УДК 531.38

© 2004 г. Е. К. Узбек

О НОВОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Для дифференциальных уравнений Кирхгофа, описывающих движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, рассматриваются условия существования частных решений, для которых компоненты вектора момента количества движения являются суперпозицией линейных и дробно-линейных функций.

Примечательная особенность уравнений класса Кирхгофа [1] состоит в том, что невырожденным линейным преобразованием основных переменных задачи они могут быть преобразованы в уравнения движения заряженного и намагниченного гиростата в ньютоновском, электрическом и магнитном полях. Эта гидродинамическая аналогия для частных случаев указывалась В.А. Стекловым [2] и П.В. Харламовым [3] и в завершенном виде получена в работах [4, 5]. Существует много подходов [6–9] к исследованию свойств интегральных многообразий уравнений Кирхгофа. В силу неинтегрируемости этих уравнений в квадратурах [7] важен подход, основанный на построении частных решений с помощью метода инвариантных соотношений [10].

В данной работе для случая, когда характерные матрицы, входящие в правые части уравнений Кирхгофа, диагональны, а векторы обобщенного центра масс и гиростатического момента направлены по главной оси, построено новое решение этих уравнений. Оно обладает новой структурой вспомогательных инвариантных соотношений, задающих компоненты вектора момента количества движения через компоненты единичного вектора оси симметрии ньютоновского, электрического и магнитных полей.

1. Постановка задачи. Вид решения. Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями класса Кирхгофа [4, 5, 9]

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\times a\mathbf{x} + a\mathbf{x}\times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu} \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times a\mathbf{x} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор момента количества движения гиростата, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата, $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор гиростата, построенный в неподвижной точке, $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\nu}$ означает производную по времени t.

Уравнения (1.1), (1.2) имеют первые интегралы

$$\begin{gathered}\mathbf{x}\cdot a\mathbf{x} - 2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1\\ (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

Пусть матрицы a, B, C имеют диагональную структуру с элементами a_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$), а векторы $\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ направлены по первой главной оси гирационного эллипсоида: $\mathbf{s} = (s_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0)$.

Будем изучать решения уравнений (1.1), (1.2), которые характеризуются тремя инвариантными соотношениями [11, 12]

$$x_1 = \varphi_1(\nu_1), \quad x_2 = \nu_2\varphi_2(\nu_1), \quad x_3 = \nu_3\varphi_3(\nu_1) \tag{1.4}$$

Тогда векторные уравнения (1.1), (1.2) с помощью геометрического интеграла из (1.3) могут быть преобразованы к пяти уравнениям

$$\psi'(\nu_1) = 2\frac{a_1\varphi_1(\nu_1) - a_3\nu_1\varphi_3(\nu_1)}{a_3\varphi_3(\nu_1) - a_2\varphi_2(\nu_1)} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}&(a_3\varphi_3(\nu_1) - a_2\varphi_2(\nu_1))\varphi_1'(\nu_1) = \\ &= (a_3 - a_2)\varphi_2(\nu_1)\varphi_3(\nu_1) + a_2B_3\varphi_2(\nu_1) - a_3B_2\varphi_3(\nu_1) + C_3 - C_2\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}&\psi(\nu_1)(a_3\varphi_3(\nu_1) - a_2\varphi_2(\nu_1))\varphi_2'(\nu_1) = \\ &= \varphi_2(\nu_1)(a_3\nu_1\varphi_3(\nu_1) - a_1\varphi_1(\nu_1)) + (a_1 - a_3)\varphi_1(\nu_1)\varphi_3(\nu_1) - \\ &- a_3\lambda_1\varphi_3(\nu_1) + a_3B_1\nu_1\varphi_3(\nu_1) - a_1B_3\varphi_1(\nu_1) - s_1 + (C_1 - C_3)\nu_1\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}&(1 - \nu_1^2 - \psi(\nu_1))(a_3\varphi_3(\nu_1) - a_2\varphi_2(\nu_1))\varphi_3'(\nu_1) = \\ &= \varphi_3(\nu_1)(a_1\varphi_1(\nu_1) - a_2\nu_1\varphi_2(\nu_1)) + (a_2 - a_1)\varphi_1(\nu_1)\varphi_2(\nu_1) + \\ &+ a_2\lambda_1\varphi_2(\nu_1) - a_2B_1\nu_1\varphi_2(\nu_1) + a_1B_2\varphi_1(\nu_1) + s_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\dot{\nu}_1 = (a_3\varphi_3(\nu_1) - a_2\varphi_2(\nu_1))\sqrt{\psi(\nu_1)(1 - \nu_1^2 - \psi(\nu_1))} \tag{1.9}$$

где $\psi(\nu_1) = \nu_2^2(\nu_1)$; штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной ν_1.

Если будет найдено некоторое решение $\psi = \psi(\nu_1)$, $\varphi_i(\nu_1)$ ($i = 1, 2, 3$) уравнений (1.5)–(1.8), то из уравнений (1.9) можно определить зависимость $\nu_1 = \nu_1(t)$. Тогда компоненты вектора момента количества движения найдем из соотношений (1.4), где

$$\nu_2(\nu_1) = \sqrt{\psi(\nu_1)}, \quad \nu_3(\nu_1) = \sqrt{1 - \nu_1^2 - \psi^2(\nu_1)} \tag{1.10}$$

На инвариантных соотношениях (1.4) интегралы энергии и момента количества движения из системы (1.3) таковы:

$$\begin{aligned}&\nu_1\varphi_1(\nu_1) + \psi(\nu_1)\varphi_2(\nu_1) + (1 - \nu_1^2 - \psi(\nu_1))\varphi_3(\nu_1) = \frac{1}{2}(b_0\psi + n_0 + n_1\nu_1 + n_2\nu_1^2) \\ &a_1\varphi_1^2(\nu_1) + a_2\psi(\nu_1)\varphi_2^2(\nu_1) + a_3(1 - \nu_1^2 - \psi(\nu_1))\varphi_3^2(\nu_1) = c_0\psi + m_0 + m_1\nu_1 + m_2\nu_1^2\end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$\begin{aligned}&b_0 = B_2 - B_3, \quad n_1 = -2\lambda_1, \quad n_2 = B_1 - B_3 \\ &c_0 = C_3 - C_2, \quad m_1 = 2s_1, \quad m_2 = C_3 - C_1\end{aligned} \tag{1.12}$$

n_0, m_0 – произвольные постоянные, введенные вместо E и k.

При исследовании условий существования инвариантных соотношений (1.4) для уравнений (1.1), (1.2) с интегралами (1.11) был рассмотрен [12] случай, когда функции $\psi(\nu_1)$, $\varphi_i(\nu_1)$ в уравнениях (1.5)–(1.9) являются многочленами по переменной ν_1. Поэтому представляет интерес изучение решений уравнений (1.5)–(1.9) в более общем виде.

Зададим решение уравнений (1.5)–(1.9) с помощью следующих инвариантных соотношений:

$$\psi(\nu_1) = \alpha_2\nu_1^2 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_0$$
$$\varphi_2(\nu_1) = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\nu_1 + \varepsilon_0}, \quad \varphi_3(\nu_1) = \frac{1}{a_3}(\mu_0 + a_2\varphi_2(\nu_1)) \tag{1.13}$$

где α_2, α_1, α_0, γ_0, γ_1, μ_0 – постоянные, зависящие от параметров задачи (1.1), (1.2), которые подлежат определению. Обоснованием такого подхода может служить не только более сложная структура решения по сравнению с принятой ранее [12], но и то обстоятельство, что при выполнении третьего равенства из (1.13) уравнение (1.9) принимает вид

$$\dot\nu_1 = \{(\alpha_2\nu_1^2 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_0)[-(1+\alpha_2)\nu_1^2 - \alpha_1\nu_1 + (1-\alpha_0)]\}^{1/2} \tag{1.14}$$

т.е. $\nu_1 = \nu_1(t)$ – эллиптическая функция времени. Последнее свойство характерно для большинства частных решений уравнений динамики твердого тела [6].

Отметим, что на основании соотношений (1.13) функцию $\varphi_1(\nu_1)$ можно найти из уравнения (1.5)

$$\varphi_1(\nu_1) = \frac{1}{2a_1}[\mu_0(2(\alpha_2+1)\nu_1 + \alpha_1) + 2a_2\nu_1\varphi_2(\nu_1)] \tag{1.15}$$

Равенства (1.11), (1.12) дают значения постоянных первых интегралов на рассматриваемом решении.

2. Условия существования решения (1.13)–(1.15). С помощью выражений (1.13), (1.15) уравнения (1.6)–(1.8) запишем так ($u = \nu_1 + \varepsilon_0$ – новая переменная):

$$\mu_0 a_3\varphi_1'(u) + a_2(a_2 - a_3)\varphi_2^2(u) - x_0\varphi_2(u) + \sigma_0 = 0 \tag{2.1}$$

$$2\mu_0 a_1 a_3\psi(u)\varphi_2'(u) =$$
$$= 2a_2^2(a_1 - a_3)(u - \varepsilon_0)\varphi_2^2(u) + (G_1 u + G_0)\varphi_2(u) + D_1 u + D_0 \tag{2.2}$$

$$2\mu_0 a_1 a_2(1 - (u - \varepsilon_0)^2 - \psi(u))\varphi_2'(u) =$$
$$= 2a_2 a_3(a_2 - a_1)(u - \varepsilon_0)\varphi_2^2(u) + (K_1 u + K_0)\varphi_2(u) + M_1 u + M_0 \tag{2.3}$$

где

$$\psi(u) = \alpha_2 u^2 + (\alpha_1 - 2\varepsilon_0\alpha_2)u + (\alpha_0 - \varepsilon_0\alpha_1 + \varepsilon_0^2\alpha_2)$$

$$\varphi_2(u) = \gamma_0 + \gamma_1 u^{-1}$$

$$x_0 = \mu_0(a_3 - a_2) + a_2 a_3(B_3 - B_2), \quad \sigma_0 = a_3(\mu_0 B_2 + C_2 - C_3)$$

$$G_1 = 2[\mu_0\alpha_2(a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3) + 2\mu_0 a_2(a_1 - a_3) + a_1a_2a_3(B_1 - B_3)]$$

$$G_0 = 2\mu_0\varepsilon_0\alpha_2(-a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) - 4\mu_0\varepsilon_0 a_2(a_1 - a_3) +$$
$$+ \mu_0\alpha_1(a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3) - 2\lambda_1 a_1a_2a_3 - 2\varepsilon_0 a_1a_2a_3(B_1 - B_3)$$

$$D_1 = 2[\mu_0^2(a_1 - a_3)(\alpha_2 + 1) + \mu_0 a_1a_3(B_1 - B_3) - \mu_0 a_1a_3B_3\alpha_2 + a_1a_3(C_1 - C_3)] \tag{2.4}$$

$$D_0 = \mu_0^2(a_1 - a_3)[\alpha_1 - 2\varepsilon_0(1 + \alpha_2)] - 2\mu_0\lambda_1 a_1a_3 - \mu_0 a_1a_3B_3(\alpha_1 - 2\varepsilon_0\alpha_2) -$$
$$- 2\varepsilon_0 a_1a_3(C_1 - C_3) - 2s_1a_1a_3 - 2\mu_0\varepsilon_0 a_1a_3(B_1 - B_3)$$

$$K_1 = 2[\mu_0(a_1a_2 - a_1a_3 + a_2a_3)(\alpha_2 + 1) + a_1a_2a_3(B_2 - B_1)]$$

$$K_0 = \mu_0(a_1a_2 - a_1a_3 + a_2a_3)[\alpha_1 - 2\varepsilon_0(\alpha_2 + 1)] + 2\lambda_1 a_1a_2a_3 - 2\varepsilon_0 a_1a_2a_3(B_2 - B_1)$$

$$M_1 = 2\mu_0 a_1(\mu_0 + a_3B_2)(\alpha_2 + 1) + 2a_1a_3(C_2 - C_1)$$

$$M_0 = \mu_0 a_1(\mu_0 + a_3B_2)[\alpha_1 - 2\varepsilon_0(\alpha_2 + 1)] + 2s_1a_1a_3 - 2\varepsilon_0 a_1a_3(C_2 - C_1)$$

а функция $\varphi_1(u)$ в силу выражения (1.15) имеет вид

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{2a_1}[\mu_0(\alpha_1 - 2\varepsilon_0(\alpha_2 + 1)) + 2(\gamma_1 - \varepsilon_0\gamma_0)a_2 +$$
$$+ 2(\mu_0(\alpha_2 + 1) + \gamma_0 a_2)u - 2\varepsilon_0\gamma_1 a_2 u^{-1}] \tag{2.5}$$

Потребовав, чтобы функции $\varphi_2(u) = \gamma_0 + \gamma_1 u^{-1}$ и $\varphi_1(u)$ из соотношения (2.5) удовлетворяли уравнениям (2.1)–(2.3), получим следующие условия, связывающие параметры решения и параметры задачи (1.1), (1.2):

$$\varepsilon_0^2 = \frac{a_1^2}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \quad \gamma_0 = \frac{x_0}{2a_2(a_2 - a_3)}, \quad \gamma_1 = \frac{\mu_0\varepsilon_0 a_3}{a_1(a_3 - a_2)} \tag{2.6}$$

$$\alpha_0 = \frac{\varepsilon_0}{a_1^2(a_2 - a_3)}[\varepsilon_0 a_1^2(a_3 - a_2)\alpha_2 - a_1^2(a_3 - a_2)\alpha_1 - \varepsilon_0 a_2^2(a_1 - a_3)] \tag{2.7}$$

$$\gamma_0^2 a_1a_2(a_2 - a_3) + \gamma_0(\mu_0 a_2a_3 - a_1x_0) + \mu_0^2 a_3(\alpha_2 + 1) + \sigma_0 a_1 = 0 \tag{2.8}$$

$$2\mu_0 a_1a_3(\alpha_1 - 2\varepsilon_0\alpha_2) - 4\varepsilon_0\gamma_0 a_2^2(a_1 - a_3) + 2\gamma_1 a_2^2(a_1 - a_3) + G_0 = 0 \tag{2.9}$$

$$2\gamma_0^2 a_2^2(a_1 - a_3) + \gamma_0 G_1 + D_1 = 0 \tag{2.10}$$

$$2\mu_0\gamma_1 a_1a_3\alpha_2 - 2\varepsilon_0\gamma_0^2 a_2^2(a_1 - a_3) + 4\gamma_0\gamma_1 a_2^2(a_1 - a_3) + \gamma_0 G_0 + \gamma_1 G_1 + D_0 = 0 \tag{2.11}$$

$$2\mu_0 a_1a_2[2\varepsilon_0(\alpha_2 + 1) - \alpha_1] - 4\varepsilon_0\gamma_0 a_2a_3(a_2 - a_1) + 2\gamma_1 a_2a_3(a_2 - a_1) + K_0 = 0 \tag{2.12}$$

$$2\gamma_0^2 a_2a_3(a_2 - a_1) + \gamma_0 K_1 + M_1 = 0 \tag{2.13}$$

$$2\mu_0\gamma_1 a_1a_2(\alpha_2 + 1) + 2\varepsilon_0\gamma_0^2 a_2a_3(a_2 - a_1) - 4\gamma_0\gamma_1 a_2a_3(a_2 - a_1) - \gamma_0 K_0 - \gamma_1 K_1 - M_0 = 0 \tag{2.14}$$

Соотношения (2.6), (2.7) показывают, что в них параметр ε_0 выражен через компоненты гирационного тензора, параметры γ_0 и γ_1 – через компоненты гирационного тензора и величины B_2, B_3 и μ_0, параметр α_0 – через компоненты гирационного тензора и величины α_1, α_2. В силу соотношения (2.4) можно показать, что система уравнений (2.8)–(2.14) линейно зависима и приводится к системе

$$\mu_0(a_2-a_3)[\alpha_2(a_1a_2+a_1a_3-2a_2a_3)-a_2(a_3-a_1)]+$$
$$+a_2a_3[a_1(a_3-a_2)(B_1-B_3)+a_2(a_3-a_1)(B_3-B_2)] = 0 \qquad (2.15)$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu_0}{2a_1^2a_2a_3(a_3-a_2)}[a_1(a_3-a_2)(a_1a_2+a_1a_3-a_2a_3)\alpha_1-$$
$$-2\varepsilon_0a_2a_3(a_1(a_3-a_2)\alpha_2+a_2(a_3-a_1))] \qquad (2.16)$$

$$\mu_0^2(a_2-a_3)(-a_1a_2+a_1a_3+2a_2a_3+4a_2a_3\alpha_2)+$$
$$+2\mu_0a_2a_3[B_3(a_1a_2-a_1a_3+a_2a_3)-B_2(-a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)]-$$
$$-a_1a_2^2a_3^2(B_3-B_2)^2+4a_1a_2a_3(a_2-a_3)(C_2-C_3) = 0 \qquad (2.17)$$

$$x_0^2a_2(a_1-a_3)+2x_0[\mu_0(a_1a_2-a_1a_3-a_2a_3)\alpha_2+2\mu_0a_2(a_1-a_3)+$$
$$+a_1a_2a_3(B_1-B_3)]+4a_2(a_2-a_3)[\mu_0^2(a_1-a_3)(\alpha_2+1)+$$
$$+\mu_0a_1a_3(B_1-B_3)-\mu_0a_1a_3B_3\alpha_2+a_1a_3(C_1-C_3)] = 0 \qquad (2.18)$$

$$2\mu_0\gamma_1a_1a_3\alpha_2-2\varepsilon_0\gamma_0^2a_2^2(a_1-a_3)+4\gamma_0\gamma_1a_2^2(a_1-a_3)+$$
$$+\gamma_0G_0+\gamma_1G_1+\mu_0^2(a_1-a_3)[\alpha_1-2\varepsilon_0(\alpha_2+1)]-$$
$$-2\mu_0\lambda_1a_1a_3-\mu_0a_1a_3B_3(\alpha_1-2\varepsilon_0\alpha_2)-2\varepsilon_0a_1a_3(C_1-C_3)-$$
$$-2\mu_0\varepsilon_0a_1a_3(B_1-B_3)-2s_1a_1a_3 = 0 \qquad (2.19)$$

Таким образом, равенства (2.6), (2.7), (2.15)–(2.19) служат условиями существования решения (1.13)–(1.15) для уравнений Кирхгофа (1.1), (1.2).

Если воспользоваться тем, что по своему механическому смыслу величины λ_1, s_1, $C_2 - C_3$ и $C_1 - C_3$ могут принимать произвольные значения, то для доказательства разрешимости уравнений (2.6), (2.7), (2.15)–(2.19) можно применить полуобратный метод, который позволяет избежать громоздких вычислений. Пусть заданы значения параметров a_1, a_2, a_3, B_1, B_2, B_3, α_2 и α_1. Тогда из уравнения (2.15) можно определить параметр μ_0, а из уравнений (2.6) – значения параметров решения: ε_0, γ_0, γ_1. На основании полученных результатов из уравнения (2.7) можно найти параметр α_0, из уравнения (2.16) – параметр λ_1, из уравнения (2.17) – параметр $C_2 - C_3$, из уравнения (2.18) – параметр $C_1 - C_3$, из уравнения (2.19) – параметр s_1, так как указанные параметры входят в условия (2.15), (2.19) линейно. При этом необходимо учитывать, что полученные значения α_0, α_1, α_2 должны удовлетворять условиям действительности решения

$$\nu_2^2(\nu_1) = \psi(\nu_1) = \alpha_2\nu_1^2+\alpha_1\nu_1+\alpha_0 \ge 0$$
$$\nu_3^2(\nu_1) = -(1+\alpha_2)\nu_1^2-\alpha_1\nu_1+(1-\alpha_0) \ge 0 \qquad (2.20)$$

Этого можно добиться, например, выбором величин α_1, α_2, полагая, что правая часть равенства (2.7) положительна и не превосходит единицы. Тогда функции $\nu_2^2(\nu_1)$, $\nu_3^2(\nu_1)$ в точке $\nu_1 = 0$ положительны и в силу их непрерывности существует непустой промежуток по ν_1, в котором выполнены условия (2.20).

Таким образом, при выполнении равенств (2.6), (2.7) уравнения (1.1), (1.2) допускают решение (его находим с помощью формул (1.4), (1.10), (1.13)–(1.15))

$$
\begin{aligned}
&\nu_2(\nu_1) = \sqrt{\alpha_2\nu_1^2 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_0}, \quad \nu_3(\nu_1) = \sqrt{-(1+\alpha_2)\nu_1^2 - \alpha_1\nu_1 + (1-\alpha_0)} \\
&x_1(\nu_1) = \frac{1}{2a_1}\left[\mu_0\alpha_1 + 2(\mu_0(\alpha_2+1) + \gamma_0 a_2)\nu_1 + \frac{2\gamma_1 a_2\nu_1}{\nu_1+\varepsilon_0}\right] \\
&x_2(\nu_1) = \nu_2(\nu_1)\left(\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\nu_1+\varepsilon_0}\right), \quad x_3(\nu_1) = \frac{\nu_3(\nu_1)}{a_3}\left(\mu_0 + \gamma_0 a_2 + \frac{\gamma_1 a_2}{\nu_1+\varepsilon_0}\right) \\
&\dot\nu_1 = \nu_2(\nu_1)\nu_3(\nu_1)
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Примечательное свойство решения (2.21) – структура функций $x_i(\nu_1)$: они являются суперпозицией линейных и дробно-линейных функций от компонент вектора оси симметрии силового поля. Так как постоянные n_0, m_0, входящие в соотношения (1.11), принимают фиксированные значения, которые не выписываем в силу их громоздкости, то решение (2.21) зависит от одной произвольной постоянной t_0. Эта постоянная появляется при решении последнего уравнения из системы (2.21).

3. Численный пример. Зададим следующие значения компонент гирационного тензора: $a_1 = 2a$, $a_2 = 3a$, $a_3 = 5a$, где a – параметр. Тогда из первого равенства системы (2.6) найдем $\varepsilon_0 = 2\sqrt{3}/3$. Считая параметр μ_0 свободным, уравнению (2.15) удовлетворим значениями

$$
B_1 = \frac{3\mu_0}{a}, \quad B_2 = \frac{\mu_0}{a}, \quad B_3 = \frac{8\mu_0}{5a}
$$

Уравнение (2.7) выполняется, например, при условиях

$$
\alpha_2 = \frac{21}{4}, \quad \alpha_1 = \frac{25\sqrt{3}}{4}, \quad \alpha_0 = 1
$$

На основании обозначений для x_0 из (2.4) имеем $x_0 = 11\mu_0 a$. Значение λ_1 найдем из равенства (2.16), а значения γ_0 и γ_1 – из второго и третьего равенств системы (2.6). Имеем

$$
\lambda_1 = -\frac{115\sqrt{3}\mu_0}{48a}, \quad \gamma_0 = -\frac{11\mu_0}{12a}, \quad \gamma_1 = \frac{5\sqrt{3}\mu_0}{6a}
$$

Обратимся к уравнениям (2.17)–(2.19). Подставляя в них найденные выше значения параметров, получим

$$
C_1 - C_3 = \frac{21\mu_0^2}{5a^3}, \quad C_2 - C_1 = -\frac{191\mu_0^2}{24a^3}, \quad s_1 = -\frac{5\sqrt{3}\mu_0^2}{2a^3}
$$

Таким образом, приведен пример разрешимости условий (2.6), (2.7), (2.15)–(2.19). Решение (2.21) принимает вид (переменная ν_1 изменяется в промежутке $[\nu_2^{(0)}, 0]$)

$$
\nu_2(\nu_1) = \frac{1}{2}\sqrt{21(\nu_1 - \nu_1^{(0)})(\nu_1 - \nu_2^{(0)})}, \quad \nu_3(\nu_1) = \frac{5}{2}\sqrt{-\nu_1(\nu_1 + \sqrt{3})}
$$

$$
(\nu_1^{(0)} \approx -1.96, \quad \nu_2^{(0)} \approx -0.09)
$$

$$
x_1 = \frac{\mu_0}{a}\left(\frac{45\sqrt{3}}{16} + \frac{7}{4}\nu_1 - \frac{5\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}\nu_1 + 2)}\right)
$$

$$
x_2 = \frac{\mu_0\nu_2(\nu_1)}{a}\left(-\frac{11}{12} + \frac{5}{2(\sqrt{3}\nu_1 + 2)}\right), \quad x_3 = \frac{\mu_0\nu_3(\nu_1)}{5a}\left(-\frac{7}{4} + \frac{15}{2(\sqrt{3}\nu_1 + 2)}\right)
$$

$$
\dot\nu_1 = \nu_2(\nu_1)\nu_3(\nu_1)
$$

Анализ литературы, посвященной построению общих и частных решений уравнений Кирхгофа, показывает, что решение (2.21) по условиям, накладываемым на параметры, не может быть частным случаем решений Кирхгофа–Харламова [3], Клебша [13], Стеклова [2], Ляпунова [14], а по структуре не повторяет известные частные решения [3, 6, 8, 11, 12, 15, 16].

Отметим, что при $B_i = 0$, $C_i = 0$, $\lambda_1 = 0$ условия (2.15)–(2.19) приводят к равенству $a_2 = a_3$, которое в силу условий (2.6) выполняться не может. Поэтому аналога решения (2.21) в классической задаче не существует.

Автор благодарит Г.В. Горра за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rötation körpers in einer Flüssigkeit // J. Reine und Angew. Math. 1870. Bd. 71. S. 237–262.
2. *Стеклов В.А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков: Тип. Дарре, 1893. 234 с.
3. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // ПМТФ. 1963. № 4. С. 17–29.
4. *Орешкина Л.Н.* Изоморфизм двух задач динамики // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 5. С. 1080–1082.
5. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I. The equations of motion and their transformations // J. Mec. Theor. Appl. 1986. V. 5. № 5. P. 747–754.
6. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
7. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
8. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 384 с.
9. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 2001. Вып. 31. С. 3–17.
10. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1974. Вып. 6. С. 15–24.
11. *Горр Г.В., Узбек Е.К.* К постановке задачи о решении уравнений Д. Гриоли – М.П. Харламова в специальной форме // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1997. Вып. 29. С. 133–139.
12. *Горр Г.В., Миронова Е.М.* Два новых решения уравнений движения гироскопов в поле потенциальных и гироскопических сил // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. 2000. Т. 5. С. 29–37.
13. *Clebsch R.F.A.* Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit // J. Math. Ann. 1870. Bd. 3. S. 238–262.
14. *Ляпунов А.М.* Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 320–324.
15. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья первая) // Собр. соч. М.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 136–193.
16. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья вторая) // Собр. соч. М.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 194–311.

Донецк
e-mail: resource@donduet.edu.ua

Поступила в редакцию
25.III.2003