УДК 531.36

© 2004 г. С. В. Чайкин

УСТОЙЧИВОСТЬ СЕМЕЙСТВА НЕТРИВИАЛЬНЫХ РАВНОВЕСНЫХ ОРИЕНТАЦИЙ НА ПРИТЯГИВАЮЩИЙ ЦЕНТР ГИРОСТАТА С УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

Рассматривается в ограниченной постановке движение по кеплеровой круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил системы, состоящей из гиростата и упругого стержня. Гиростат рассматривается как твердое тело, в котором имеется вращающийся динамически и статически уравновешенный маховик. Однородный, прямолинейный в недеформированном состоянии упругий стержень жестко закреплен одним концом в корпусе гиростата. Ось недеформированного стержня произвольно расположена в главной центральной плоскости инерции гиростата. Относительные перемещения точек системы в результате малой деформации ее упругого звена представляются в виде бесконечного ряда разложения (без его априорного усечения) по заданной системе функций, зависящих от пространственных координат, с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени. Ориентация системы на притягивающий центр определяется указанием расположения относительно связанной системы координат ортов нормали к плоскости орбиты и радиус-вектора или трансверсали орбиты в центре масс системы, указанные пары ортов располагаются при этом в главной центральной плоскости инерции гиростата, содержащей ось недеформированного стержня. Для выделенных таким образом двух однопараметрических семейств одноосных ориентаций системы на притягивающий центр определяются деформации стержня, естественно зависящие от ориентации, и гиростатический момент, обеспечивающий равновесие выбранной ориентации (нетривиального равновесия, так как при этом стержень, вообще говоря, деформирован) и ее устойчивость в смысле Ляпунова.

Задачу изучения стационарных движений гиростата [1, 2], рассматриваемого здесь как твердое тело с расположенным в нем вращающимся, уравновешенным статически и динамически маховиком, принято разделять на прямую и обратную. В прямой постановке (задача анализа) требуется найти стационарные движения (в частности равновесия) при заданном гиростатическом моменте системы, в обратной постановке (задача синтеза) разыскивается гиростатический момент, обеспечивающий выбранное стационарное движение системы.

Для гиростата на круговой кеплеровой орбите в прямой постановке известно аналитическое решение задачи лишь для случая расположения вектора гиростатического момента системы в какой-либо ее главной центральной плоскости, см. например [3]. В общем случае расположения маховика имеются результаты, основанные на численных расчетах (см., например, [4, 5]), но далее в обсуждениях опускается этот важный и обширный класс исследований задачи. В обратной постановке задачи результаты более обильны [5–8]. В последней работе, в частности, приведена принятая классификация относительных равновесий гиростата на круговой орбите. Следует заметить, что решение задачи о возможности за счет выбора гиростатического момента системы обеспечить относительное равновесие, при котором произвольно заданная ось, фиксированная в базовом теле гиростата, совпадает с произвольным образом определенной осью, фиксированной относительно орбитальной системы координат, удается свести к отысканию вещественного корня соответствующего алгебраического уравнения четвертого порядка, но условия, связывающие параметры системы и гарантирующие наличие такого решения, в литературе не приводились.

Исследования, опубликованные по указанным вопросам для гиростата с упругим элементом, малочисленны и касаются тривиальных равновесий системы, при которых ее упругий элемент не деформирован (см., например, [9]).

1. Постановка задачи. Интегралы движения. Рассмотрим в ограниченной постановке [10] движение по кеплеровой круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил механической системы, состоящей из гиростата и упругого стержня. Гиростат рассматривается как твердое тело, в котором имеется вращающийся динамически и статически уравновешенный маховик. Однородный, прямолинейный в недеформированном состоянии упругий стержень жестко закреплен одним концом в корпусе гиростата. Ось недеформированного стержня произвольно расположена в главной центральной плоскости инерции гиростата. При движении системы ее мгновенный центр масс перемещается по кеплеровой круговой орбите вокруг притягивающего центра, а стержень совершает малые пространственные изгибные колебания.

Цель работы – показать наличие у системы нетривиальных семейств относительных равновесий второго и третьего класса [8] и указать условия их устойчивости по Ляпунову.

Для описания движения вводятся только правые прямоугольные декартовы системы координат. Вводится система координат Oy_k ($k = 1, 2, 3$) с полюсом O в мгновенном центре масс системы и ортами осей $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ соответственно; орт $\boldsymbol{\beta}$ направлен по нормали к плоскости орбиты, $\boldsymbol{\gamma}$ – по радиус-вектору мгновенного центра масс относительно притягивающего центра. Постоянный вектор угловой скорости вращения орбитальной системы координат относительно инерциального пространства $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{\beta}$, $\omega > 0$; R – радиус круговой орбиты движения центра масс O, L – характерный размер системы, m – ее масса. Система координат O_1x_k с ортами осей $\mathbf{i}_k$ ($k = 1, 2, 3$) жестко связана с корпусом гиростата; O_1 – центр масс недеформированной системы, а оси координат совмещены с главными центральными осями гиростата. $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор угловой скорости трехгранника O_1x_k относительно Oy_k.

Пусть в плоскости $O_1x_2x_3$ располагается прямолинейная в недеформированном состоянии ось упругого стержня, для простоты, постоянного кругового сечения и единичной длины, ρ – погонная масса стержня, a – расстояние от точки O_1 до точки защемления стержня, а параметр $s \in [0, 1]$ определяет точку на оси стержня. Считаем, что в процессе движения стержень подвергается малым пространственным изгибным деформациям в соответствии с гипотезами Кирхгофа: сечения стержня не деформируются, пренебрегается их кручением и изменением нормали поперечного сечения относительно нормали этого же сечения в недеформированном положении стержня.

Точки гиростата занимают ограниченную область υ_1, а точки недеформированного упругого звена – ограниченную область υ_2, Γ – общая граница областей, $\dim\Gamma \neq 0$, $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$ [11].

Для описания деформаций упругого звена системы используем локальную систему координат с ортами $\{\mathbf{f}_k\}$, орт $\mathbf{f}_3$ располагается вдоль оси недеформированного стержня, проходящей через точку O_1, и направлен от нее. Радиус-вектор произвольной точки стержня, определяемой до деформации относительно точки O_1 вектором $\mathbf{r}$, после деформации будет определяться относительно мгновенного центра масс системы O выражением $(\mathbf{r} + \mathbf{u}(t, s) - \mathbf{r}_0)$, где $\mathbf{u}(t, s)$ – вектор упругого перемещения точек оси стержня, $\mathbf{r}_0 = m^{-1}\int_0^1\rho\mathbf{u}(t, s)ds$, – радиус-вектор точки O относительно точки O_1. Далее будем пренебрегать величиной $\mathbf{r}_0$, т.е. считать, что точки O_1 и O совпадают.

Сформулируем используемые в работе предположения.

1°. Вектор упругого перемещения оси стержня представим следующим образом:

$$\mathbf{u}(t,s) = \sum_{p=0}^{\infty}(q_p^{(1)}\chi_p^{(1)}(s)\mathbf{f}_1 + q_p^{(2)}\chi_p^{(2)}(s)\mathbf{f}_2) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{q}_n(t)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n(s) \tag{1.1}$$

где

$$\tilde{q}_{2p+i}(t) = q_p^{(i)}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{2p+i}(s) = \chi_p^{(i)}(s)\mathbf{f}_i; \quad p = 0, 1, \ldots; \quad i = 1, 2$$

Заметим, что обобщенные координаты $\tilde{q}_{2k-1}(t)$ определяют упругие перемещения вдоль оси $\mathbf{f}_1$, а $\tilde{q}_{2k}(t)$ – вдоль оси $\mathbf{f}_2$ ($k = 1, 2, \ldots$), лежащей в плоскости $O_1x_2x_3$. Функции параметра s, удовлетворяющие соответствующим краевым условиям (один конец стержня жестко закреплен, другой свободен) представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\chi_{n-1}(s) &= \chi_{n-1}^{(1)}(s) = \chi_{n-1}^{(2)}(s) = ((\operatorname{sh}\beta_n + \sin\beta_n)(\operatorname{ch}\beta_n s - \cos\beta_n s) - \\ &- (\operatorname{ch}\beta_n + \cos\beta_n)(\operatorname{sh}\beta_n s - \sin\beta_n s))/(\sin\beta_n\operatorname{ch}\beta_n - \cos\beta_n\operatorname{sh}\beta_n)\end{aligned} \tag{1.2}$$

Величины β_n ($n = 1, 2, \ldots$) – корни уравнения $\cos\beta\operatorname{ch}\beta + 1 = 0$, при этом нормировка функций такова, что

$$\int_0^1 \rho\chi_n(s)\chi_p(s)ds = M_n\delta_{np}, \quad M_n = 1$$

2°. Потенциальная энергия малых упругих деформаций определяется выражением

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{n,p=1}^{\infty}\tilde{c}_{np}\tilde{q}_n\tilde{q}_p, \quad \tilde{c}_{np} = \Lambda_n^2 M_n\delta_{np}, \quad \Lambda_n^2 = \frac{EI\beta_n^4}{\rho} \tag{1.3}$$

где $\Lambda_n(M_n)$ – частота (приведенная масса), соответствующая форме $\chi_{n-1}(s)$, EI – жесткость стержня на изгиб, очевидно, что $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \ldots$; также естественно полагать, что потенциальная энергия упругих деформаций остается ограниченной. Если ввести новые переменные $q_n(t) \equiv (\tilde{c}_{nn})^{1/2}\tilde{q}_n(t)$ и соответственно $\boldsymbol{\varphi}_n(s) \equiv (\tilde{c}_{nn})^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n(s)$, то из ограниченности энергии заключаем, что $q(t) \equiv (q_1, q_2, \ldots)$ принадлежит гильбертову пространству l_2 бесконечных последовательностей, ограниченных по норме

$$\|q\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|q_n|^2\right)^{1/2}$$

Следует отметить, что $\Lambda_1 > 1$ и, как было показано [14], $\{\Lambda_n^{-1}\} \in l_1$, и, стало быть, $\{\Lambda_n^{-2}\} \in l_2$.

3°. Пренебрегая величинами порядка $(L/R)^3$ и выше, примем приближенное выражение для потенциальной энергии гравитационных сил

$$\Pi_g = -\frac{\mu m}{R} + \frac{1}{2}\omega^2(3\boldsymbol{\gamma}\mathbf{J}\boldsymbol{\gamma} - \operatorname{tr}\mathbf{J}) \tag{1.4}$$

Здесь μ – произведение гравитационной постоянной на массу притягивающего центра, $\mathbf{J}$ – тензор инерции системы относительно мгновенного центра масс.

В соответствии с представлением (1.1)

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) \equiv \int\limits_{\upsilon}((\mathbf{r}+\mathbf{u})^2 E - (\mathbf{r}+\mathbf{u}) : (\mathbf{r}+\mathbf{u}))dm = \\ = \mathbf{J}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\mathbf{J}_n + \sum_{n,\,p=1}^{\infty} q_n q_p \mathbf{J}_{np} \tag{1.5}$$

где $\mathbf{J}_0$ – тензор инерции недеформированной системы относительно точки O, E – единичная матрица размера 3×3, двоеточие означает диадное произведение векторов. Матрицы компонентов тензоров $\mathbf{J}_0$, $\mathbf{J}_n$, $\mathbf{J}_{np}$ приведем в локальной системе координат $\{\mathbf{f}_k\}$:

$$[\mathbf{J}_0]_F = \begin{Vmatrix} J_0^{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_0^{22} & J_0^{23} \\ 0 & J_0^{23} & J_0^{33} \end{Vmatrix}, \quad [\mathbf{J}_{2k}]_F = j_k \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_{2k-1}]_F = j_k \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad [\mathbf{J}_{2k-1,\,2k-1}]_F = j_{kk} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

$$[\mathbf{J}_{2k,\,2k-1}]_F = [\mathbf{J}_{2k-1,\,2k}] = j_{kk} \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$j_k \equiv \int\limits_0^l \rho(a+s)\varphi_k ds, \quad j_{kk} \equiv \int\limits_0^l \rho\varphi_k^2 ds, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Считаем, что главные оси инерции гиростата без стержня относительно точки O_1 при повороте на угол Δ вокруг оси O_1x_1 переходят соответственно в оси с ортами $\{\mathbf{f}_i\}$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда

$$J_0^{11} = I_1^K + I_C, \quad J_0^{22} = I_2^K + (I_3^K - I_2^K)\sin^2\Delta, \quad J_0^{12} = J_0^{13} = 0 \\ J_0^{23} = (I_3^K - I_2^K)\sin\Delta\cos\Delta, \quad J_0^{33} = I_3^K + I_C^3 - (I_3^K - I_2^K)\sin^2\Delta \tag{1.7}$$

$I_C \equiv \int\limits_0^l \rho\,(a+s)^2 ds$ и I_C^3 – момент инерции недеформированного стержня относительно оси O_1x_1 и его собственной недеформированной оси соответственно, при этом величины I_j^K – моменты инерции корпуса относительно оси O_1x_j ($j = 1, 2, 3$). Заметим, что все другие матрицы компонентов $[\mathbf{J}_{2k-1,\,p}]_F$ и $[\mathbf{J}_{2k,\,p}]_F$ – нулевые вследствие свойств функций $\{\chi_n\}$ ($k, p, n = 1, 2, \ldots$).

4°. Центральный эллипсоид инерции гиростата и всей недеформированной системы не является эллипсоидом вращения; аналогичные предположения использовались ранее [12–15].

Известно (см., например, [9]), что уравнения движения, различные методы получения которых для сложных механических систем обсуждались ранее [15], допускают в рассматриваемом здесь случае кроме интегралов направляющих косинусов U_i ($i = 1, 2, 3$) интеграл типа Якоби U. Имеем

$$U_1 \equiv \boldsymbol{\gamma\gamma} - 1 = 0, \quad U_2 \equiv \boldsymbol{\beta\beta} - 1 = 0, \quad U_3 \equiv \boldsymbol{\gamma\beta} = 0$$
$$U \equiv T_r + \Pi + \Pi_g - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{k} = \text{const} \tag{1.8}$$

Здесь $\mathbf{k}$ – постоянный гиростатический момент системы, кинетическая энергия определяется выражением

$$T_r \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{G} + \frac{1}{2}\sum_{n,\, m\, =\, 1}^{\infty} a_{nm}\dot{q}_n\dot{q}_m$$

где $a_{nm} = \int_0^1 \rho\, \boldsymbol{\varphi}_n\boldsymbol{\varphi}_m ds$, а вектор кинетического момента относительно точки O имеет вид

$$\mathbf{G} \equiv \int_{v_2} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \dot{\mathbf{u}} dm = \sum_{n\, =\, 1}^{\infty} \mathbf{G}_n\dot{q}_n + \sum_{n,\, p\, =\, 1}^{\infty} \dot{q}_n q_p \mathbf{G}_{np}$$

Выражения для $\mathbf{G}_n$ и $\mathbf{G}_{np}$, как и уравнения движения системы относительно ее мгновенного центра масс O, здесь не приводятся (см., например, [15]). Точкой обозначена частная производная по времени.

2. Семейства равновесий. Для нахождения относительных равновесий системы и исследования их устойчивости воспользуемся теоремой Рауса – Ляпунова [16, 11, 14], укладывающейся в рамки прямого метода Ляпунова [17–19]. Введем в рассмотрение функционалы V и V_1 по формулам

$$V_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, q, \lambda, \sigma, \nu) = \left(\Pi + \Pi_g - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{k}\boldsymbol{\omega}\right) + 3\omega^2\lambda U_3 + \frac{1}{2}\omega^2\nu U_2 - \frac{3}{2}\omega^2\sigma U_1$$
$$V(\boldsymbol{\Omega}, \dot{q}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, q, \lambda, \sigma, \nu) = T_r + V_1$$

где λ, σ, ν – неопределенные множители Лагранжа, величина в скобках в правой части выражения для V_1 носит название измененной потенциальной энергии. Производная по времени функционала V – связки интегралов движения равна нулю.

Пусть переменные с крышкой определяют некоторое невозмущенное движение системы (относительное равновесие при $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = 0$, $\hat{q}^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$), малые возмущения соответствующих величин будем обозначать через $\delta\boldsymbol{\Omega}$, $\delta\dot{q} \equiv (\delta\dot{q}_1, \delta\dot{q}_2, \ldots)^T$, $\delta q = (\delta q_1, \delta q_2, \ldots)^T$, $\delta\boldsymbol{\gamma}$, $\delta\boldsymbol{\beta}$. В малой окрестности невозмущенного движения

$$W \equiv W(*) - V(0) = \delta V(0) + \delta^2 V(0) + Q(0)$$

где $V(*)$ и другие величины с аргументом $(*)$ – значение функционала V и других величин на возмущенном движении; $V(0)$, $\delta V(0)$, $\delta^2 V(0)$ и др. – значение функционала V, его первой и второй вариации и др., вычисленное на невозмущенном движении системы, $Q(0)$ – функционал, содержащий величины не ниже третьей степени относительно возмущений. Если невозмущенное движение системы представляет собой относительное равновесие, а именно равновесия будем рассматривать ниже, то можно записать следующее равенство:

$$W \equiv V(*) - V(0) = T_r(*) + V_1(*) - T_r(0) - V_1(0) = T_r(*) + \delta V_1(0) + \delta^2 V_1(0) + Q(0) \tag{2.1}$$

При соответствующих условиях [11] (в случае гиростата с упругим стержнем, например при $\dot{q}(t) \in l_2$, $q(t) \in l_2$, $\{\Lambda_n^{-1}\} \in l_2$, и ортонормированной системы функций $\{\chi_n\}$ [14]) можно показать, что

$$\exists c_T > 0 : T_r > c_T\left(\mathbf{\Omega\Omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^2\right)$$

Уравнения для отыскания относительных равновесий системы и неопределенных множителей Лагранжа, которые выписываются из условия $\delta V(0) = 0$ ($\delta V(0) = \delta V_1(0)$ при $\hat{\mathbf{\Omega}} = 0$, $\hat{q}^{\cdot} = 0$), могут быть записаны следующим образом:

$$(\mathbf{J}(\hat{q}) - \sigma E)\hat{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0 \Leftrightarrow \sigma = \hat{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{J}(\hat{\mathbf{q}})\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \lambda = -\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\gamma}} = 0 \tag{2.2}$$

$$(\nu E - \mathbf{J}(\hat{q}))\hat{\boldsymbol{\beta}} + 3\lambda\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\eta} = 0 \Leftrightarrow \nu = \hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\eta}, \ \hat{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}} = -\boldsymbol{\eta}\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \ \hat{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}} = -\boldsymbol{\eta}\hat{\boldsymbol{\gamma}}/4 \tag{2.3}$$

$$\hat{q}_n + \omega^2(3\hat{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{J}'_n(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \mathrm{tr}\mathbf{J}'_n(\hat{q}) - \hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{J}'_n(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}})/2 = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Здесь использованы обозначения

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \omega^{-1}\mathbf{k}, \quad \mathbf{J}'_n = \mathbf{J}_n + 2\sum_{p=1}^{\infty} \hat{q}_p\mathbf{J}_{np}$$

Прямыми вычислениями с использованием выражений (1.6) и свойств системы функций $\{\chi_n(s)\}$ находим, что уравнения (2.2)–(2.4) допускают два однопараметрических семейства решений – относительных равновесий гиростата с упругим стержнем, определяющие соответствующие нетривиальные одноосные равновесные ориентации системы на притягивающий центр.

Первое семейство (равновесия второго класса в соответствии с известной классификацией [3, 8]) характеризуются тем, что на притягивающий центр направлена прямая, лежащая в плоскости Ox_2x_3 и составляющая угол Θ_1 (параметр семейства) с ортом $\mathbf{f}_3$. В проекциях на оси $\{\mathbf{f}_k\}$ это семейство определяется следующими уравнениями ($k = 1, 2, \ldots$):

$$\begin{gathered}\hat{\alpha}_1 = \pm 1, \quad \hat{\alpha}_2 = 0, \quad \hat{\alpha}_3 = 0; \quad \hat{\beta}_1 = 0, \quad \hat{\beta}_2 = \cos\Theta_1, \quad \hat{\beta}_3 = \sin\Theta_1 \\ \hat{\gamma}_1 = 0, \quad \hat{\gamma}_2 = -\hat{\alpha}_1\sin\Theta_1, \quad \hat{\gamma}_3 = \hat{\alpha}_1\cos\Theta_1\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\hat{q}_{2k-1} = 0, \quad \hat{q}_{2k} = \frac{\omega^2\sin\Theta_1\cos\Theta_1}{2[1 + \omega^2\Lambda_k^{-2}(1 - 4\sin^2\Theta_1)]\Lambda_k}\int_0^1 \rho(a+s)\chi_k ds \tag{2.6}$$

Заметим, что знаменатель дроби не обращается в нуль из-за малости ω и $\Lambda_k > 1$, а $\{\hat{q}_{2k}\} \in l_2$ если $\{\Lambda_k^{-1}\} \in l_2$. Действительно, с учетом свойств Λ_k и $\{\chi_k\}$ из равенств (2.6) выводим простые оценки

$$|\hat{q}_{2k}| < \frac{\omega^2}{2(1 - 3\omega^2\Lambda_1^{-2})\Lambda_k}\left(\int_0^1 \rho(a+s)^2 ds\right)^{1/2}\left(\int_0^1 \rho\chi_k^2 ds\right)^{1/2} = \frac{\omega^2\Lambda_1^2}{2(\Lambda_1^2 - 3\omega^2)\Lambda_k} I_C^{1/2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{q}_{2k}^2 < \left(\frac{\omega^2\Lambda_1^2}{2(\Lambda_1^2 - 3\omega^2)}\right)^2 I_c \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^2$$

Полагаем здесь, что выполнено условие, налагаемое на низшую частоту: $\Lambda_1^2 > 3\omega^2$, которое часто приводится в работах по исследованию устойчивости сложных механических систем [9].

Для данного семейства равновесий матрица компонентов тензора инерции системы имеет вид

$$[\mathbf{J}(\hat{q})]_F = (J_{ij}^F(\hat{q})) = \begin{Vmatrix} J_0^{11} + \sum_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_0^{22} & J_0^{23} - \sum_2 \\ 0 & J_0^{23} - \sum_2 & J_0^{33} + \sum_1 \end{Vmatrix} \tag{2.7}$$

где

$$\sum\nolimits_1 \equiv \sum_k \hat{q}_{2k}^2 j_{kk}, \quad \sum\nolimits_2 \equiv \sum_k \hat{q}_{2k}^2 j_k$$

Очевидно, просто определяются оси с ортами $\{\mathbf{e}_k\}$, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1$, в которых матрица $[\mathbf{J}(\hat{q})]_E = (J_{ii}^E)$ диагональна. При этом компоненты векторов $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, естественно, надо пересчитать с помощью соответствующей матрицы перехода.

Неопределенные множители Лагранжа в соответствии с формулами (2.2) выражаются в виде

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= \hat{\alpha}_1(J_{22}^F - J_{33}^F)\sin\Theta_1\cos\Theta_1 - \hat{\alpha}_1 J_{23}^F(\cos^2\Theta_1 - \sin^2\Theta_1) \\ \sigma(0) &= J_{22}^F\sin^2\Theta_1 - 2J_{23}^F\sin\Theta_1\cos\Theta_1 + J_{33}^F\cos^2\Theta_1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

При этом, как типично и для обратной задачи о равновесии гиростата без упругого элемента, параметр ν остается неопределенным, поскольку не зафиксирован пока гиростатический момент, а точнее, его проекция на нормаль к плоскости орбиты, см. (2.3). Ниже воспользуемся выбором ν для обеспечения устойчивости равновесий гиростата с упругим стержнем.

Компоненты вектора гиростатического момента $\mathbf{k}$ в осях $\{\mathbf{f}_k\}$ для реализации равновесий (2.5), (2.6) с учетом выражений (2.8) должны определяться следующими равенствами, полученными из уравнений (2.3):

$$\begin{aligned} &k_1 = 0, \quad \omega^{-1}k_2 = (\nu - J_{22}^F(\hat{q}))\cos\Theta_1 - (3\lambda\hat{\alpha}_1 + J_{23}^F(\hat{q}))\sin\Theta_1 \\ &\omega^{-1}k_3 = (3\lambda\hat{\alpha}_1 - J_{23}^F(\hat{q}))\cos\Theta_1 + (\nu - J_{33}^F(\hat{q}))\sin\Theta_1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Второе однопараметрическое семейство (равновесия третьего класса в соответствии с известной классификацией [3, 8]) характеризуется тем, что на притягивающий центр (или от него) направлена ось Ox_1, при этом нормаль к плоскости орбиты составляет угол Θ_2 (параметр семейства) с ортом $\mathbf{f}_2$. Это семейство равновесий в осях $\{\mathbf{f}_k\}$ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} &\hat{\gamma}_1 = \pm 1, \quad \hat{\gamma}_2 = 0, \quad \hat{\gamma}_3 = 0; \quad \hat{\beta}_1 = 0, \quad \hat{\beta}_2 = \cos\Theta_2, \quad \hat{\beta}_3 = \sin\Theta_2 \\ &\hat{\alpha}_1 = 0, \quad \hat{\alpha}_2 = \hat{\gamma}_1\sin\Theta_2, \quad \hat{\alpha}_3 = -\hat{\gamma}_1\cos\Theta_2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\hat{q}_{2k-1} = 0, \quad \hat{q}_{2k} = -\frac{\omega^2\sin\Theta_2\cos\Theta_2}{[1 + \omega^2\Lambda_k^{-2}(2 + \cos^2\Theta_2)]\Lambda_k}\int_0^1 \rho(a+s)\chi_k ds; \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

Компоненты тензора инерции системы относительно осей $\{\mathbf{f}_k\}$ будут по-прежнему даваться формулой (2.7), но с учетом уравнений (2.10), (2.11). Неопределенные множители Лагранжа в этом случае имеют вид

$$\lambda(0) = 0, \quad \sigma(0) = J_{11}^F(\hat{q}) \tag{2.12}$$

Относительно множителя ν, определяемого в соответствии с равенствами (2.3), (2.10)–(2.12), справедливы заключения, аналогичные приведенным выше. Компоненты вектора гиростатического момента системы в осях $\{\mathbf{f}_k\}$, обеспечивающего равновесия (2.10), (2.11), задаются равенствами, вытекающими из выражений (2.3):

$$\begin{aligned} &k_1 = 0, \quad \omega^{-1}k_2 = (\nu - J_{22}^F(\hat{q}))\cos\Theta_2 - J_{23}^F(\hat{q})\sin\Theta_2 \\ &\omega^{-1}k_3 = -J_{23}^F(\hat{q})\cos\Theta_2 + (\nu - J_{33}^F(\hat{q}))\sin\Theta_2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Для значений (2.11) справедливы оценки

$$|\hat{q}_{2k}| < \frac{\omega^2}{\Lambda_k}\left|\int_0^1 \rho(a+s)\chi_k ds\right| < \frac{\omega^2}{\Lambda_k} I_C^{1/2} < \frac{\omega^2}{\Lambda_1} I_C^{1/2}$$

$$\sum_k \hat{q}_{2k}^2 < \omega^4 I_C \sum_k \Lambda_k^{-2}$$

3. Устойчивость семейств равновесий. Условия устойчивости найденных семейств равновесий системы в соответствии с теоремой Рауса – Ляпунова и методом нахождения минимума функционала W будут получены как условия определенной положительности второй вариации функционала V_1 (см. (2.1)), вычисленной на соответствующих равновесиях. Введем величины

$$w_1 \equiv \delta\gamma_1, \quad w_2 \equiv \delta\beta_1, \quad w_3 \equiv \delta\gamma_2, \quad w_4 \equiv \delta\beta_2, \quad w_5 \equiv \delta\gamma_3, \quad w_6 \equiv \delta\beta_3$$

$$w = (w_1, \ldots, w_6), \quad \delta q = (\delta q_1, \ldots, \delta q_n, \ldots)$$

полагаем, что $(w, \delta q) \in l_2$, и представим вторую вариацию следующим образом [14]:

$$\delta^2 V_1(0) = \omega^2 (w, \delta q) \begin{Vmatrix} A & B \\ B^T & C \end{Vmatrix} (w, \delta q)^T$$

где при условии, что соответствующие тензоры и векторы задаются своими компонентами в осях $\{\mathbf{f}_k\}$, матрица $A \equiv (A_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, 6;\ k = 1, 2, 3)$ имеет лишь такие отличные от нуля компоненты:

$$A_{2k-1,2k-1} = 3(J_{kk}^F - \sigma(0)), \quad A_{2k,2k} = (\nu - J_{kk}^F)$$

$$A_{12} = A_{21} = A_{34} = A_{43} = A_{56} = A_{65} = 3\lambda(0)$$

$$A_{35} = 3J_{23}^F = A_{53}, \quad A_{46} = J_{23}^F = A_{64}$$

Матрица B имеет шесть бесконечных строк $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots)$ $(i = 1, \ldots, 6;\ k, p = 1, 2, \ldots)$, элементы которых определяются по формулам (учтено, что $\hat{q}_{2k-1} = 0$)

$$\begin{Vmatrix} b_{1,2k-l} \\ b_{3,2k-l} \\ b_{5,2k-l} \end{Vmatrix} = 3(\mathbf{J}_{2k-l} + \hat{q}_{2k}\mathbf{J}_{2k-l,2k})\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \begin{Vmatrix} b_{2,2k-l} \\ b_{4,2k-l} \\ b_{6,2k-l} \end{Vmatrix} = -(\mathbf{J}_{2k-l} + \hat{q}_{2k}\mathbf{J}_{2k-l,2k})\hat{\boldsymbol{\beta}}; \quad l = 0, 1 \tag{3.1}$$

Матрица C, с которой будем также отождествлять линейный оператор C, определенный на l_2, со значениями, вообще говоря, в пространстве S бесконечных последовательностей, является в данном случае блочно-диагональной (размер блоков 2×2):

$$C = \operatorname{diag}(C_1, C_2, \ldots), \quad C_k = (C_{ij}^k)$$

$$C_{ii}^k = \omega^{-2} + 3\hat{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{J}_{2k-2+i,\,2k-2+i}\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \operatorname{tr}\mathbf{J}_{2k-2+i,\,2k-2+i} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{J}_{2k-2+i,\,2k-2+i}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$C_{12}^k = C_{21}^k = (3\hat{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{J}_{2k-1,\,2k}\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \operatorname{tr}\mathbf{J}_{2k-1,\,2k} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{J}_{2k-1,\,2k}\hat{\boldsymbol{\beta}})/2; \quad i, j = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots$$

Следует также иметь в виду, что на величины w накладываются линейные связи, возникающие из условий $\delta U_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$), а именно

$$\begin{gathered} \delta U_1(0) \equiv \hat{\gamma}_1 w_1 + \hat{\gamma}_2 w_3 + \hat{\gamma}_3 w_5 = 0, \quad \delta U_2(0) \equiv \hat{\beta}_1 w_2 + \hat{\beta}_2 w_4 + \hat{\beta}_3 w_6 = 0 \\ \delta U_3(0) \equiv \hat{\beta}_1 w_1 + \hat{\gamma}_1 w_2 + \hat{\beta}_2 w_3 + \hat{\gamma}_2 w_4 + \hat{\beta}_3 w_5 + \hat{\gamma}_3 w_6 = 0 \end{gathered} \tag{3.2}$$

Элементы матрицы C даются выражениями ($k = 1, 2, \ldots$):

для семейства равновесий (2.5)–(2.9)

$$C_{11}^k = \omega^{-2}, \quad C_{12}^k = C_{21}^k = 0, \quad C_{22}^k = \omega^{-2} + \Lambda_k^{-2}(4\cos^2\Theta_1 - 3)$$

для семейства равновесий (2.10)–(2.13), (2.7)

$$C_{11}^k = \omega^{-2} - 3\Lambda_k^{-2}, \quad C_{12}^k = C_{21}^k = 0, \quad C_{22}^k = \omega^{-2} + \Lambda_k^{-2}\cos^2\Theta_2$$

Из приведенных выражений, очевидно, следует, что условия определенной положительности матрицы C сводятся к условию $\Lambda_1^2 > 3\omega^2$ и можно записать

$$\exists \varepsilon_c > 0 : \Lambda_1^2 > 3\omega^2 + \varepsilon_C, \quad qCq^T > \varepsilon_C\|q\|^2 \Rightarrow \exists C^{-1}, \quad \|C^{-1}\| < \varepsilon_C^{-1} \tag{3.3}$$

Импликация в выражении (3.3) верна в силу известной теоремы анализа об обратном операторе (см., например, [20]). В данном случае можно привести явное представление для C^{-1} (при условии $\Lambda_1^2 > 3\omega^2$) и можно определить $C^{-1/2}$, но в дальнейшем используется только оценка нормы $\|C^{-1}\|$. Теперь при выполнении условий (3.3) справедливо следующее выражение, которое легко проверить непосредственным вычислением при произвольном $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\begin{gathered} \omega^{-2}\delta^2 V_1(0) = w(A - \varepsilon^{-2}BC^{-1}B^T)w^T + (1 - \varepsilon^2)\delta qC\delta q^T + \\ + (\varepsilon^{-2}wBC^{-1} + \delta q)\varepsilon^2 C(\delta q^T + \varepsilon^{-2}C^{-1}B^T w^T) \end{gathered}$$

Видно, что условия определенной положительности $\delta^2 V_1(0)$ можно получить как условия определенной положительности квадратичной формы с матрицей $(A - \varepsilon^{-2}B\, C^{-1}B^T)$ при наличии линейных связей (3.2).

Введем в рассмотрение величины

$$d_{ij} \equiv \varepsilon^{-2} b_i C^{-1} b_j^T = d_i^T d_j, \quad d_i = \varepsilon^{-1} C^{-1/2} b_i^T; \quad i, j = 1, \ldots, 6$$

для которых справедливы оценки

$$|d_{ij}| \le \varepsilon^{-2}\varepsilon_C^{-1}\|b_i\|\|b_j\|$$

С использованием неравенства Коши–Буняковского можно показать, что $\{b_i\} \in l_2$ при $\{\Lambda_n^{-1}\} \in l_2$.

В зависимости от выбора системы координат выражения для d_{ij}, как и для b_i (см. (3.1)), будут меняться. Вообще говоря, система координат (оси $\{\mathbf{e}_k\}$ или $\{\mathbf{f}_k\}$), при использовании которой вычисляются d_{ij}, b_i и др., будет, если это важно отметить, указываться соответствующим индексом, например d_{ij}^F или b_i^E и др. Для параметров семейств равновесий Θ_1 и Θ_2 это соглашение также используется. Заметим, что выражения для элементов матрицы C не меняются от выбора осей, а при использовании осей $\{\mathbf{e}_k\}$ среди элементов матрицы $A = (A_{ij}^E)$ будут, естественно, нулевые: $A_{35}^E = A_{53}^E = 0$, $A_{46}^E = A_{64}^E = 0$, в отличие от значений этих же элементов при использовании осей $\{\mathbf{f}_k\}$ (см. выше).

Опуская громоздкие промежуточные вычисления в соответствии с методом исследования положительной определенности квадратичной формы конечного числа переменных при наличии линейных связей, которые в рассматриваемом случае приводят к требованиям положительности соответствующих определителей седьмого, восьмого и девятого порядков [19, 21] ($\Delta_7(0) > 0$, $\Delta_8(0) > 0$, $\Delta_9(0) > 0$), сформулируем утверждения об устойчивости найденных нетривиальных однопараметрических семейств равновесий.

Утверждение 1. Для того чтобы семейство (2.5)–(2.9) одноосных нетривиальных ориентаций гиростата с упругим стержнем на притягивающий центр было устойчиво, достаточно выполнения следующих условий:

$$\Lambda_1^2 > 3\omega^2, \quad \{\Lambda_n^{-1}\} \in l_2 \tag{3.4}$$

$$J_{11}^E > I_{22}^E \sin^2\Theta_1^E + I_{33}^E \cos^2\Theta_1^E - \frac{1}{3}d_{11}^E \Leftrightarrow 3(J_{11}^E - \sigma) - d_{11}^E > 0 \tag{3.5}$$

$$\nu > J_{33}^E(\hat{\beta}_2^E)^2 + J_{22}^E(\hat{\beta}_3^E)^2 - 3(J_{33}^E - \sigma)(\hat{\gamma}_2^E)^2 - 3(J_{22}^E - \sigma)(\hat{\gamma}_3^E)^2 +$$
$$+ (d_{16}^E\hat{\beta}_2^E + d_{15}^E\hat{\gamma}_2^E - d_{14}^E\hat{\beta}_3^E - d_{13}^E\hat{\gamma}_3^E)^2/(3(J_{11}^E - \sigma) - d_{11}^E) \tag{3.6}$$

$$\nu > \nu_2 \tag{3.7}$$

где ν_2 – больший корень квадратного уравнения относительно ν, полученного из условия $\Delta_9(0) = 0$ (выражение для ν_2 не выписывается из-за громоздкости).

Отметим, что условия (3.5), (3.6) – более жесткие по сравнению с аналогичными условиями, которые получаются для механической системы, "затвердевшей" в рассматриваемом равновесии, из-за наличия члена $d_{11} \geq 0$ и соответственно из-за наличия неотрицательного последнего слагаемого в неравенстве (3.6). Условие (3.5), не зависящее от параметра $\nu \equiv \hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{J}(0)\hat{\boldsymbol{\beta}} + \omega^{-1}\mathbf{k}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, заведомо не выполняется, если для рассматриваемой равновесной ориентации $J_{11}^E = \min\limits_k J_{kk}^E$, т.е. если эллипсоид инерции системы в равновесии большей осью направлен по касательной к орбите. Однако этому условию можно удовлетворить за счет подходящего выбора моментов инерции гиростата. Действительно, на основании формул (2.6)–(2.8), с использованием неравенства Коши–Буняковского и оценки для d_{11}, показывается справедливость следующей цепочки неравенств:

$$3(J_{11}^E - \sigma) - d_{11}^E > 0 \Rightarrow J_{11}^F - J_{22}^F\sin\Theta_1 + 2J_{23}^F\sin\Theta_1\cos\Theta_1 - J_{33}^F\cos^2\Theta_1 - d_{11}^F/3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (I_1^K - I_2^K)\sin^2\Theta_1 + (I_1^K - I_3^K)\cos^2\Theta_1 + (I_3^K - I_2^K)\sin\Delta\sin(\Delta + 2\Theta_1) +$$

$$+ (\int\rho(a+s)^2 ds)\cos^2\Theta_1 + \sin^2\Theta_1\left(\sum_k \hat{q}_{2k}^2 \int\rho\varphi_k^2 ds\right) -$$

$$- \sin 2\Theta_1\left(\sum_k \hat{q}_{2k}\int\rho(a+s)\varphi_k ds\right) - d_{11}^F/3 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow (I_1^K - I_2^K)\sin^2\Theta_1 + (I_1^K - I_3^K)\cos^2\Theta_1 + (I_3^K - I_2^K)\sin\Delta\sin(\Delta + 2\Theta_1) -$$

$$- \sum_k \hat{q}_{2k}^2 - \int\rho(a+s)^2 ds \sum_k \int\rho\varphi_k^2 ds - d_{11}^F/3 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow (I_1^K - I_l^K) - (I_l^K - I_m^K) - \sum_k \hat{q}_{2k}^2 - I_C\sum_k \Lambda_k^{-2} - 3\varepsilon^2\varepsilon_C^{-1}\Lambda_1^{-4}\sum_k \hat{q}_{2k}^2 > 0$$

В последнем неравенстве считаем, что $I_1^K > I_l^K > I_m^K$, $l, m = 2, 3$; $l \neq m$, а при учете оценки для $\sum \hat{q}_{2k}^2$ заключаем, что оно и, стало быть, неравенство (3.5) выполнятся, если

$$I_1^K - I_l^K > I_l^K - I_m^K + \left((1 + 3\varepsilon^{-2}\varepsilon_C^{-1})\left(\frac{\omega^2\Lambda_1^2}{2(\Lambda_1^2 - 3\omega^2)}\right)^2 + 1\right) I_C \sum_k \Lambda_k^{-2} \tag{3.8}$$

Отсюда видно, что для выполнения условия (3.5) достаточно, чтобы разность между большим и средним моментами инерции гиростата была больше разности между его средним и меньшим моментом инерции на величину, определяемую вторым слагаемым в правой части неравенства (3.8). Эта величина зависит от геометрических, массовых и жесткостных характеристик упругого стержня. Если учесть неравенство $I_1^K < I_l^K + I_m^K$, то из выражения (3.8) следует, что и меньший момент инерции гиростата I_m^K также больше разности между его средним и меньшим моментами инерции на ту же величину.

Можно показать, что условие (3.5) выполняется при $J_{11}^E = \operatorname{mid}_i J_{ii}^E$, если вектор $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ таков, что вектор $\mathbf{J}^{1/2}\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ лежит в “глубине" области между круговыми сечениями центрального гирационного эллипсоида (построенного для рассматриваемого равновесия системы), содержащими его меньшую ось ($J_{11}^E \neq J_{22}^E \neq J_{33}^E$). В "глубине" означает, что длина вектора $\mathbf{J}^{1/2}\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, конец которого находится на поверхности указанного эллипсоида, меньше величины ($J_{11}^E - d_{11}^E/3$), которая, очевидно, должна быть больше J_{ii}^E. Гирационный эллипсоид системы является взаимным к ее эллипсоиду инерции [22]. Здесь и далее

$$J_{11}^E = \operatorname{mid}_i J_{ii}^E \Leftrightarrow J_{ll}^E < J_{11}^E < J_{kk}^E (\{l, k\} = \{2, 3\}, l \neq k)$$

Утверждение 2. Семейство (2.10) – (2.13), (2.7) одноосных нетривиальных ориентаций гиростата с упругим стержнем на притягивающий центр будет устойчиво, если

$$\Lambda_1^2 > 3\omega^2, \quad \{\Lambda_n^{-1}\} \in l_2 \tag{3.9}$$

$$\upsilon \equiv 3(J_{33}^E - \sigma)(\hat{\alpha}_3^E)^2 + 3(J_{22}^E - \sigma)(\hat{\alpha}_2^E)^2 - (d_5^E\hat{\alpha}_3^E - d_3^E\hat{\alpha}_2^E)^2 > 0, \quad \sigma = J_{11}^E \tag{3.10}$$

$$\nu > J_{33}^E(\hat{\alpha}_3^E)^2 + J_{22}^E(\hat{\alpha}_2^E)^2 + (d_4^E\hat{\beta}_3^E + d_6^E\hat{\beta}_2^E)^2 +$$
$$+ (d_{56}^E\hat{\alpha}_3^E\hat{\beta}_2^E - d_{34}^E\hat{\alpha}_2^E\hat{\beta}_3^E - d_{45}^E\hat{\alpha}_3^E\hat{\beta}_3^E + d_{36}^E\hat{\alpha}_2^E\hat{\beta}_2^E)^2/\upsilon \tag{3.11}$$

$$\nu > \nu_2 \tag{3.12}$$

где ν_2 – больший корень квадратного уравнения относительно ν, полученного из соответствующего условия $\Delta_9(0) = 0$.

Относительно наличия вещественных корней $\nu_1 \le \nu_2$ уравнения $\Delta_9(0) = 0$ справедливы рассуждения, аналогичные приведенным ранее ([19], с. 271) и основанные на методах теории бифуркаций. Условия (3.10), (3.11) жестче аналогичных условий, которые могут быть получены для гиростата без упругого элемента, эквивалентного по своим инерционным характеристикам рассматриваемой системе, "отвердевшей" в соответствующем равновесии. Очевидно, неравенство (3.10) не выполняется, если $J_{11}^E = \max\limits_i J_{ii}^E$, т.е. когда по радиусу-вектору орбиты (вдоль орта $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$) расположена меньшая ось центрального эллипсоида инерции системы, построенного для рассматриваемого равновесия. Условию (3.10) можно удовлетворить при $J_{11}^E = \operatorname{mid}\limits_i J_{ii}^E$ если $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ таков, что вектор $\mathbf{J}^{1/2}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, конец которого расположен на поверхности центрального гирационного эллипсоида системы в рассматриваемом равновесии, лежит в "глубине" области между круговыми сечениями, содержащей большую ось упомянутого эллипсоида. В данном случае в "глубине" означает, что длина вектора $\mathbf{J}^{1/2}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ больше величины $J_{11}^E + (d_5^E\hat{\alpha}_3^E - d_3^E\hat{\alpha}_2^E)/3$, которая, в свою очередь, должна быть меньше $\max\limits_i J_{ii}^E$, иначе условие (3.10) не выполняется ни при каких значениях $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$.

Проводя рассуждения, аналогичные выполненным выше при получении выражения (3.8), можно показать, что условие (3.10) удовлетворяется независимо от значения параметра семейства Θ_2 и деформаций стержня при соответствующем выборе моментов инерции гиростата.

Автор благодарит В.В. Белецкого за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00898).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gramme R.* Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen. Heidelberg: Springer, 1950 = *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применение. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 352 с.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения гиростатов // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 9–16.
3. *Longman R.W.* Gravity-gradient stabilization of gyrostat satellites with rofor axes in principal planes // Celest. Mechanics. 1971. 3. № 2. P. 169–188.
4. *Сарычев В.А., Гутник С.А.* К вопросу о положениях относительного равновесия спутника–гиростата // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 323–326.
5. *Морозов В.М.* Устойчивость движения космических аппаратов // Итоги науки и техники. Общая механика. 1969. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 5–83.

6. *Рубановский В.Н.* О ветвлении и услойчивости относительных равновесий спутника–гиростата // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 565–571.
7. *Pascal M., Stepanov S.Ia.* On a semi-inverse problem in motion of gyrostat satellites // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1991. V. 50. № 2. P. 99–108.
8. *Анчев А.* Равновесни ориентации на спътник с ротори. София: Изд-во на Българска Академия на Науките, 1982. 132 с.
9. *Набиуллин М.К.* Стационарные движения и устойчивость упругих спутников. Новосибирск: Наука, 1990. 217 с.
10. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
11. *Вильке В.Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
12. *Чайкин С.В.* Положение относительного равновесия на круговой орбите упругого спутника и их устойчивость // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 615–623.
13. *Chaikin S.V.* Approximate finding of the nontrivial relative equilibriums of and elastic satellite // Acta Astronaut. 1998. V. 43. № 7–8. P. 355–367.
14. *Chaikin S.V.* Equilibria stability of the satellite as a system with a countable number of degrees of freedom // Acta Astronaut. 2001. V. 48. № 4. P. 193–202.
15. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 231 с.
16. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 276–319.
17. *Румянцев В.В.* Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 916–921.
18. *Рубановский В.Н., Степанов С.Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 904–912.
19. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
20. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 415 с.
21. *Кузьмин П.А.* Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука, 1973. 206 с.
22. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.

Москва
e-mail: schaik@yandex.ru

Поступила в редакцию
17.VII.2003