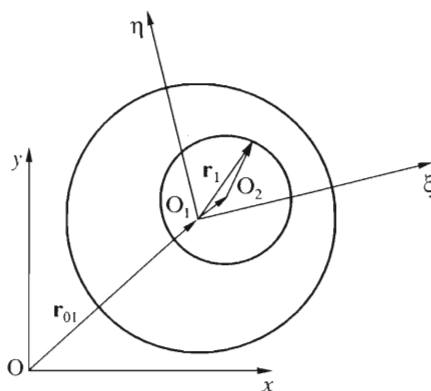
**1. Дискретная модель.** Диск массы  $m_d$  радиуса  $R_d$ , находящийся в нелинейном вязкоупругом закреплении на валу  $AA'$  (фиг. 1), вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  в горизонтальной плоскости. К центру диска прикреплено кольцо массой  $m_r$  радиуса  $R_r$ . Примем, что угловые перемещения осей диска и кольца пренебрежимо малы и все точки системы могут перемещаться лишь в горизонтальной плоскости – плоскости, перпендикулярной оси стационарного вращения. Введем в плоскости движения диска и кольца две системы координат: неподвижную  $Oxy$ , начало которой связано с осью стационарного вращения и подвижную  $O_1\xi\eta$ , совмещенную с центром диска (фиг. 2). Центр кольца будем обозначать  $O_2$ .

Действующая на диск со стороны нелинейных вязкоупругих закреплений сила имеет вид

$$f_d = -(k_d + k_{2d}|r_{01}|^\alpha)r_{01} - (\eta_d + \eta_{2d}|\dot{r}_{01}|^\beta)\dot{r}_{01}, \quad 0 < \alpha, \beta < 2 \tag{1.1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где  $\mathbf{r}_{01} = x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y$  – радиус-вектор из начала неподвижной системы координат в точку  $O_1$ . Между диском и кольцом действуют также силы упругости и трения

$$\mathbf{f}_r = -k_r(\mathbf{r}_{02} - \mathbf{r}_{01}) - \eta_r \int (\mathbf{v}_r - \mathbf{v}_d) dl \tag{1.2}$$

где

$$\mathbf{v}_r - \mathbf{v}_d = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1 - (y - y_2)\dot{\phi}_2 + (y - y_1)\dot{\phi}_1)\mathbf{e}_x + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1 + (x - x_2)\dot{\phi}_2 - (x - x_1)\dot{\phi}_1)\mathbf{e}_y$$

$\mathbf{v}_d = \dot{\mathbf{r}}_{01} + [\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{r}_1]$  – скорость точки  $M(x, y)$  диска относительно неподвижной системы координат  $Oxy$ ,  $\mathbf{r}_1 = (x - x_1)\mathbf{e}_x + (y - y_1)\mathbf{e}_y$  – радиус-вектор из точки  $O_1$  в точку  $M$ ,  $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\phi}_1 \mathbf{e}_z$  – угловая скорость вращения диска,  $\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{r}}_{02} + [\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{r}_2]$  – скорость точки кольца, соприкасающейся с точкой  $M$  диска,  $\mathbf{r}_{02} = x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x - x_2)\mathbf{e}_x + (y - y_2)\mathbf{e}_y$  – радиус-вектор из точки  $O$  в точку  $O_2$ ,  $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\phi}_2 \mathbf{e}_z$  – угловая скорость вращения кольца.

Выражения для потенциальной и кинетической энергий диска (индекс  $d$ ) и кольца (индекс  $r$ ) имеют вид

$$U_d = \frac{k_d}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{k_{2d}}{\alpha + 2}(x_1^2 + y_1^2)^{(\alpha + 2)/2}, \quad T_d = \frac{m_d}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}I_d\dot{\phi}_1^2 \tag{1.3}$$

$$U_r = \frac{k_r}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2], \quad T_r = \frac{m_r}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}I_r\dot{\phi}_2^2 \tag{1.4}$$

где  $I_d, I_r$  – центральные осевые моменты инерции диска и кольца. Выражения (1.3), (1.4) позволяют составить функцию Лагранжа  $L = T - U$ .

Обобщенные силы, приложенные к системе в различных условиях движения, опишем с помощью работы этих сил

$$\delta A = \sum_{n=1}^6 Q_n \delta q_n$$

С другой стороны, выражение для работы может быть записано в виде

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2; \quad \delta A_1 = \mathbf{f}_{fr1} \delta \mathbf{r}_{01}, \quad \delta A_2 = \int d\mathbf{f}_{fr2} \delta \mathbf{r}_{rel}$$

где  $\mathbf{f}_{fr1}$  – сила трения, возникающая при движении диска (второе слагаемое в выражении (1.1)),  $\mathbf{f}_{fr2}$  – сила трения между диском и кольцом (второе слагаемое в (1.2)). После подстановки в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_i} - \frac{dL}{dq_i} = Q_i$$

выражения для функции Лагранжа  $L = T - U$ , полученного с использованием соотношений (1.3) и (1.4), опуская промежуточные выкладки, имеем

$$\begin{aligned} m_d \ddot{x}_1 + k_d x_1 + k_r(x_1 - x_2) + k_{2d}(x_1^2 + y_1^2)^{1/2} x_1 &= \\ = \eta_r l_r [(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)\dot{\phi}_1] - \eta_d \dot{x}_1 - \eta_{2d}(x_1^2 + y_1^2)^{1/2} \dot{x}_1 & \\ m_d \ddot{y}_1 + k_d y_1 + k_r(y_1 - y_2) + k_{2d}(x_1^2 + y_1^2)^{1/2} y_1 &= \\ = \eta_r l_r [(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - (x_2 - x_1)\dot{\phi}_1] - \eta_d \dot{y}_1 - \eta_{2d}(x_1^2 + y_1^2)^{1/2} \dot{y}_1 & \quad (1.5) \\ m_r \ddot{x}_2 + k_r(x_2 - x_1) &= -\eta_r l_r [(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)\dot{\phi}_1] \\ m_r \ddot{y}_2 + k_r(y_2 - y_1) &= -\eta_r l_r [(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + (x_2 - x_1)\dot{\phi}_1] \\ I_d \ddot{\phi}_1 &= -\eta_r l_r R_r^2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) + M_{dr} \\ I_d \ddot{\phi}_2 &= -\eta_r l_r R_r^2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \end{aligned}$$

где  $l_r = 2\pi R_r$ ,  $M_{dr}$  – момент, создаваемый приводом.

Система уравнений (1.5) имеет стационарное решение

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad \dot{\phi}_1 = \Omega, \quad \dot{\phi}_2 = \Omega \quad (1.6)$$

Линеаризуя систему (1.5) в окрестности стационарного решения (1.6) в предположении, что специальным приводом угловая скорость вращения диска поддерживается постоянной и равной  $\Omega$ , и вводя комплексные переменные

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (1.7)$$

получим систему

$$\begin{aligned} m_d \ddot{z}_1 + k_d z_1 + k_r(z_1 - z_2) &= \eta_r l_r [(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - i(z_2 - z_1)\Omega] - \eta_d \dot{z}_1 \\ m_r \ddot{z}_2 + k_r(z_2 - z_1) &= -\eta_r l_r [(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - i(z_2 - z_1)\Omega] \\ I_r \ddot{\psi}_2 &= -\eta_r l_r R_r^2 \dot{\psi}_2 \quad (\psi_2 = \dot{\phi}_2 - \Omega) \end{aligned} \quad (1.8)$$

последнее уравнение которой, имеющее решение вида

$$\psi_2 = C \exp(-\eta_r l_r R_r^2 l_r^{-1} t)$$

отделяется от первых двух.

Уравнения системы (1.8) инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени и поворота системы координат вокруг вертикальной оси на угол  $\pi/2$ . В силу свойства симметрии система допускает частные решения

$$z_1 = \hat{z}_1 \exp(\lambda t), \quad z_2 = \hat{z}_2 \exp(\lambda t) \tag{1.9}$$

Величины  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \lambda$  удовлетворяют уравнениям, которые после введения переменных

$$w_1 = \hat{z}_1, \quad w_2 = \hat{z}_2 - \hat{z}_1$$

несколько упрощаются и сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} m_d w_1 \lambda^2 + k_d w_1 - k_r w_2 &= \eta_r l_r [w_2 \lambda - i w_2 \Omega] - \eta_d w_1 \lambda \\ m_r w_2 \lambda^2 + m_r w_1 \lambda^2 + k_r w_2 &= -\eta_r l_r [w_2 \lambda - i w_2 \Omega] \end{aligned} \tag{1.10}$$

Характеристическое уравнение полученной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} m_d \lambda^2 + \eta_d \lambda + k_d & -\eta_r l_r \lambda - k_r + i \eta_r l_r \Omega \\ m_r \lambda^2 & m_r \lambda^2 + \eta_r l_r \lambda + k_r - i \eta_r l_r \Omega \end{vmatrix} = 0 \tag{1.11}$$

Так как  $\lambda$  непрерывно зависит от параметров задачи, изменение степени неустойчивости системы происходит при появлении мнимого числа  $\lambda = i\omega$ .

Определим значения коэффициентов демпфирования  $\eta_d$  и жесткости закрепления  $k_d$  оси диска, которые при фиксированных остальных параметрах обеспечивают мнимые значения  $\lambda$ . После подстановки выражений  $\lambda = i\omega$  и  $\eta_r = \sigma + i\chi$  в уравнение (1.11) и разделения действительных и мнимых частей получаем линейную систему двух уравнений относительно  $k_d, \eta_d$ . Решая эту систему и вводя безразмерные переменные и параметры

$$K_d = \frac{k_d}{m_d \Omega^2}, \quad H_d = \frac{\eta_d}{m_d \Omega}, \quad \Pi_1 = \frac{\sigma l_r}{m_r \Omega}, \quad \Pi_2 = \frac{\chi l_r}{m_r \Omega}, \quad \tau = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \mu = \frac{m_d}{m_d + m_r}, \quad K_r = \frac{k_r}{m_r \Omega^2} \tag{1.12}$$

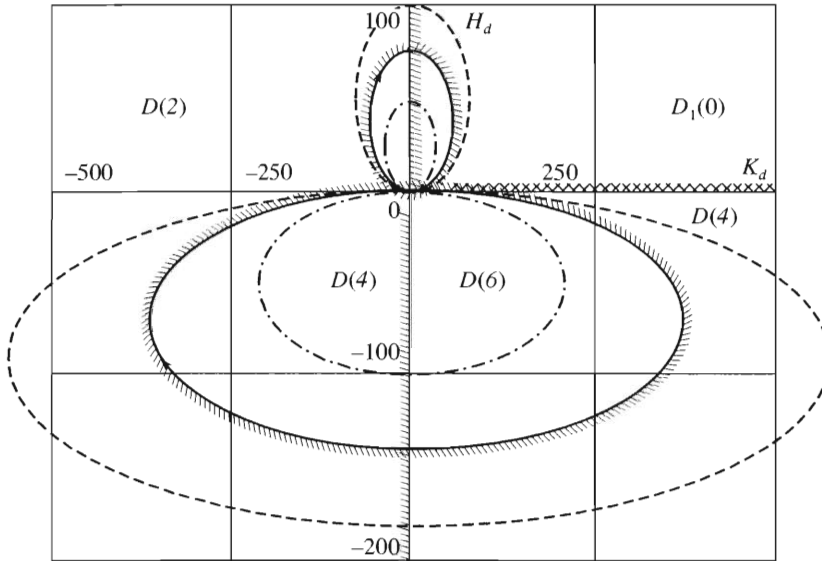
имеем

$$\begin{aligned} K_d &= \frac{\tau^2}{\mu \Delta} \{ [K_r - \Pi_2(\tau - 1) - \tau^2] [K_r - \Pi_2(\tau - 1) - \mu \tau^2] + \Pi_1^2 (\tau - 1)^2 \} \\ H_d &= -\frac{\tau^3 (\tau - 1) (1 - \mu) \Pi_1}{\mu \Delta} \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$\Delta = [\tau^2 + \Pi_2(\tau - 1) - K_r]^2 + \Pi_1^2 (\tau - 1)^2$$

Соотношения (1.13) при фиксированных параметрах  $\Pi_1, \Pi_2, \mu, K_r$  и изменяющемся  $\tau$  определяют в плоскости параметров закрепления  $K_d, H_d$  кривую, которая вместе с особой прямой  $K_d = 0$  формирует так называемое  $D$ -разбиение [6] указанной плоскости на области с различной степенью неустойчивости.



Фиг. 3

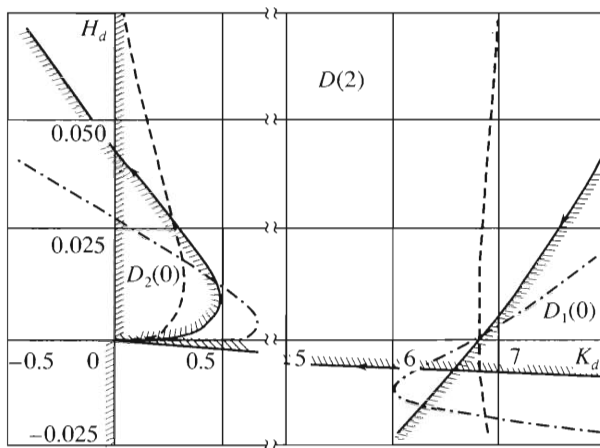
На фиг. 3 показано  $D$ -разбиение (сплошная кривая со штрихами) плоскости  $K_d H_d$  при следующих значениях:  $\Pi_1 = 0.069$ ,  $\Pi_2 = -4.2$ ,  $\mu = 0.373$ ,  $K_r = 1.204$ .

Штриховка границ  $D$ -разбиения осуществляется следующим образом: переход через границу области  $D(n)$  с незаштрихованной стороны на заштрихованную соответствует увеличению порядка неустойчивости на два, т. е. переход в область  $D(n+2)$ . Область устойчивости обозначается как  $D(0)$ . Направление возрастания параметра  $\tau$  показано стрелкой. При стремлении частоты прецессии к бесконечности ( $\tau \rightarrow \pm\infty$ ) параметры закрепления  $H_d \rightarrow -(\mu^{-1} - 1)\Pi_1$ ,  $K_d \rightarrow +\infty$ . Заметим, что при выбранном масштабе фиг. 3 пологие ветви  $D$ -кривой (верхняя и нижняя, соответствующие  $-\infty < \tau < 0$  и  $7.9 < \tau < \infty$ ) практически сливаются с осью абсцисс и штриховка одной ветви накладывается на другую. При выборе физических интересных значений параметров существуют две области устойчивости. Одна область устойчивости, а именно  $D_1(0)$ , содержит точку, соответствующую достаточно большим положительным значениям коэффициента демпфирования  $H_d$ .

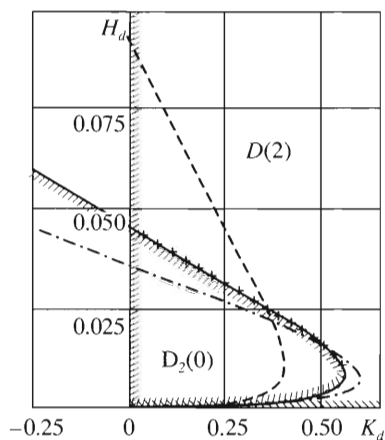
Для демонстрации влияния изменения параметра  $\Pi_2$  на размеры областей с различной степенью неустойчивости на фиг. 3 построены  $D$ -кривые при  $\Pi_2 = -3.5$  (штриховая кривая) и  $\Pi_2 = -4.8$  (штрихпунктир).

Наиболее интересна, с практической точки зрения, область устойчивости  $D_2(0)$ , располагающаяся в окрестности нулевых значений параметров закрепления оси вращающегося диска (см. фиг. 4, где представлено  $D$ -разбиение вблизи начала координат для  $\Pi_1 = 0.028$ ,  $\Pi_2 = -4.2$ ,  $\mu = 0.373$ ,  $K_r = 1.4$ ). На фиг. 4 также приведены кривые  $D$ -разбиений для случаев  $\Pi_2 = -3$  (штриховая кривая) и  $\Pi_2 = -6$  (штрихпунктирная кривая) при неизменных остальных параметрах. Как видно из графика, уменьшение  $\Pi_2$  приводит к вытягиванию области  $D_2(0)$  вдоль оси ординат, одновременно немного сужая ее вдоль оси абсцисс. Вся же фигура с увеличением  $\Pi_2$  уменьшается.

На фиг. 5 демонстрируется влияние изменения параметра  $K_r$  при  $\Pi_1 = 0.028$ ,  $\Pi_2 = -4.2$ ,  $\mu = 0.373$ . Штриховая кривая соответствует значению  $K_r = 2.0$ , а штрихпунктирная – значению  $K_r = 0.95$ . С увеличением  $K_r$  увеличивается вдоль оси ординат область устойчивости  $D_2(0)$  и несколько расширяется область  $D_1(0)$  за счет приближе-



Фиг. 4



Фиг. 5

ния ее границы к оси ординат. Отметим, что основная  $D$ -кривая с ростом  $\tau$  после пересечения оси ординат при  $K_r > 1$  отклоняется вверх и формирует петлю в верхней полуплоскости, а при  $K_r < 1$  отклоняется вниз, образуя петлю преимущественно в нижней полуплоскости.

**2. Ротор, частично заполненный жидкостью.** Устойчивость ротора, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, угловая скорость которого поддерживается постоянной специальным приводом, была рассмотрена ранее [2]. Полость ротора имеет форму высокого цилиндра. Влияние силы тяжести не учитывается в силу больших угловых скоростей вращения. Ось ротора находится в вязкоупругих закреплениях, причем угловыми перемещениями оси можно пренебречь и считать, что все частицы ротора могут совершать только плоскопараллельные перемещения. При построении  $D$ -разбиения использован подход, при котором не требуется знание характеристического уравнения в явном виде.

Решение линеаризованной задачи плоскопараллельного движения жидкости при круговой прецессии ротора [2] после небольших преобразований может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 u &= \left[ c_1 + \frac{c_2}{r^2} + i \frac{Z_1(kr)}{r} \right] e^{i\varphi} + \text{с.с.} \\
 v &= \left[ ic_1 - \frac{ic_2}{r^2} - kZ_0(kr) + \frac{Z_1(kr)}{r} \right] e^{i\varphi} + \text{с.с.} \\
 \frac{p}{\rho} &= \left[ i(2\Omega - \omega_0)c_1 r + i(2\Omega + \omega) \frac{c_2}{r} + \frac{\omega^2 r}{2} - 2\Omega Z_1(kr) \right] e^{i\varphi} + \text{с.с.}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

где  $u$ ,  $v$  – радиальная и азимутальная компоненты скорости движения частиц жидкости,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\Omega$  – абсолютная угловая скорость ротора,  $\omega$  – угловая скорость прецессии,  $Z_n(kr) = c_3 H_n^{(2)}(kr) + c_4 H_n^{(1)}(kr)$ ,  $H_n^{(1),(2)}(kr)$  – функция Ганкеля  $n$ -го порядка,  $k = \kappa(i - \omega_0/|\omega_0|)$ ,  $\kappa = \sqrt{|\omega_0|/2\nu}$ ,  $\omega_0 = \Omega - \omega$  – угловая скорость собственного вращения ротора,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости.

Перейдем к безразмерным переменным

$$K_1 = \frac{k_1}{m_1 \Omega^2}, \quad H_1 = \frac{\eta_1}{m_1 \Omega}, \quad \tau = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad E = \frac{v}{\Omega a^2}$$

$$C_1 = \frac{c_1}{\Omega}, \quad C_2 = \frac{c_2}{a^2 \Omega}, \quad C_3 = \frac{c_3 H_0^{(2)}(ka)}{a \Omega}, \quad C_4 = \frac{c_4 H_0^{(1)}(kb)}{a \Omega}$$

где  $m_1$  – масса ротора,  $m_2$  – масса заполняющей жидкости,  $K_1, H_1$  – соответственно безразмерные коэффициенты упругости и демпфирования закреплений оси ротора,  $a$  – радиус цилиндрической полости ротора,  $b$  – внутренний радиус цилиндрического слоя жидкости в режиме стационарного вращения,  $E$  – безразмерное число Экмана. Постоянные  $C_1, \dots, C_4$  определяются из граничных условий на свободной поверхности и внутренней стенке ротора после подстановки в них решения (2.1)

$$C_1 + C_2 + i h_{1a} C_3 + i g_{1a} C_4 = 0$$

$$C_1 - C_2 + i(ka - h_{1a}) C_3 + i(kag_{0a} - g_{1a}) C_4 = 0$$

$$4\delta^{-2} C_2 - i[2kbh_{0b} + (k^2 b^2 - 4)\delta^{-1} h_{1b}] C_3 - i[2kb + (k^2 b^2 - 4)\delta^{-1} g_{1b}] C_4 = 0 \quad (2.2)$$

$$-i \frac{\tau^2}{1-\tau} C_1 + i \delta^{-2} [1 - \tau - f(\tau)] C_2 +$$

$$+ \delta^{-1} \left[ -\frac{2(1-\tau)}{kb} h_{0b} + f(\tau) h_{1b} \right] C_3 + \delta^{-1} \left[ -\frac{2(1-\tau)}{kb} + f(\tau) g_{1b} \right] C_4 = -\frac{1}{2} \tau^2 \Omega$$

где

$$h_{jb} = \frac{H_j^{(2)}(kb)}{H_0^{(2)}(ka)}, \quad g_{ja} = \frac{H_j^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(kb)}, \quad j = 0, 1; \quad h_{1a} = \frac{H_1^{(2)}(ka)}{H_0^{(2)}(ka)}, \quad g_{1b} = \frac{H_1^{(1)}(kb)}{H_0^{(1)}(kb)}$$

$$\delta = \frac{b}{a}, \quad f(\tau) = \frac{2\tau - 1}{1 - \tau} + \frac{4(1 - \tau)}{k^2 b^2}$$

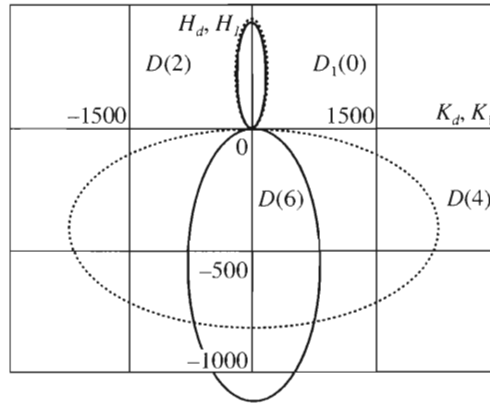
После интегрирования напряжений, приложенных к внутренней поверхности цилиндрической полости ротора, получаются выражения для компонент безразмерной гидродинамической силы, действующих на единицу длины полости,

$$F_\xi = \frac{1}{1 - \delta^2} \operatorname{Re} \left( 1 + 4i \frac{1 - \tau}{\tau^2} C_2 \right), \quad F_\eta = -\frac{4}{1 - \delta} \frac{1 - \tau}{\tau^2} \operatorname{Re} C_2 \quad (2.3)$$

Подставляя выражения для сил (2.3) в уравнения поступательного движения ротора, получим соотношения, связывающие параметр  $\tau$  и определяющие параметры задачи в случае круговой прецессии,

$$\frac{\mu}{1 - \mu} (-\tau^2 + K_1) = F_\xi \tau^2, \quad \frac{\mu}{1 - \mu} H_1 \tau = F_\eta \tau^2 \quad (2.4)$$

Зависимость гидродинамической силы от частоты прецессии имеет четко выраженный резонансный характер, что обусловлено резонансным возбуждением волн,



Фиг. 6

распространяющихся по свободной поверхности жидкости. Резонансные частоты могут быть приближенно определены из равенства

$$\tau_{1,2} = (1 + \delta^2)^{-1} (2 \pm \sqrt{2(1 - \delta^2)}).$$

Пример  $D$ -разбиения приведен ранее [2].

**3. Выбор параметров дискретной модели.** Основная  $D$ -кривая дискретной модели пересекает ось абсцисс  $K_d = 0$  в начале координат  $K_d = 0$  и в точке  $A$  при  $K_d = (\mu^{-1}K_r - 1)/(K_r - 1)$ . Найдем точки пересечения с осью ординат  $K_d = 0$ , когда параметр  $\Pi_1$  мал и им можно пренебречь. Точкам пересечения соответствуют следующие значения параметра  $\tau$ :

$$\tau_{1,4} = \frac{1}{2\mu}(-\Pi_2 \mp \sqrt{\Pi_2^2 + 4\mu\Pi_2 + 4\mu K_r}), \quad \tau_{2,3} = -\frac{1}{2}\Pi_2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{\Pi_2^2 + 4\Pi_2 + 4K_r}$$

Прежде всего, представляет интерес точка  $B$  пересечения с осью ординат  $K_d = 0$  основной кривой, наиболее близкая к оси абсцисс, поскольку именно эта точка связана с наиболее интересной областью устойчивости, примыкающей к началу координат в плоскости  $K_d, H_d$ . Ордината точки  $B$  соответствует значению  $\tau = \tau_1$ .

Основная  $D$ -кривая в континуальной модели при  $\mu = 0.37313$ ,  $E = 10^{-6}$ ,  $\delta = 0.9$  пересекает ось абсцисс в точке  $K_1 = 11.664$ , а ось ординат – в точке  $H_1 = 0.05289$  (сплошная кривая на фиг. 6, штриховка не нанесена). Требуя совпадения точек пересечения осей и максимально близкого расположения правой границы области  $D_2(0)$  при  $\mu = 0.37313$  в дискретной и континуальной моделях, получаем, что в дискретной модели следует взять  $K_r = 1.187$ ,  $\Pi_1 = 0.77$ ,  $\Pi_2 = -6.5$ . При таком выборе параметров те части  $D$ -кривых континуальной и дискретной моделей, которые вблизи начала координат формируют правую границу области  $D_2(0)$  на плоскости  $K_1, H_1$ , проходят близко друг к другу и в масштабе фиг. 5 неразличимы. В то же время в целом фигуры, образуемые  $D$ -кривыми, различаются, как это показывает фиг. 6 (штриховая кривая соответствует дискретной модели). Подбором параметров дискретной модели можно добиться значительно большего общего сходства двух кривых, но при этом теряется точность аппроксимации границы области  $D_2(0)$ .

**4. “Безопасные” и “опасные” границы области устойчивости.** Важный вопрос о поведении роторной системы при значениях параметров, близких к границе области устойчивости (ГОУ), связан с рождением из состояния равновесия типа фокус предельного цикла (или стягиванием цикла к состоянию равновесия). Покажем, что в рассматриваемой конечномерной модели ротора, угловая скорость которого поддерживается постоянной, с нелинейными вязкоупругими закреплениями оси при выходе из области устойчивости происходит бифуркация Андронова – Хопфа (см. [4, 5, 7–10]).

После простых преобразований первых четырех уравнений системы (1.5) получим

$$\begin{aligned} m_d \ddot{z}_1 + k_d z_1 - k_r (z_2 - z_1) + k_{2d} |z_1|^\alpha z_1 &= \\ = \eta_r l_r [(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - i(z_2 - z_1)\Omega] - \eta_d \dot{z}_1 - \eta_{2d} |\dot{z}_1|^\beta \dot{z}_1 & \quad (4.1) \\ m_r \ddot{z}_2 + k_r (z_2 - z_1) &= -\eta_r l_r [(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - i(z_2 - z_1)\Omega] \end{aligned}$$

где  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Решение системы (4.1) будем искать в виде круговой прецессии

$$z_1 = \varepsilon_1 \exp(i\omega t), \quad z_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \exp(i\omega t) \quad (4.2)$$

После подстановки выражений (4.2) в систему (4.1) приходим к системе нелинейных уравнений относительно  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\omega$ , которая после перехода к безразмерным переменным и параметрам (см. также (1.12))

$$E_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_d}, \quad E_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_d}, \quad K_{2d} = \frac{k_{2d} R_d^\alpha}{m_d \Omega^2}, \quad H_{2d} = \frac{\eta_{2d} R_r^\beta \Omega^{\beta-1}}{m_d}$$

может быть записана в виде

$$\begin{aligned} (-\tau^2 + iH_d \tau + K_d) E_1 + (\mu^{-1} - 1) \zeta(\tau) E_2 &= -K_{2d} |E_1|^\alpha E_1 - iH_{2d} |E_1|^\beta |\tau|^\beta \tau E_1 \\ \tau^2 E_1 + [\tau^2 + \zeta(\tau)] E_2 &= 0; \quad \zeta(\tau) = (\tau - 1)(\Pi_2 - i\Pi_1) - K_r \end{aligned} \quad (4.3)$$

Заметим, что на ГОУ на плоскости параметров закрепления выполняется условие

$$\mathbf{A} \mathbf{E} = 0 \quad (4.4)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -\tau^2 + iH_d \tau + K_d & (\mu^{-1} - 1) \zeta(\tau) \\ -\tau^2 & -\tau^2 - \zeta(\tau) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \end{vmatrix}; \quad \det \mathbf{A} = 0$$

Обозначим через  $\delta K_d$ ,  $\delta H_d$ ,  $\delta \tau$  отклонения от безразмерных параметров упругости  $K_d$ , вязкости  $H_d$  закреплений и частоты прецессии  $\tau$ , соответствующих ГОУ. При малой величине отклонений  $\delta K_d$ ,  $\delta H_d$  для  $\delta \tau$  и  $|E_1|$  после разделения действительных и мнимых частей из системы (4.3) получаем уравнения

$$\begin{aligned} K_{2d} |E_1|^\alpha - \frac{dK_d(\tau)}{d\tau} \delta \tau &= -\delta K_d \\ H_{2d} |\tau E_1|^\beta - \frac{dH_d(\tau)}{d\tau} \delta \tau &= -\delta H_d \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для случая  $\alpha = \beta$  из системы (4.5) следует

$$|E_1|^\alpha = \frac{l_2 \delta K_d - l_1 \delta H_d}{l_1 H_{2d} |\tau|^\alpha - l_2 K_{2d}}; \quad l_1 = \frac{dK_d(\tau)}{d\tau}, \quad l_2 = \frac{dH_d(\tau)}{d\tau} \quad (4.6)$$

где  $l_1, l_2$  – компоненты касательного вектора  $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$  к ГОУ. Малые приращения  $\delta K_d$ ,  $\delta H_d$  выбираются такими, чтобы вектор  $\mathbf{n} = (\delta K_d, \delta H_d)$  был перпендикулярен ГОУ. Если условиться выбирать приращения  $\delta K_d$ ,  $\delta H_d$  так, чтобы вектор  $\mathbf{n}$  был направлен внутрь области устойчивости  $D_2(0)$ , то формулу (4.6) можно переписать в виде

$$|E_1|^\alpha = l_2^{-1} \left( K_{2d} - \frac{dK_d}{dH_d} H_{2d} |\tau|^\alpha \right)^{-1} \|[\mathbf{l}, \mathbf{n}]\| \quad (4.7)$$

где  $||\mathbf{l}, \mathbf{n}||$  – модуль векторного произведения. Поскольку  $l_2 > 0$  на ГОУ  $D_2(0)$ , знак правой части равенства (4.7) определяется выражением в круглых скобках.

Если при выходе из области устойчивости через какой-то участок ее границы происходит рождение периодического движения, то такую бифуркацию называют закрытой. Возбуждение автоколебаний при переходе через такой участок происходит мягко, и поэтому подобные участки ГОУ принято называть “безопасными”. На фиг. 5 “безопасные” участки отмечены светлыми точками, “опасные” участки – крестиками. В окрестности “опасных” участков периодическое движение в виде круговой прецессии малого радиуса существует в области устойчивости режима стационарного вращения. Это означает, что при приближении к такому участку из области устойчивости система становится неустойчивой по отношению к возмущениям малой, но конечной величины. Как видно из формулы (4.7), теоретически любой участок ГОУ можно сделать “безопасным”, подбирая величины  $K_{2d}$ ,  $H_{2d}$  (если, конечно, удастся найти материалы с подходящими нелинейными свойствами). Так, при  $K_{2d} < 0$  (т.е. в случае так называемой мягкой или регрессирующей упругой нелинейности) и  $H_{2d} = 0$  вся ГОУ  $D_2(0)$  “безопасна”. Заметим, что  $dK_d/dH_d > 0$  на нижней части ГОУ до самой правой точки графика (обозначим ее через  $C$ ), а на части ГОУ, находящейся выше точки  $C$ ,  $dK_d/dH_d < 0$ . Положительные значения  $H_{2d}$  при мягкой упругой нелинейности не влияют на характер нижней части ГОУ (до точки  $C$ ), а верхнюю часть могут частично или полностью превратить в “опасную” при определенных значениях  $H_{2d}$ . Этот случай показан на фиг. 5. При  $\mu = 0.373$ ,  $K_r = 1.204$ ,  $\Pi_1 = 0.069$ ,  $\Pi_2 = -4.2$  и  $\alpha = 1$  “опасный” участок на верхней части границы появляется при  $K_{2d} > -18H_{2d}$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00478, 03-02-16924).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. Дерендяев Н.В., Сандалов В.М. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 578–586.
3. Досаев М.З., Самсонов В.А. Об устойчивости вращения тяжелого тела с вязким наполнителем // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 427–433.
4. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
5. Баутин Н.Н., Шильников Л.П. Дополнение в книге Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С. 295–316.
6. Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем Л.: ЛКВВИА, 1949. 141с.
7. Дерендяев Н.В. Бифуркация Андронова – Хопфа в динамике роторной системы, содержащей жидкость // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 4. С. 798–801.
8. Андронова А.А., Леонтонович Е.А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Учен. зап. Горьк. ун-та. 1939. Вып. 6. С. 3–24; см. также: Андронова А.А. Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 188–216.
9. Андронова А.А., Любина А.Г. Применение теории Пуанкаре о “точках бифуркации” и “смене устойчивостей” к простейшим автоколебательным системам // ЖЭТФ. 1935. Т. 5. Вып. 3–4. С. 296–309.
10. Hopf E. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines differential Systems // Ber. Math.-Phys. / Sächsische Akademie der Wissenschaften Leipzig. 1942. B. 94. S. 3–22.