

УДК 531.36

© 2004 г. Ю. Г. Мартыненко

**К ТЕОРИИ ОБОБЩЕННОГО ЭФФЕКТА МАГНУСА
ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Исследуется движение на шероховатой горизонтальной плоскости двускатной тележки в следующих случаях: 1) по инерции, 2) при наличии упругой связи, создающей восстанавливающий момент сил при отклонениях оси вращения передней колесной пары от невозмущенного положения, 3) при малом гармоническом моменте между передней колесной парой и платформой. В первом случае проведен анализ свойств точного решения системы. Во втором – с помощью метода осреднения показано, что при малых колебаниях передней колесной пары относительно платформы после переходного процесса возникает движение центра масс системы с постоянной скоростью, пропорциональной начальной амплитуде колебаний. В третьем – осредненное движение центра масс происходит уже с постоянным ускорением, величина которого оценена с помощью асимптотического метода многих масштабов.

В последнее время в связи с задачами создания микророботов большое внимание уделяется проблеме поиска новых способов разгона (торможения) мобильных роботов. В частности, обсуждался неголономный разгон подвижных объектов типа скейт-борда [1], анализировались способы управления движением различных многозвенных ползающих роботов [2, 3], определялось оптимальное управление формой нейтральной оси упругого стержня, моделирующего движение змеи [4] и т.д.

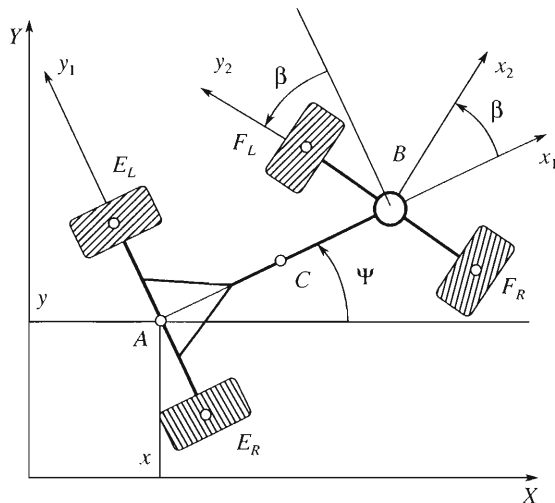
В предлагаемой работе изучаются особенности динамики мобильного робота при учете инерционных и неголономных свойств его конструкции, выполненной по схеме двускатной тележки [5–7]. При этом отсутствие у рассматриваемой системы традиционного привода на колеса позволяет максимально упростить ее конструкцию. Выполненное исследование особенностей движения робота использует аналогию между дифференциальными уравнениями мобильного робота и астатического гироскопа в кардановом подвесе [8, 9].

1. Конструкция мобильного робота. Уравнения движения тележки. Конструктивная схема рассматриваемой двускатной тележки приведена на фиг. 1. С платформой AB жестко связана подвижная система координат x_1y_1 с началом в точке A и осью x_1 , направленной по оси симметрии платформы. С передней колесной парой, которая вращается относительно вертикальной оси, проходящей через точку B , связана подвижная система координат x_2y_2 с началом в точке B .

Положение описанной механической системы определим четырьмя обобщенными координатами x, y, ψ, β , где x, y – координаты точки A в неподвижной системе координат XU , ψ – “курсовой” угол тележки (угол между осями X и x_1), β – угол поворота оси передней колесной пары относительно платформы (угол между осями x_1 и x_2).

Задние и передние колеса с центрами масс в точках E_L, E_R и F_L, F_R соответственно могут свободно, без трения, вращаться на своих осях. Левые и правые колеса на задней и передней оси одинаковы по размерам и массо-инерционным характеристикам. Платформа AB имеет центр масс в точке C , $AC = a$, $AB = b$. Ось передней колесной пары имеет центр масс в точке B .

Вокруг вертикальной оси, которая перпендикулярна плоскости фигуры и проходит через точку B , между платформой тележки и осью передней колесной пары прикладывается момент M пары сил.



Фиг. 1

При отсутствии проскальзывания колес проекции скоростей точек A и B соответственно на оси y_1 и y_2 равны нулю, поэтому обобщенные координаты и скорости удовлетворяют уравнениям неголономных связей

$$-\dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi = 0, \quad -(\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi) \sin \beta + \dot{\psi} b \cos \beta = 0 \quad (1.1)$$

Принимая в качестве псевдоскоростей скорость V точки A и относительную угловую скорость $\dot{\beta}$ передней колесной пары относительно платформы, выразим обобщенные скорости через псевдоскорости

$$\dot{x} = V \cos \psi, \quad \dot{y} = V \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \frac{V}{b} \operatorname{tg} \beta, \quad \dot{\beta} = \dot{\beta} \quad (1.2)$$

Проведя соответствующие выкладки для определения ускорений центров масс и угловых ускорений тел системы, найдем функцию Аппеля – “энергию ускорений” $S = S(\dot{V}, \dot{\beta}, V, \beta)$. Опуская слагаемые, не зависящие от ускорений, окончательно получим следующее выражение:

$$S = \frac{1}{2}(m + m_0 \operatorname{tg}^2 \beta) \dot{V}^2 + \frac{I_2}{b} \operatorname{tg} \beta \dot{V} \dot{\beta} + \frac{1}{2} I_2 \dot{\beta}^2 + \frac{m_0 \operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta} V \dot{V} \dot{\beta} + \frac{I_2}{b \cos^2 \beta} V \dot{\beta} \dot{\beta}$$

Здесь

$$m = 3m_E + 3m_F + m_C + m_B, \quad I_2 = I_B + m_F(r_F^2/2 + 3l_F^2)$$

$$m_0 = b^{-2}(I_2 + I_C + m_E r_E^2/2 + m_C a^2 + m_B b^2 + 3m_F b^2 + 3m_E l_E^2)$$

$a = AC$ – расстояние от задней оси до центра масс платформы, $b = AB$ – расстояние от задней до передней оси, $l_E = AE_L = AE_R$ – полуудлины задней оси, $l_F = AF_L = AF_R$ – полуудлины передней оси, r_E, r_F – радиусы задних и передних колес соответственно; m_C – масса платформы, I_C – момент инерции платформы относительно точки C , m_E – масса заднего колеса, $I_E = m_E r_E^2/2$ – момент инерции заднего колеса относительно оси его вращения, m_F – масса переднего колеса, $I_F = m_F r_F^2/2$ – момент инерции переднего

колеса относительно оси его вращения, m_B – масса передней оси (без колес), I_B – момент инерции передней оси относительно точки B .

В качестве исходных уравнений движения тележки возьмем уравнения Аппеля в псевдоскоростях [5]

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{V}} = Q_V, \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{\beta}} = Q_\beta$$

Здесь Q_V , Q_β – обобщенные силы, причем в рассматриваемом случае $Q_V = 0$, $Q_\beta = M$, M – момент пары сил, приложенный к передней колесной паре (при этом к платформе AB будет применен момент $-M$).

После выполнения операции дифференцирования функции Аппеля получим систему нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \psi, \quad \dot{y} = V \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \frac{V}{b} \operatorname{tg} \beta \\ \mu_0(\beta) \dot{V} + \frac{I_2 \operatorname{tg} \beta}{b} \ddot{\beta} &= -\frac{m_0 \operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta} V \dot{\beta} \\ \frac{I_2 \operatorname{tg} \beta}{b} \dot{V} + I_2 \ddot{\beta} &= M - \frac{I_2}{b \cos^2 \beta} V \dot{\beta} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\mu_0(\beta) = m + m_0 \operatorname{tg}^2 \beta$.

Последние два уравнения системы (1.3) всегда разрешимы относительно старших производных. При этом, если положить $m_1 = m_0 - I_2/b^2$, то возникает система двух нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, которая отделяется от кинематических уравнений в случае, когда момент M не зависит от обобщенных координат x , y , ψ ,

$$\dot{V} = -\frac{\operatorname{tg} \beta}{b \mu_1(\beta)} M - \frac{m_1 \operatorname{tg} \beta}{\mu_1(\beta) \cos^2 \beta} V \dot{\beta}, \quad \ddot{\beta} = \frac{\mu_0(\beta)}{I_2 \mu_1(\beta)} M - \frac{m}{b \mu_1(\beta) \cos^2 \beta} V \dot{\beta} \quad (1.4)$$

где $\mu_1(\beta) = m + m_1 \operatorname{tg}^2 \beta$.

Ниже проводится исследование системы (1.4) в следующих случаях:

- 1) $M = 0$ – свободное движение тележки, при котором можно построить точное решение системы (1.4);
- 2) $M = -K\beta$ – наличие упругой связи между передней колесной парой и платформой;
- 3) $M = M_0 \cos vt$ – наличие внутреннего активного периодического момента с амплитудой M_0 и частотой v .

Замечание 1. Было выполнено [6] формальное сведение к квадратурам задачи интегрирования уравнений (1.4) свободного движения тележки. Утверждалось ([6], стр. 117), что построенное решение описывает систему с самориентирующимися передними колесами. Однако выполненный ниже анализ точного решения уравнений (1.4) показывает, что рассматриваемая тележка в отличие от роботов с передним рояльным колесом [10] вообще не обладает свойством самоориентации передних колес с выходом на прямолинейное поступательное движение платформы.

2. Свободное движения системы по инерции. При отсутствии момента ($M = 0$) из системы (1.4) получается следующая система нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\beta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\frac{m}{b \mu_1(\beta) \cos^2 \beta} V \omega, \quad \dot{V} = -\frac{m_1 \operatorname{tg} \beta}{\mu_1(\beta) \cos^2 \beta} V \omega \quad (2.1)$$

Система (2.1) имеет целую плоскость состояний равновесия

$$\omega = 0, \quad V = \text{const}, \quad \beta = \text{const}$$

При $M = 0$ из последнего уравнения (1.3) вытекает интеграл кинетического момента передней колесной пары относительно вертикальной оси

$$I_{22} \left(\frac{\text{tg} \beta}{b} V + \omega \right) = K_z = \text{const} \quad (2.2)$$

Последнее уравнение системы (2.1) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными, из которого следует первый интеграл (интеграл энергии)

$$(m + m_1 \text{tg}^2 \beta) V^2 = \text{const} = 2T_0 \quad (2.3)$$

Исключая из уравнений (2.2) и (2.3) $\text{tg} \beta$, получаем

$$mV^2 + m_1 b^2 (K_z / I_2 - \omega)^2 = 2T_0 \quad (2.4)$$

Таким образом, в трехмерном фазовом пространстве β, ω, V системы (1.3) проекция фазовой траектории на плоскость ω, V представляет собой эллипс (2.4), центр которого находится в точке $V = 0, \omega = K_z / I_2$. Полуоси этого эллипса соответственно

равны $\sqrt{2T_0/m}, \sqrt{2T_0/(m_1 b^2)}$.

Если выполняется условие

$$I_A - m_C b^2 = m_E (3b^2 - 3l_E^2 - r_E^2/2), \quad I_A = I_C + m_C a^2 \quad (2.5)$$

что достигается соответствующим выбором геометрических параметров и распределением масс платформы и задних колес тележки, и если начальные условия удовлетворяют соотношению

$$\sqrt{\frac{2T_0}{m_1 b^2}} - \frac{K_z}{I_2} > 0 \quad (2.6)$$

то решение уравнений (2.1) запишется в виде

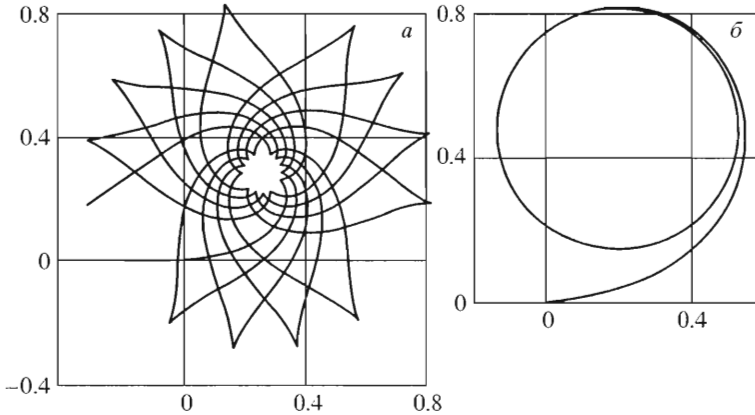
$$\text{tg} \beta(t) = \frac{1}{2} \frac{(c_2 + c_1) \xi(t) - c_2 + c_1}{\xi(t) \sqrt{c_2^2 - c_1^2}}, \quad V(t) = \pm \sqrt{\frac{2T_0}{\mu_1(t)}}$$

$$\xi(t) = \text{th} \left(\frac{1}{2} \sqrt{c_2^2 - c_1^2} (t + u_0) \right), \quad c_1 = \frac{K_z}{I_2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{2T_0}{m_1 b^2}}$$

Заметим, что условие (2.5) аналогично ограничению, налагаемому на распределение масс в астатическом гироскопе в кардановом подвесе, рассмотренному в статье [11], в которой при интегрировании уравнений движения гиперэллиптические интегралы сведены к эллиптическим интегралам.

При выполнении условия (2.6) эллипс (2.4) пересекается с плоскостью $\omega = 0$ состояний равновесия системы (2.1). При этом соответствующая фазовая траектория асимптотически приближается к точке

$$V^* = \sqrt{\frac{2I_2^2 T_0 - m_1 b^2 K_z^2}{m I_2^2}}, \quad \text{tg} \beta^* = \pm \sqrt{\frac{m b^2 K_z^2}{2I_2^2 T_0 - m_0 b^2 K_z^2}} \quad (2.7)$$



Фиг. 2

Стационарное решение (2.7) представляет собой равномерное вращение платформы вокруг вертикальной оси. При этом точка *A* движется с постоянной скоростью V^* по окружности радиуса $b \operatorname{ctg} \beta^*$.

Если начальные условия для дифференциальных уравнений таковы, что

$$\sqrt{\frac{2T_0}{m_3 b^2}} < \left| \frac{K_z}{I_2} \right| \tag{2.8}$$

то система (1.4) не будет иметь стационарных решений. Возможные типы траектории точки *A*, полученные при помощи численного интегрирования системы (1.3), построены на фиг. 2 в случае выполнения неравенства (2.8) (*a*) и при выходе системы на стационарный режим (2.7) (*б*).

3. Движение тележки при наличии упругого момента. Рассмотрим случай, когда момент пары сил пропорционален углу β поворота передней колесной пары относительно платформы

$$M = -K\beta \tag{3.1}$$

Здесь K – жесткость соответствующей пружины. При этом уравнения (1.4) можно записать в виде

$$\dot{\beta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\frac{K\beta\mu_0(\beta)}{I_2\mu_1(\beta)} - \frac{m}{b\mu_1(\beta)\cos^2\beta}V\omega, \quad \dot{V} = \frac{K\beta\operatorname{tg}\beta}{b\mu_1(\beta)} - \frac{m_1\operatorname{tg}\beta}{\mu_1(\beta)\cos^2\beta}V\omega \tag{3.2}$$

Замечание 2. Для анализа этого случая был использован [6] метод приводящего множителя Чаплыгина, из которого не удалось “извлечь какие-нибудь практические рекомендации” и понять картину движения, поэтому был выполнен [6] достаточно громоздкий качественный анализ интеграла энергии. Используемый ниже асимптотический метод позволяет практически сразу описать движение тележки.

Переходя к безразмерным переменным

$$\beta = \varepsilon x_1, \quad \omega = \varepsilon\Omega x_2, \quad V = \varepsilon\Omega b x_3, \quad K = jmb^2\Omega^2, \quad I_2 = jmb^2$$

и вводя безразмерное время $\tau = \Omega t$ ($\Omega = \sqrt{K/I_2}$), после разложения правых частей уравнений (3.2) в ряды по малому параметру ε получим

$$\begin{aligned}
 x_1' &= x_2 \\
 x_2' &= -x_1 - \varepsilon x_2 x_3 + \varepsilon^2 \frac{m_1 - m_0}{m} x_1^3 + \varepsilon^3 \frac{m_1 - m}{m} x_1^2 x_2 x_3 + \varepsilon^4 \frac{(2m - 3m_1)(m_1 - m_0)}{3m^2} x_1^5 - \\
 &- \varepsilon^5 \left(\frac{2}{3} - \frac{5m_1}{3m} + \frac{m_1^2}{m^2} \right) x_1^4 x_2 x_3 \\
 x_3' &= \varepsilon j x_1^2 - \varepsilon^2 \frac{m_1}{m} x_1 x_2 x_3 - \varepsilon^3 j \frac{3m_1 - m}{3m} x_1^4 + \varepsilon^4 \frac{m_1(3m_1 - 4m)}{3m^2} x_1^3 x_2 x_3 + \\
 &+ \varepsilon^5 j \left(\frac{2}{15} - \frac{m_1}{m} + \frac{m_1^2}{m^2} \right) x_1^6
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Уравнения (3.3) приводятся к стандартной форме асимптотического метода осреднения с помощью замены

$$x_1 = A \cos \varphi, \quad x_2 = -A \sin \varphi \tag{3.4}$$

где A – амплитуда, φ – фаза. Выполняя процедуру осреднения правых частей уравнений для медленных переменных A, x_3 по быстрой переменной φ , получим систему осредненных уравнений

$$A' = -\frac{\varepsilon}{2} A x_3, \quad x_3' = \frac{\varepsilon}{2} j A^2 \tag{3.5}$$

Первый интеграл уравнений (3.5) имеет вид:

$$jA^2 + x_3^2 = \text{const} \tag{3.6}$$

Если в начальный момент система находилась в состоянии покоя ($A(0) = A_0, x_3(0) = 0$), то из системы (3.5) вытекает, что ее решение стремится к точке $A(\infty) = 0, x_3(\infty) = A_0 \sqrt{j}$. Возвращаясь к размерным переменным, делаем вывод, что центр масс системы будет стремиться к прямолинейному движению с постоянной скоростью, равной $\beta_0 \sqrt{K/m}$.

4. Асимптотическое решение уравнений движения при наличии периодического момента. Вибрационный разгон тележки. В случае наличия периодического момента первые интегралы невозмущенной задачи, найденные в разд. 2, примем в качестве новых переменных и вместо переменных $\beta, \dot{\beta}, V$ введем переменные z, T_0, K_z , которые связаны со старыми переменными формулами

$$z = \text{tg} \beta, \quad T_0 = \frac{1}{2}(m + m_1 \text{tg}^2 \beta) V^2, \quad K_z = I_2 \left(\frac{V}{b} \text{tg} \beta + \dot{\beta} \right) \tag{4.1}$$

Обратное преобразование от новых переменных к старым имеет вид:

$$\beta = \text{arctg} z, \quad \dot{\beta} = \frac{K_z}{I_2} - \frac{z}{b} \sqrt{\frac{2T_0}{m + m_1 z^2}}, \quad V = \sqrt{\frac{2T_0}{m + m_1 z^2}} \tag{4.2}$$

Новые переменные удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{K_z}{I_2} - \frac{z}{b} \sqrt{\frac{2T_0}{m + m_1 z^2}} \right) (1 + z^2) \quad (4.3)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = M, \quad \frac{dT_0}{dt} = -\frac{M}{b} z \sqrt{\frac{2T_0}{m + m_1 z^2}}$$

Если момент, приложенный к передней колесной паре, мал, то для исследования системы (4.3) можно применить асимптотический метод, ибо в системе (4.3) переменные K_z, T_0 медленные, а z – быстрая переменная.

Для уменьшения громоздкости формул ограничимся частным случаем, когда

$$K_z = K_0 \sin vt, \quad M = K_0 v \cos vt, \quad K_0 = \text{const}, \quad v = \text{const}$$

В этом случае система (4.3) принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{K_0 \sin vt}{I_2} - \frac{z}{b} \sqrt{\frac{2T_0}{m + m_1 z^2}} \right) (1 + z^2) \quad (4.4)$$

$$\frac{dT_0}{dt} = -\frac{K_0 z v \cos vt}{b} \sqrt{\frac{2T_0}{m + m_1 z^2}}$$

Тогда после замены переменных

$$T_0 = T^* y^2, \quad K_0 = \varepsilon I_2 v, \quad t = \frac{\tau}{v \varepsilon}, \quad z = \frac{2 \varepsilon z_1}{1 - \varepsilon^2 z_1^2} \quad (4.5)$$

$$T^* = \frac{m b^2 v^2}{2}, \quad I_2 = \kappa \frac{m b^2}{2}, \quad m_1 = \mu m$$

уравнения (4.4) при малых значениях параметра ε представляют собой сингулярно возмущенную систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \frac{dz_1}{d\tau} = -\frac{z_1(1 + \varepsilon^2 z_1^2)y}{\Delta(z_1)} + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon^2 z_1^2) \sin \frac{\tau}{\varepsilon}, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{\varepsilon \kappa z_1}{\Delta(z_1)} \cos \frac{\tau}{\varepsilon} \quad (4.6)$$

$$\Delta(z_1) = \sqrt{(1 - \varepsilon^2 z_1^2)^2 + 4 \mu_1 \varepsilon^2 z_1^2}$$

Здесь z_1 – “быстрая” переменная, пропорциональная $\text{tg}(\beta/2)$, y – “медленная” переменная, ε, κ – безразмерные параметры

$$\varepsilon = \frac{K_0}{I_2 v}, \quad \kappa = \frac{2 I_2}{m b^2} \quad (4.7)$$

Для того чтобы избежать особенностей τ/ε под знаком тригонометрических функций, введем обозначения

$$\sin \frac{\tau}{\varepsilon} = z_2, \quad \cos \frac{\tau}{\varepsilon} = z_3 \quad (4.8)$$

и дополним систему (4.6) двумя дифференциальными уравнениями для z_2, z_3 с начальными условиями

$$z_2(0) = 0, \quad z_3(0) = 1$$

В итоге получим сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{\varepsilon \kappa z_1 z_3}{\Delta(z_1)}, \quad \varepsilon \frac{dz_1}{d\tau} = -z_1 y \frac{1 + \varepsilon^2 z_1^2}{\Delta(z_1)} + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon^2 z_1^2)z_2, \quad \varepsilon \frac{dz_2}{d\tau} = z_3, \quad \varepsilon \frac{dz_3}{d\tau} = -z_2 \quad (4.9)$$

$$y|_{\tau=0} = y^0, \quad \mathbf{z}|_{\tau=0} = \mathbf{z}^0$$

Заметим, что с точностью до величин порядка ε^6 первые два уравнения системы могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= -\varepsilon \kappa z_1 z_3 (1 + \varepsilon^2 z_1^2 (1 - 2\mu_1) + \varepsilon^4 z_1^4 (1 - 6\mu_1 + 6\mu_1^2) + \dots) \\ \varepsilon \frac{dz_1}{d\tau} &= -z_1 y (1 + 2\varepsilon^2 z_1^2 (1 - \mu_1) + 2\varepsilon^4 z_1^4 (1 - 4\mu_1 + 3\mu_1^2) + \dots) + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon^2 z_1^2)z_2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Асимптотическое решение системы (4.9) можно построить с помощью “метода многих масштабов”, согласно которому система заменяется системой дифференциальных уравнений в частных производных ([12], с. 43–52). Указанное решение, построенное для “медленной” переменной y с точностью до величин порядка ε^2 , содержит линейно растущее с течением времени слагаемое

$$y(\tau) = y^0 + \frac{\varepsilon \kappa \tau}{4(1 + y^{02})} + \dots \quad (4.11)$$

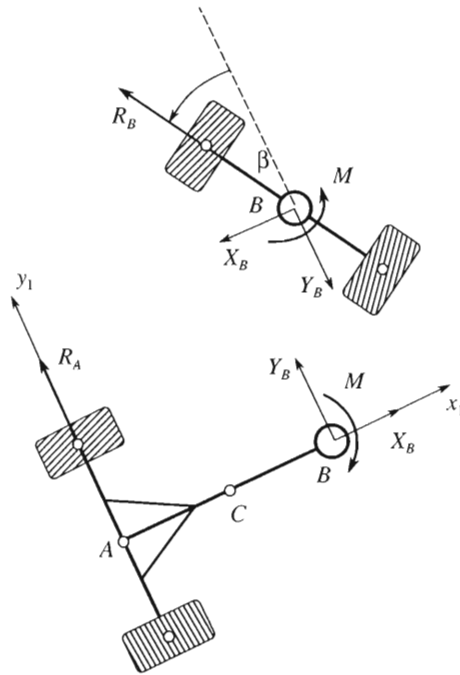
Соответственно для кинетической энергии и скорости точки A имеют место оценки

$$T_0 = \frac{M_A^4}{8mb^2 I_2^2 v^4} t^2, \quad V \approx \frac{M_A^2}{2mb I_2 v^2} t \quad (4.12)$$

из которых следует возможность ускорения робота при наличии периодического момента между платформой и передней колесной парой.

Здесь можно указать на определенную аналогию между установленным эффектом (4.11) и эффектом Магнуса [8] для уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе, когда при вибрациях оси симметрии ротора возникает систематический поворот внешнего кольца карданового подвеса. Направление этого поворота определяется знаком угла β поворота внутреннего кольца карданового подвеса. Согласно формуле (4.11) направление движения тележки определяется знаком b , т.е. направлением вектора \mathbf{AB} , проведенного из середины задней колесной пары в точку шарнирного закрепления передней колесной пары.

5. Оценка условий реализуемости неголономных связей. Уравнения Аппеля (1.3) были получены при условии выполнения неголономных связей (1.1), т.е. при отсутствии проскальзывания колес тележки по горизонтальной поверхности. Однако если силы трения в точках соприкосновения колес с поверхностью превысят предельное значение кулоновой силы сухого трения, то начнется скольжение колес и движение системы не будет описываться уравнениями (1.3). Поэтому определим силы трения в точках соприкосновения колес с поверхностью, что позволяет оценивать характеристики конструкции и параметры “разгоняющего” момента M (его амплитуду и частоту), при которых начинается процесс проскальзывания.



Фиг. 3

При выводе искомых соотношений будем использовать общие теоремы динамики, которые записываются для двух подсистем (платформы AB и передней колесной пары B), изображенных на фиг. 3. При этом для простоты ограничимся случаем невесомых колес. Для оценки реализуемости неголономных связей используем аксиому Кулона

$$|R_A| \leq f N_A, \quad |R_B| \leq f N_B \quad (5.1)$$

где f – коэффициент сухого трения, N_A , N_B – реакции опор к поверхности.

После проведения соответствующих выкладок получим систему неравенств

$$\left| (m_C a + m_B b) \dot{\Omega} + m_C \frac{(b-a)V^2 \operatorname{tg} \beta}{b^2} + m \dot{V} \operatorname{ctg} \beta \right| \leq f m_C g \left(\frac{b-a}{b} \right) \quad (5.2)$$

$$\left| (m_C a + m_B b) \frac{V^2 \operatorname{tg} \beta}{b^2 \cos \beta} - \frac{m \dot{V}}{\sin \beta} \right| \leq f g \left(\frac{m_C a + m_B b}{b} \right)$$

определяющих область изменения переменных V , \dot{V} , β , $\dot{\Omega}$, в которых выполнены уравнения связей (1.1). За пределами этой области начинается режим скольжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00637).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ispolov Yu.G., Smolnikov B.A.* Skateboard dynamics // Computer Methods in Appl. Mech. and Eng. 1966. № 131. С. 327–333.
2. *Черноусько Ф.Л.* Движение многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 8–18.
3. *Мартыненко Ю.Г., Осадченко Н.В.* Движение шарнирного двузвенника по гладкой кривой переменной кривизны // Вест. МЭИ. 2001. № 3. С.14–18.
4. *Журавлев В.Ф.* Об одной модели механизма движения змеи // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 534–538.
5. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
6. *Лобас Л.Г.* Неголономные модели колесных экипажей. Киев: Наук. думка, 1986. 232 с.
7. *Гусев Д.М., Мартыненко Ю.Г.* Об одном способе вибрационного ускорения колесного робота // Материалы науч. школы-конференции “Мобильные роботы и мехатронные системы”. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 14–28.
8. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
9. *Magrus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin, etc.: Springer, 1971 = *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
10. *Девянин Е.А.* О движении колесных роботов // Докл. науч. школы-конференции “Мобильные роботы и мехатронные системы”. 1998. М.: Ин-т механики МГУ, 1999. С. 169–200.
11. *Климов Д.М., Степаненко Н.П.* Об интегрировании уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе // Инж. ж. МТТ. 1967. № 6. С. 143–150.
12. *Мартыненко Ю.Г.* Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.

Москва
e-mail: martynenko@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
25.III.2003