УДК 531.36

© 2004 г. А. А. Буров

ОБ "ОГРАНИЧЕННОЙ" ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается задача о движении тяжелого твердого тела в так называемой "ограниченной" постановке, получающейся в предположении, что два размера тела – назовем их "ширина" и "толщина" – существенно меньше третьего размера – "длины" тела. Исследуется динамика возникающих предельных объектов, в частности, изучается вопрос о существовании и устойчивости установившихся движений, разделении движений, об интегрировании и интегрируемости уравнений движения.

Вопрос об ограниченных постановках задач динамики твердого тела был поставлен [1] (см. также [2]) при исследовании основных свойств предельных задач динамики тяжелого твердого тела с неподвижной точкой и динамики твердого тела в идеальной несжимаемой покоящейся на бесконечности жидкости. Ниже, в развитие идеи работы автора [3], способ введения параметра, характеризующего размеры тела, несколько отличается от способа, использовавшегося ранее [1], что позволяет исследовать более широкий класс задач с более богатыми динамическими свойствами.

1. Общие уравнения движения. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Для простоты обозначений будем считать, что тело образовано некоторым количеством массивных точек A_i с массами m_i, $i \in \mathcal{I}$. Пусть $Ox_1x_2x_3$ – связанная с телом система координат, начало которой совпадает с неподвижной точкой O, а ее оси направлены вдоль главных осей инерции относительно точки O. Положение точек A_i задается векторами $\overrightarrow{OA_i}$, проекции которых на оси этой системы координат имеют вид $\mathbf{r}_i = (r_{1i}, r_{2i}, r_{3i})$.

Если g – ускорение силы тяжести, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in R^3(\boldsymbol{\omega})$ – вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in R^3(\gamma)$ – единичный вектор, направленный вдоль восходящей вертикали, то уравнения движения имеют вид

$$(\Lambda_2 + \Lambda_3)\dot{\omega}_1 = (\Lambda_3 - \Lambda_2)\omega_2\omega_3 + \gamma_2 M_3 - \gamma_3 M_2 \quad (1, 2, 3) \tag{1.1}$$

$$\dot{\gamma}_1 = \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2 \quad (1, 2, 3) \tag{1.2}$$

$$\Lambda_j = \sum_{i \in \mathcal{I}} m_i r_{ji}^2, \quad M_j = g\sum_{i \in \mathcal{I}} m_i r_{ji}, \quad M = \sum_{i \in \mathcal{I}} m_i \tag{1.3}$$

Система уравнений Эйлера–Пуассона (1.1), (1.2), как известно, помимо интеграла энергии

$$\mathcal{I}_0 = \frac{1}{2}\sum_{(1, 2, 3)} (\Lambda_2 + \Lambda_3)\omega_1^2 + \sum_{(1, 2, 3)} M_1\gamma_1 = h \tag{1.4}$$

допускает интеграл площадей

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{(1, 2, 3)} (\Lambda_2 + \Lambda_3)\omega_1\gamma_1 = p_\psi \tag{1.5}$$

и геометрический интеграл

$$\mathcal{J}_2 = \sum_{(1,2,3)} \gamma_1^2 = 1 \tag{1.6}$$

Для ее полной интегрируемости недостает одного дополнительного интеграла, который, как известно, существует в случаях Эйлера, Лагранжа, Ковалевской при произвольных значениях постоянной интеграла площадей и также в случае Горячева – Чаплыгина на нулевом уровне этого интеграла.

2. Предельный переход. Предположим теперь, что "длина" тела много больше его "ширины" и "толщины" и тело вытянуто вдоль своей третьей оси. Чтобы формализовать это, введем параметр $\varepsilon \neq 0$ так, что

$$r_{ji} = \varepsilon(r'_{ji} + \varepsilon\rho_{ji}), \quad j = 1, 2 \tag{2.1}$$

Будем считать, что параметр ε достаточно мал и выполнены соотношения

$$\sum_{i \in \mathcal{J}} m_i r'_{ji} = 0, \quad j = 1, 2$$

Тогда

$$\Lambda_j = \varepsilon^2 \Lambda'_j + \ldots, \quad M_j = \varepsilon^2 M'_j, \quad j = 1, 2; \quad \Lambda'_j = \sum_{i \in \mathcal{J}} m_i r'^2_{ji}, \quad M'_j = \sum_{i \in \mathcal{J}} m_i \rho_{ji}$$

Отбрасывая штрихи, представим уравнения (1.1) в виде

$$\begin{aligned}
(\varepsilon^2\Lambda_2 + \Lambda_3 + \ldots)\dot{\omega}_1 &= (\Lambda_3 - \varepsilon^2\Lambda_2 + \ldots)\omega_2\omega_3 + \gamma_2 M_3 - \gamma_3\varepsilon^2 M_2 \\
(\Lambda_3 + \varepsilon^2\Lambda_1 + \ldots)\dot{\omega}_2 &= (\varepsilon^2\Lambda_1 - \Lambda_3 + \ldots)\omega_3\omega_1 + \gamma_3\varepsilon^2 M_1 - \gamma_1 M_3 \\
\varepsilon^2(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots)\dot{\omega}_3 &= \varepsilon^2(\Lambda_2 - \Lambda_1 + \ldots)\omega_1\omega_2 + \gamma_1\varepsilon^2 M_2 - \gamma_2\varepsilon^2 M_1
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Сокращая в последнем уравнении левые и правые части на ε^2 и устремляя затем параметр ε к нулю, в пределе имеем

$$\begin{aligned}
&\dot{\omega}_1 = \omega_1\omega_3 + \mu_3\gamma_2, \quad \dot{\omega}_2 = -\omega_3\omega_1 - \mu_3\gamma_1, \quad \dot{\omega}_3 = K\omega_1\omega_2 + \gamma_1\mu_2 - \gamma_2\mu_1 \\
&K = (\Lambda_2 - \Lambda_1)/(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad \mu_j = M_j/(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad j = 1, 2, \quad \mu_3 = M_3/L_3
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) нужно дополнить уравнениями Пуассона (1.2). Надлежащие предельные переходы в первых интегралах $\mathcal{J}_0$ и $\mathcal{J}_1$ позволяют представить их в виде

$$\mathcal{J}_0 = \Lambda_3((\omega_1^2 + \omega_2^2)/2 + \mu_3\gamma_3) = h, \quad \mathcal{J}_1 = \Lambda_3(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) = p_\psi = \Lambda_3 P \tag{2.4}$$

При $K = 0$, $\mu_3 = 0$ эти уравнения изучались ранее [1]. В дальнейшем, без нарушения общности будем считать, что $K \geq 0$.

Замечания. 1°. Если $K = 0$, то тело похоже на карандаш, у которого "ширина" и "толщина" примерно совпадают. Отличие от нуля величин μ_1 и μ_2 означает небольшую асимметрию "заточки", в то время как величина μ_3 отвечает за продольное смещение центра масс относительно точки подвеса. Случай $K \neq 0$ означает, что рассматривается "ученическая линейка", у которой "ширина" существенно отличается от "толщины".

2°. Было бы естественно полагать, что уравнения (2.3) обладают структурой уравнений Пуанкаре–Четаева. Однако доказательство этого предположения неизвестно.

3. Некоторые случаи существования дополнительных первых интегралов. Для уравнений (1.2), (2.3) можно указать некоторые случаи существования дополнительных первых интегралов.

"Случай Эйлера". Пусть $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. В этом случае уравнения (2.3) отделяются от уравнений Пуассона (1.2) и их можно рассмотреть независимо от последних. Дополнительный интеграл может быть представлен в виде

$$\mathcal{J}_3 = (K\omega_2^2 + \omega_3^2)/2 = f \tag{3.1}$$

или в виде

$$\mathcal{J}_3 = (-K\omega_1^2 + \omega_3^2)/2 = g \tag{3.2}$$

При этом уравнения движения тела оказываются вполне интегрируемыми. Как и в классическом случае Эйлера, в общем случае совместные уровни первых интегралов $\mathcal{J}_0$ и $\mathcal{J}_3$ образованы парой симметричных относительно начала координат кривых, каждая из которых диффеоморфна окружности. В особых случаях совместные уровни состоят либо из пары симметричных точек, либо из сепаратрисного контура. Такой контур располагается на нулевом уровне интеграла (3.2). Этот особый уровень первого интеграла (3.2) образован парой пересекающихся плоскостей

$$\mathcal{J}_{\pm} = \omega_3 \pm \sqrt{K}\omega_1 = 0 \tag{3.3}$$

Стандартным способом, методом Рауса, показывается, что при $K \neq 0$ в рассматриваемом случае множество установившихся движений, как и в случае Эйлера, состоит из равномерных вращений вокруг осей связанной с телом системы кординат. В силу предположения о неотрицательности K вращения вокруг первой и третьей осей оказываются устойчивыми, в то время как вращение вокруг второй оси неустойчиво.

В общем случае уравнения движения в "случае Эйлера" интегрируются в эллиптических функциях. Некоторые качественные свойства движения такой системы будут рассмотрены ниже.

Заметим, что для динамически симметричных тел уравнения движения в случае Эйлера получаются из рассмотренных, если положить в них $K = 0$. В этом случае дополнительный интеграл, как обычно, имеет вид

$$\mathcal{J}_3 = \omega_3$$

Замечание. Прямой подстановкой выражений (2.1) в условия существования интегралов Ковалевской и Горячева – Чаплыгина можно убедиться, что эти условия не выдерживают выполняемого предельного перехода, и соответствующие дополнительные интегралы не существуют. Случай Лагранжа не таков – он требует дополнительного рассмотрения.

Случай Гесса. Как и в классической задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, для ограниченной постановки наблюдается нерасщепление сепаратрис и связанное с ним существование линейных частных интегралов. Эти интегралы имеют вид (3.3), они существуют при выполнении условий

$$\lambda_1 = \mp\sqrt{K}\lambda_3, \quad \lambda_2 = 0 \tag{3.4}$$

соответственно.

Сравним найденные частные интегралы (3.3) с интегралом Гесса в классической задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Для этого введем обозначения

$$I_1 = \Lambda_2 + \Lambda_3 \ (1, 2, 3)$$

и предположим для определенности $I_1 > I_2 > I_3$. Тогда, если

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3): a_1 = \sqrt{I_2^{-1} - I_1^{-1}}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \sqrt{I_3^{-1} - I_2^{-1}}$$

то интеграл Гесса имеет вид

$$F_\varepsilon = a_1 I_1 \omega_1 + \varepsilon^\circ a_3 I_3 \omega_3 = 0, \quad \varepsilon^\circ = \pm 1$$

причем его существование обусловлено выполнением условий (ср. с (3.4))

$$a_1 M_3 - \varepsilon^\circ a_3 M_1 = 0, \quad M_2 = 0$$

4. Интегрирование уравнений движения. В частном случае $K = 0$ метод интегрирования уравнений движения (1.2), (2.3) был предложен ранее [1] (см. также [3], с. 239–242). Этим же подходом можно воспользоваться и в случае, когда условие $K = 0$ не выполнено.

Прежде всего заметим, что интеграл площадей $\mathcal{J}_1$ и одно из уравнений Пуассона составляют систему двух алгебраических уравнений

$$\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 = P, \quad \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2 = \dot\gamma_3 \tag{4.1}$$

Эта система линейна относительно (ω_1, ω_2), и ее решение имеет вид

$$\omega_1 = \frac{P\gamma_1 - \gamma_2\dot\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad \omega_2 = \frac{P\gamma_2 + \gamma_1\dot\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \tag{4.2}$$

Подставляя решение (4.2) в интеграл энергии $\mathcal{J}_0$, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{P^2 + \dot\gamma_3^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} + \mu_3\gamma_3 = H$$

С помощью геометрического интеграла это уравнение можно преобразовать к виду

$$P^2 + \dot\gamma_3^2 = 2(1 - \gamma_3^2)(H - \mu_3\gamma_3) \tag{4.3}$$

замкнутому относительно γ_3. Вспоминая, что

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta$$

где φ и θ – углы собственного вращения и нутации, убеждаемся, что уравнение, описывающее изменение угла нутации, отделяется от уравнений для двух других углов, описывающих положение системы.

Уравнение (4.3) совпадает с уравнением, описывающим движение сферического маятника после понижения порядка по Раусу. При $\mu_3 \neq 0$ это уравнение интегрируется в эллиптических функциях. При $\mu_3 = 0$ оно интегрируется в элементарных функциях, причем

$$\gamma_3 = A\cos[\omega(t + \alpha)], \quad \dot\gamma_3 = -A\omega\sin[\omega(t + \alpha)], \quad \omega = \sqrt{2H}, \quad A = \sqrt{1 - P^2/\omega^2} \tag{4.4}$$

Величина ω играет роль частоты колебаний, величина A – роль их амплитуды.

Введем переменную ξ, такую, что

$$\omega_1 = \Omega\sin\xi, \quad \omega_2 = \Omega\cos\xi, \quad \Omega = \Omega(\gamma_3; \mu_3, H) = \sqrt{2(H - \mu_3\gamma_3)}, \quad \Omega(\gamma_3; 0, H) = \omega \tag{4.5}$$

и рассмотрим соотношения (4.1) как уравнения относительно (γ_1, γ_2). Эти уравнения линейны, и их общее решение представимо в виде

$$\gamma_1 = \frac{P\omega_1 + \dot{\gamma}_3\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \frac{P\sin\xi + \dot{\gamma}_3\cos\xi}{\Omega} \tag{4.6}$$

$$\gamma_2 = \frac{P\omega_2 - \dot{\gamma}_3\omega_1}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \frac{P\cos\xi - \dot{\gamma}_3\sin\xi}{\Omega} \tag{4.7}$$

Теперь, дифференцируя по времени выражение для ω_1, подставляя полученное выражение и соотношение (4.7) в первое из уравнений (2.3) и приводя подобные, имеем

$$\dot{\xi} = \omega_3 + \mu_3 P/\Omega^2 \tag{4.8}$$

Дифференцируя по времени левую и правую части уравнения (4.8), подставляя в правую часть выражение для $\dot{\omega}_3$ из последнего уравнения (2.3), а также заменяя величины $(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2)$ их значениями из соотношений (4.5)–(4.7), получаем неавтономное уравнение второго порядка

$$\ddot{\xi} = K\Omega^2\sin\xi\cos\xi + \mu_2\frac{P\sin\xi + \dot{\gamma}_3\cos\xi}{\Omega} - \mu_1\frac{P\cos\xi - \dot{\gamma}_3\sin\xi}{\Omega} + \mu_3^2\frac{2P}{\Omega^4}\dot{\gamma}_3 \tag{4.9}$$

При $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ это уравнение вполне интегрируемо – его эквивалентность уравнению движения математического маятника можно доказать с помощью замены $\eta = 2\xi$. При $\mu_1 = \mu_2 = 0$ и малых значениях параметра μ_3 неинтегрируемость уравнения (4.9) следует из неинтегрируемости уравнений движения маятника под действием периодического крутящего момента[1]. Тем самым доказывается отсутствие первого интеграла в случае, который можно было бы назвать "случаем Лагранжа". Наконец, при $\mu_3 = 0$, $\mu_1\mu_2 \neq 0$ неинтегрируемость уравнения (4.9) была доказана [4] методом расщепления сепаратрис.

Таким образом, при выполнении условий невырожденности первые интегралы $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ определяют трехмерную инвариантную поверхность в пространстве $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$. Переменные ξ, $\dot{\xi}$ и γ_3 могут быть рассмотрены в качестве координат на этой поверхности. Это означает, что если исходная система вполне интегрируема, то и уравнение (4.9) также вполне интегрируемо. Тогда перечисленные результаты о неинтегрируемости уравнений (4.9) доказывают неинтегрируемость уравнений движения тяжелого твердого тела в "ограниченной" постановке.

Обратим внимание на то обстоятельство, что связанное с неинтегрируемостью хаотическое движение развивается по углу вращения, в то время как динамика по углам прецессии и нутации остается регулярной. За этим стоит разделение движений по углам нутации и прецессии, с одной стороны, и по углу собственного вращения – с другой, присущее именно ограниченной постановке рассматриваемой задачи.

Заметим также, что аналогичное разделение движений возможно и в ряде других классических задач о движении твердого тела, в частности, в задаче о движении тела в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости.

---

[1] *Буров А.А.* Некоторые задачи динамики маятниковых систем. Дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 М., 1985. 150 с.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00196), программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ 2000.2003.1), Федеральной целевой программы "Интеграция", университетских факультетов Божией Матери Мира (Facultés Universitaires Notre-Dâme de la Paix), Намюр (Namur), Бельгия, а также Института механики Технического университета Вены.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. II // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1986. № 1. С. 39–44.
2. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995. 429 с.
3. *Burov A.A.* On duality, complementarity and "restrictness" in the rigid body dynamics // Prepublication du C.E.R.M.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 1994. № 3.
4. *Буров А.А.* Об ограниченных задачах в механике твердого тела // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 2002. С. 43–53.

Москва
e-mail: aburov@ccas.ru

Поступила в редакцию
30.I.2003