УДК 531.36

© 2004 г. И. И. Блехман, Н.П. Ярошевич

О РАСШИРЕНИИ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ (ЭКСТРЕМАЛЬНОГО СВОЙСТВА) УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧАХ О СИНХРОНИЗАЦИИ

Путем использования метода прямого разделения движений обосновывается расширенная формулировка интегрального критерия устойчивости, позволяющая рассматривать как "простые", так и "непростые" случаи задач о синхронизации объектов с почти равномерными вращениями. На примерах показано, что результаты, найденные ранее методами малого параметра Пуанкаре и прямого разделения движений в процессе достаточно громоздких вычислений, можно значительно проще получить при использовании расширенной формулировки интегрального критерия устойчивости.

Исследование синхронизации существенно упрощается, а результатам удается придать более удобную форму, если справедлив так называемый интегральный критерий устойчивости синхронных движений [1–3]. Однако в задачах о кратной синхронизации и в ряде задач о простой синхронизации идентичных дебалансных вибровозбудителей в достаточно широком классе важных для приложений случаев (названных "непростыми") в том виде, как он был получен методом малого параметра Пуанкаре – Ляпунова, интегральный критерий не позволяет найти значения фаз вращения роторов вибровозбудителей в устойчивых синхронных движениях [2–6].

На основе использования методов Пуанкаре и Ляпунова было установлено следующее замечательное свойство синхронных движений объектов с почти равномерными вращениями и ряда других динамических объектов [1–3]: устойчивые синхронные движения соответствуют точкам строгого грубого минимума некоторой функции D ("потенциальной функции"), так называемых порождающих параметров – начальных фаз вращений $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (в задаче о самосинхронизации – разностей фаз $\alpha_s - \alpha_k$, где k – число вращений; см. ниже). В важных для приложений случаях потенциальных функция D представляет собой среднее за период вращений функции Лагранжа системы, взятое с противоположным знаком, а в других, несколько более частных случаях – функции Лагранжа колебательной части системы, т.е. системы с "остановленными" вращениями.

Путем использования интегрального критерия было доказано при достаточно общих предположениях наличие тенденции к синхронизации широкого класса объектов и решен ряд важных прикладных задач [2]. Экстремальное свойство синхронных ("резонансных") движений было установлено также для движений небесных тел (см., например [2, 7–9]).

Между тем существуют случаи, когда интегральный критерий в указанной форме не позволяет найти значения фаз в устойчивых синхронных движениях. Это относится, в частности, к задачам о кратной синхронизации вибровозбудителей в квазилинейных системах и ряду задач о синхронизации нескольких (более трех) идентичных вибровозбудителей [2, 4–6]. В этих случаях, названных "непростыми", функция D оказывается не зависящей от некоторых фаз, и поэтому ее минимум не является строгим.

Ниже показано, что интегральный критерий остается справедливым, если функция D вычисляется не на основе порождающего решения, а более точно – настолько, насколько это необходимо для установления ее строгого минимума.

1. Задача о синхронизации объектов с почти равномерными вращениями. Эта задача может быть сформулирована следующим образом [2, 3]. Рассматривается система с обобщенными координатами φ_s ($s = 1, \ldots, k$) ("вращательные координаты") и u_r ($r = 1, \ldots, \nu$) ("колебательные координаты"). Здесь предположим, что функция Лагранжа системы может быть представлена в форме

$$L = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k} I_s\dot{\varphi}_s^2 + L_{\sim}(\varphi, \dot{\varphi}, u, \dot{u}, \omega t) \tag{1.1}$$

а неконсервативные обобщенные силы, соответствующие вращательным координатам, в виде

$$Q_{\varphi_s} = -k_s(\dot{\varphi}_s - \sigma_s n_s\omega) + \sigma_s k_s(\omega_s - n_s\omega) \tag{1.2}$$

Здесь I_s, k_s и ω – положительные постоянные; $\sigma_s = \pm 1$, n_s – целые положительные числа; ω_s – так называемые парциальные угловые скорости вращения – угловые скорости вращений в случае, когда колебательные движения отсутствуют ($u_r = \mathrm{const}$).

В случае задачи о синхронизации роторов в форме (1.2) может быть представлена разность между моментом $L_s(\dot{\varphi}_s)$, вращающим s-й ротор, и моментом сил сопротивления $R_s(\dot{\varphi}_s)$. Предполагается, что уравнения движения системы могут быть записаны в виде

$$I_s\ddot{\varphi}_s + k_s(\dot{\varphi}_s - \sigma_s n_s\omega) = \mu\Phi_s, \quad s = 1, \ldots, k \tag{1.3}$$

$$E_{u_r}(L_{\sim}) = Q_{u_r}, \quad r = 1, \ldots, \nu \tag{1.4}$$

где $E_q = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}} - \dfrac{\partial}{\partial q}$ – эйлеров оператор, а Q_q – неконсервативная обобщенная сила, соответствующая координате q,

$$\mu\Phi_s = \sigma_s k_s(\omega_s - n_s\omega) - E_{\varphi_s}(L_{\sim}) \tag{1.5}$$

$\mu > 0$ – малый параметр. Функции $L_{\sim}$ и Q_{u_r} могут зависеть как от обобщенных координат и скоростей, так и от времени $\tau = \omega t$, являясь 2π-периодическими по φ_s и τ; функции $L_{\sim}$ и Q_{u_r} могут зависеть от μ. Относительно гладкости функций делаются предположения, обеспечивающие существование всех рассматриваемых ниже решений и разложений.

Соответствующие уравнениям (1.3), (1.4) порождающие уравнения ($\mu = 0$) допускают семейство решений

$$\varphi_s^0 = \sigma_s(n_s\omega t + \alpha_s) \tag{1.6}$$

отвечающее равномерным вращениям с частотами $|\dot{\varphi}_s^0| = n_s\omega$ и некоторыми произвольными фазами α_s.

Задача о синхронизации состоит в нахождении условий существования и устойчивости решений уравнений (1.3), (1.4) вида

$$\varphi_s = \sigma_s[n_s\omega t + \alpha_s + \mu\psi_s^{(p)}(\omega t, \mu)], \quad u_r = u_r^{(p)}(\omega t, \mu) \tag{1.7}$$

где $\psi_s^{(p)}$ и $u_r^{(p)}$ – 2π-периодические функции $\tau = \omega t$. Решение этой задачи методами малого параметра Пуанкаре – Ляпунова приведено, в частности, в книге [2].

2. Решение задачи методом прямого разделения движений. При решении задачи методом прямого разделения движений [3] решение уравнений разыскивается в форме

$$\varphi_s = \sigma_s[n_s\omega t + \alpha_s(t) + \psi_s(t, \omega t, \mu)], \quad u_r = u_r(t, \omega t, \mu) \tag{2.1}$$

где $\alpha_s(t)$ – "медленные", а ψ_s и u_r – "быстрые" 2π-периодические составляющие (t – "медленное", а $\tau = \omega t$ – "быстрое" время, ω – "большой" параметр), причем

$$\langle \psi_s(t, \omega t, \mu)\rangle = 0, \quad \langle u_r(t, \omega t, \mu)\rangle = 0 \tag{2.2}$$

а угловые скобки означают осреднение по τ за период 2π. Предполагается также, что

$$\dot{\alpha}_s \ll n_s\omega \tag{2.3}$$

Система (1.3), (1.4) сводится к следующей системе интегродифференциальных уравнений для переменных α_s, ψ_s и u_r:

$$I_s\ddot{\alpha}_s = -k_s\dot{\alpha}_s + \mu\sigma_s\langle\Phi_s\rangle \tag{2.4}$$

$$I_s\ddot{\psi}_s = -k_s\dot{\psi}_s + \mu\sigma_s(\Phi_s - \langle\Phi_s\rangle) \tag{2.5}$$

$$E_{u_r}(L) = Q_r \tag{2.6}$$

Согласно методу прямого разделения движений для получения уравнений медленных движений в первом приближении, справедливых, по крайней мере, в окрестности стационарных режимов $\alpha_s = \mathrm{const}$, достаточно найти приближенное асимптотически устойчивое периодическое решение уравнений быстрых движений (2.5), (2.6) при постоянных ("замороженных") $\dot{\alpha}_s$, α_s и t и воспользоваться им при вычислении среднего в правых частях уравнений (2.4); обозначим такое решение через ψ_s^*, u_r^* и соответственно через φ_s^*. Тогда придем к следующим уравнениям медленных движений:

$$I_s\ddot{\alpha}_s + k_s\dot{\alpha}_s = \mu\sigma_s\langle[\Phi_s]_*\rangle, \quad s = 1, \ldots, k \tag{2.7}$$

Квадратные скобки со звездочкой указывают, что заключенная в них функция вычислена для решения ψ_s^*, u_r^*. Введем функцию

$$\Lambda_{\sim *} = \langle[L_\sim]_*\rangle \tag{2.8}$$

и вычислим производную этой функции по α_j. В результате несложных преобразований, включающих интегрирование по частям при учете равенств (1.4) и (2.1), находим

$$\frac{\partial\Lambda_{\sim *}}{\partial\alpha_j} = \frac{\partial\langle[L_\sim]_*\rangle}{\partial\alpha_j} = \sum_{s=1}^{k}\left\langle\left[\frac{\partial L_\sim}{\partial\dot{\varphi}_s}\right]_*\frac{\partial\dot{\varphi}_s}{\partial\alpha_j} + \left[\frac{\partial L_\sim}{\partial\varphi_s}\right]_*\frac{\partial\varphi_s^*}{\partial\alpha_j}\right\rangle + \sum_{r=1}^{\nu}\left\langle\left[\frac{\partial L_\sim}{\partial\dot{u}_r}\right]_*\frac{\partial\dot{u}_r^*}{\partial\alpha_j} + \left[\frac{\partial L_\sim}{\partial u_r}\right]_*\frac{\partial u_r^*}{\partial\alpha_j}\right\rangle =$$

$$= -\sum_{s=1}^{k}\left\langle[E_{\varphi_s}(L_\sim)]_*\frac{\partial\varphi_s^*}{\partial\alpha_j}\right\rangle - \sum_{r=1}^{\nu}\left\langle[E_{u_r}(L_\sim)]_*\frac{\partial u_r^*}{\partial\alpha_j}\right\rangle = \tag{2.9}$$

$$= -\sigma_j\langle[E_{\varphi_j}(L_\sim)]_*\rangle - \sum_{r=1}^{\nu}\left\langle[Q_{u_r}]_*\frac{\partial u_r^*}{\partial\alpha_j}\right\rangle - \sum_{s=1}^{k}\sigma_s\left\langle[E_{\varphi_s}(L_\sim)]_*\frac{\partial\psi_s^*}{\partial\alpha_j}\right\rangle$$

Полученное соотношение может быть значительно упрощено. Прежде всего заметим, что в его правой части множитель при σ_s под знаком последней суммы при использовании равенств (1.5) и (2.2) может быть представлен в форме

$$\left\langle [E_{\varphi_j}(L_{\sim})]_* \frac{\partial \psi_s^*}{\partial \alpha_j} \right\rangle = \left\langle [\sigma_s k_s(\omega_s - n_s\omega) - \mu\Phi_s]_* \frac{\partial \psi_s^*}{\partial \alpha_j} \right\rangle = -\mu \left\langle [\Phi_s]_* \frac{\partial \psi_s^*}{\partial \alpha_j} \right\rangle \tag{2.10}$$

Поскольку, согласно соотношениям (2.5) и (2.2), $\psi_s^* = \psi_s^0 + \mu\psi_s^{(1)} + \ldots$, где $\psi_s^0 = 0$, то этот множитель имеет порядок μ^2 и, как правило, последняя сумма в равенстве (2.9) может быть отброшена. Исключение составляют особые случаи, когда в остальных слагаемых соотношения (2.9) существенны члены того же порядка; предполагаем, что такие ситуации не имеют места. В частности, это справедливо при решении рассматриваемых ниже задач о двукратной синхронизации, когда функцию $\Lambda_{\sim *}$ достаточно вычислять с точностью до членов порядка не выше μ.

Далее заметим, что согласно соотношениям (2.1) и (2.3)

$$\langle T_s \rangle = \frac{1}{2} I_s \langle \dot{\varphi}_s^2 \rangle = \frac{1}{2} I_s \langle [n_s\omega + \dot{\alpha}_s(t) + \dot{\psi}_s]^2 \rangle \approx \frac{1}{2} I_s \langle [n_s\omega + \dot{\psi}_s]^2 \rangle = \frac{1}{2} I_s \langle \dot{\psi}_s^2 \rangle + C \tag{2.11}$$

где C – не зависящая от α_s величина. Поэтому также с точностью до членов порядка μ^2

$$\frac{\partial \Lambda_{\sim *}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \Lambda_*}{\partial \alpha_j} \tag{2.12}$$

Наконец, поскольку согласно представлениям (2.1) функции $\dot{\alpha}_s$ входят во все соотношения только в комбинации $n_s\omega + \dot{\alpha}_s$, то вследствие соотношения (2.3) можно опустить звездочку в равенствах (2.9), (2.10) и (2.12). В результате уравнения медленных движений (2.4) могут быть представлены в форме

$$I_s \ddot{\alpha}_s + k_s \dot{\alpha}_s = -\frac{\partial D}{\partial \alpha_s}, \quad s = 1, \ldots, k \tag{2.13}$$

где

$$D = -(\Lambda + B), \quad \frac{\partial B}{\partial \alpha_s} = k_s(\omega_s - n_s\omega) + \sum_{r=1}^{\nu} \left\langle [Q_{u_r}] \frac{\partial u_r}{\partial \alpha_s} \right\rangle \tag{2.14}$$

причем D – потенциальная функция, а B – так называемый потенциал осредненных неконсервативных обобщенных сил, соответствующих колебательным координатам (предполагается, что такой потенциал существует).

3. Расширенная формулировка интегрального критерия. Из уравнения (2.13) непосредственно следует (см., например [10]) справедливость, при сделанных выше предположениях, расширенной формулировки интегрального критерия (экстремального свойства) синхронных движений объектов с почти равномерными вращениями (речь идет об асимптотической устойчивости в малом в задаче о внешней синхронизации и об асимптотической орбитальной устойчивости в задачах о самосинхронизации [1–3]): устойчивые синхронные движения объектов соответствуют значениям фаз $\alpha_s = \mathrm{const}$, которым отвечают строгие грубые минимумы потенциальной функции $D = D(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ (в задаче о самосинхронизации $D = D(\alpha_1 - \alpha_k, \ldots, \alpha_{k-1} - \alpha_k)$, и речь идет о минимумах по разностям фаз $\alpha_s - \alpha_k$); при этом в отличие от прежней формулировки функция D может вычисляться не обязательно в порождающем приближении ($\mu = 0$), а с любой точностью по μ с двумя оговорками:

1) дополнительно предполагается медленность изменения α_s по сравнению с ψ_s и малость $\dot{\alpha}_s$ по сравнению с $n_s\omega$, т.е. $\dot{\alpha}_s \ll \dot{\psi}_s$ и $\dot{\alpha}_s \ll n_s\omega$;

2) выражения (2.10) и (2.11) должны быть малыми более высокого порядка, чем слагаемые, учитываемые при вычислении функций Λ и $\mathbf{B}$.

Более точное вычисление функции D дает возможность устанавливать наличие строгих минимумов в тех ("непростых") случаях, когда эта функция в порождающем приближении такими минимумами принципиально не обладает.

Как и ранее (см. [1–3]), выражение для функции D существенно упрощается при некоторых дополнительных предположениях.

1°. В случае, когда парциальные скорости ω_s равны соответствующим кратностям синхронной скорости ω, т.е. $\omega_s = n_s\omega$, а неконсервативные силы Q_{u_r} пренебрежимо малы

$$D = -\Lambda = -\langle [L] \rangle \tag{3.1}$$

т.е. потенциальная функция представляет собой взятую с противоположным знаком осредненную за период функцию Лагранжа системы, вычисленную для решений (1.7).

2°. Пусть система линейна по колебательным координатам и функция L представима в форме

$$L = L^* + L^{(\mathrm{I})} + L^{(\mathrm{II})} \tag{3.2}$$

где

$$L^* = \sum_{s=1}^{k} L_s(\dot{\varphi}_s, \varphi_s) + \sum_{r=1}^{\nu} f_r(\dot{\varphi}_1, \ldots, \dot{\varphi}_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_k)\dot{u}_r + \sum_{s=1}^{k} F_s(\varphi_s) \tag{3.3}$$

$$L^{(\mathrm{I})} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}(a_{rj}\dot{u}_r\dot{u}_j - b_{rj}u_r u_j), \quad L^{(\mathrm{II})} = \Psi(\dot{\varphi}_1, \ldots, \dot{\varphi}_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_k) \tag{3.4}$$

Здесь a_{rj} и b_{rj} – постоянные, а L_s, f_r, F_s и Ψ – функции перечисленных переменных, причем L_s, f_r, F_s периодически по φ_s с периодом 2π. Пусть к тому же обобщенные силы Q_{u_r} отсутствуют или пренебрежимо малы.

Тогда справедливы соотношения

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha_s} = \frac{\partial(\Lambda^{(\mathrm{II})} - \Lambda^{(\mathrm{I})})}{\partial\alpha_s} + O(\mu)$$
$$(\Lambda^{(\mathrm{I})} = \langle [L^{(\mathrm{I})}] \rangle, \quad \Lambda^{(\mathrm{II})} = \langle [L^{(\mathrm{II})}] \rangle) \tag{3.5}$$

которые отличаются от справедливых для порождающего решения (см. [3], гл. 3, равенства (2.20)) тем, что они выполняются с точностью до членов порядка μ; это легко устанавливается посредством вычислений, аналогичных приведенных в [3].

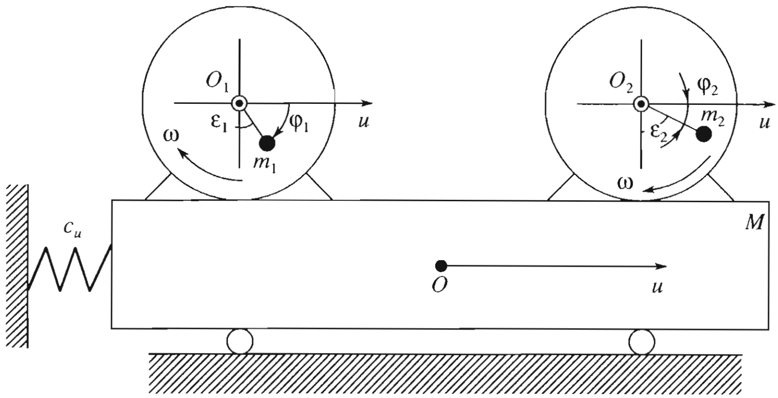
В результате в данном случае, при условии, что в равенстве (3.5) можно пренебречь слагаемыми порядка μ, можно принять

$$D = \Lambda^{(\mathrm{I})} - \Lambda^{(\mathrm{II})} \tag{3.6}$$

а в случае $\Lambda^{(\mathrm{II})} = 0$ положить

$$D = \Lambda^{(\mathrm{I})} \tag{3.7}$$

Таким образом, в данном случае потенциальная функция представляет собой осредненную за период функцию Лагранжа $L^{(\mathrm{I})}$ только колебательной части системы.



Фиг. 1

Заметим, что к тем же результатам можно прийти, используя вариационный принцип Гамильтона, видоизменив и дополнив исследование, выполненное А.И. Лурье [11].

4. Примеры, сопоставление с результатами, полученными классическими методами.

4.1. *Задача о двукратной синхронизации двух вибровозбудителей на вибрирующей платформе (несущем теле) с одной степенью свободы* (фиг. 1). На несущем теле установлены два дебалансных вибровозбудителя, приводимых во вращение электродвигателями асинхронного типа. Несущее тело может перемещаться относительно неподвижного основания вдоль некоторого фиксированного направления Ou и связано с основанием посредством линейных упругих элементов. Уравнения движения (1.3), (1.4) для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде [2]

$$\begin{aligned} &I_s\ddot{\varphi}_s + k_s(\dot{\varphi}_s - \sigma_s n_s\omega) = \mu[L_s(\sigma_s n_s\omega) - R(n_s\omega)] + m_s\varepsilon_s(\ddot{u}\sin\varphi_s + g\cos\varphi_s)], \\ &s = 1, 2; \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$M\ddot{u} + c_u u = \sum_{j=1}^{2} m_j\varepsilon_j(\ddot{\varphi}_j\sin\varphi_j + \dot{\varphi}_j^2\cos\varphi_j) \tag{4.2}$$

где m_s – масса ротора s-го вибровозбудителя, ε_s – его эксцентриситет, I_s – момент инерции относительно оси вращения, $k_s > 0$ – постоянные коэффициенты, характеризующие демпфирование, M – масса несущего тела с учетом массы вибровозбудителей, c_u – жесткость упругих элементов, g – ускорение силы тяжести.

При решении задачи методом прямого разделения движений переходим, при учете представлений (2.1), от уравнений (4.1), (4.2) к уравнениям медленного и быстрого движений (2.4), (2.5), где

$$\Phi_s = L_s(n_s\omega) - R_s(n_s\omega) + m_s\varepsilon_s[\ddot{u}\sin(n_s\omega t + \alpha_s + \psi_s) + g\cos(n_s\omega t + \alpha_s + \psi_s)]$$

В свою очередь, уравнение (2.6) принимает вид

$$M\ddot{u} + c_u u = \sum_{j=1}^{2} m_j\varepsilon_j[\ddot{\psi}_j\sin(n_j\omega t + \alpha_j + \psi_j) + (n_j\omega + \dot{\psi}_j)^2\cos(n_j\omega t + \alpha_j + \psi_j)] \tag{4.3}$$

Периодические решения уравнений быстрых движений (2.5) разыскиваются в виде ряда по степеням μ. Отметим, что в рассматриваемом случае кратной синхронизации уже недостаточно в первом приближении принять $\psi_s = 0$. Вместе с тем, как убедимся ниже, достаточно вычислить ψ_s с точностью до членов порядка не выше первого. С указанной точностью находим ($p^2 = c_u/M$):

$$\mu\psi_s = -\frac{(sm_s\varepsilon_s\omega)^2}{8MI_s[(s\omega)^2 - p^2]}\sin 2(s\omega t + \alpha_s) - \frac{m_s\varepsilon_s g}{(s\omega)^2 I_s}\cos(s\omega t + \alpha_s) +$$

$$+\frac{1}{2}(-1)^s(31 - 15s)\frac{m_1\varepsilon_1 m_2\varepsilon_2\omega^2}{MI_s[(2\omega/s)^2 - p^2]}\left[\frac{1}{9}\sin(3\omega t + \alpha_1 + \alpha_2) + (-1)^s\sin(\omega t + \alpha_2 - \alpha_1)\right]$$

$s = 1, 2$

Тогда решение уравнения (4.3) принимает вид

$$u = -\frac{m_1\varepsilon_1\omega^2}{M(\omega^2 - p^2)}\cos(\omega t + \alpha_1) -$$

$$-\frac{4m_2\varepsilon_2\omega^2}{M(4\omega^2 - p^2)}\cos(2\omega t + \alpha_2) - \frac{2m_1^2\varepsilon_1^2 g\omega^2}{MI_1\omega^2(4\omega^2 - p^2)}\sin 2(\omega t + \alpha_1) \qquad (4.4)$$

Здесь выписаны только слагаемые, влияющие в рамках рассматриваемого приближения на результат вычисления осредненной функции Лагранжа.

Подставив выражение (4.4) в выражения для кинетической и потенциальной энергии колебательной части системы

$$T^{(1)} = \frac{1}{2}M\dot{u}^2, \quad \Pi^{(1)} = \frac{1}{2}c_u u^2$$

и осреднив их за период, получим для рассматриваемого случая потенциальную функцию

$$D = \Lambda^{(1)} = \langle[L^{(1)}]\rangle = \langle[T^{(1)} - \Pi^{(1)}]\rangle = \frac{4m_1^2\varepsilon_1^2 m_2\varepsilon_2 g\omega^2}{MI_1(4\omega^2 - p^2)}\sin(2\alpha_1 - \alpha_2)$$

В результате уравнения медленных движений, описывающие также движения в окрестности установившихся синхронных режимов $\alpha_s = \text{const}$, могут быть представлены в форме (2.13).

Полученное выражение для функции D позволяет записать выражения для вибрационных моментов

$$W_s = \frac{\partial\Lambda^{(1)}}{\partial\alpha_s} = \frac{4(5 - 3s)m_1^2\varepsilon_1^2 m_2\varepsilon_2 g\omega^2}{MI_1(4\omega^2 - p^2)}\cos(2\alpha_1 - \alpha_2), \quad s = 1, 2 \qquad (4.5)$$

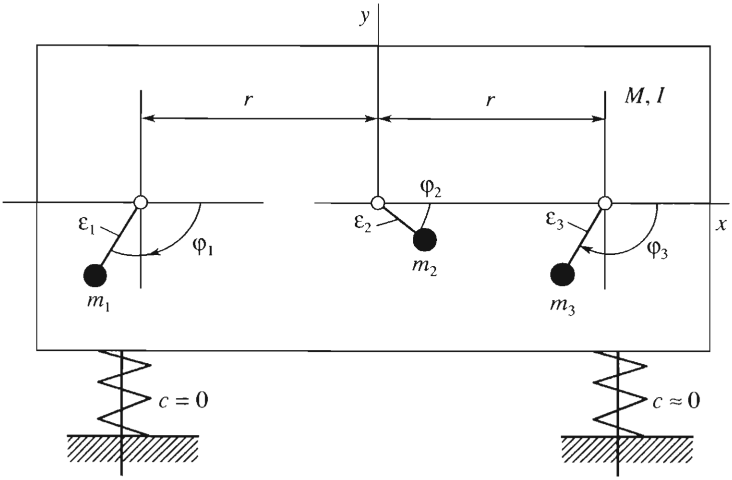
Эти выражения в точности совпадают с полученными более сложным путем с помощью метода Пуанкаре [4]. Следовательно, совпадут и все другие результаты.

4.2. *Двукратная синхронизация трех дебалансных вибровозбудителей, симметрично расположенных на мягко виброизолированном плоско колеблющемся твердом теле (фиг. 2).* Уравнения движения системы имеют вид [2, 5]

$$I_s\ddot{\varphi}_s + k_s(\dot{\varphi}_s - \sigma_s n_s\omega) = \mu[L_s(\sigma_s n_s\omega) - R_s(n_s\omega) +$$

$$+ m_s\varepsilon_s(\ddot{x}\sin\varphi_s + \ddot{y}\cos\varphi_s - r_s\ddot{\varphi}\cos\varphi_s + g\cos\varphi_s)], \quad s = 1, 2, 3$$

$$M\ddot{x} = \sum_{j=1}^{3} m_j\varepsilon_j(\ddot{\varphi}_j\sin\varphi_j + \dot{\varphi}_j^2\cos\varphi_j)$$



Фиг. 2

$$M\ddot{y} = \sum_{j=1}^{3} m_j\varepsilon_j(\ddot{\varphi}_j\cos\varphi_j - \dot{\varphi}_j^2\sin\varphi_j)$$

$$I\ddot{\phi} = \sum_{j=1}^{3} m_j\varepsilon_j r_j(\dot{\varphi}_j^2\sin\varphi_j - \ddot{\varphi}_j\cos\varphi_j)$$

где I – момент инерции несущего тела, r_s – расстояние от оси s-го вибровозбудителя до центра тяжести несущего тела. Крайние вибровозбудители одинаковы и их оси равноудалены от центра тяжести, т.е. $m_1\varepsilon_1 = m_3\varepsilon_3$, $I_1 = I_3$, $r_1 = r_3 = r$, $r_2 = 0$. Все вибровозбудители вращаются в одинаковых направлениях, при этом частота центрального вибровозбудителя в два раза больше частоты крайних, т.е. $n_1 = n_3 = 1$, $n_2 = 2$.

Применяя метод прямого разделения движений, при учете соотношений (2.1) нетрудно прийти к уравнениям медленного и быстрого движений (2.4)–(2.6), где для рассматриваемой задачи

$$\Phi_s = L_s(n_s\omega) - R_s(n_s\omega) + m_s\varepsilon_s[\ddot{x}\sin\chi_s + \ddot{x}\psi_s\cos\chi_s +$$
$$+ \ddot{y}\cos\chi_s - \ddot{y}\psi_s\sin\chi_s + r_s\ddot{\phi}\cos\chi_s - r_s\ddot{\phi}\psi_s\sin\chi_s + g\cos\chi_s - g\psi_s\sin\chi_s], \quad \chi_s = n_s\omega t + \alpha_s$$

Разыскивая вначале периодические решения уравнений быстрых движений (2.4) (в том же приближении, что и в предыдущем примере), находим

$$\mu\psi_s = \frac{4m_1\varepsilon_1 m_2\varepsilon_2}{MI_1}\sin(\omega t + \alpha_2 - \alpha_s) - \frac{m_1\varepsilon_1 g}{I_1\omega^2}\cos(\omega t + \alpha_s) +$$
$$+ \frac{(m_1\varepsilon_1 r)^2}{8I_1}[\sin 2(\omega t + \alpha_s) - \sin(2\omega t + \alpha_1 + \alpha_3)], \quad s = 1, 3$$

$$\mu\psi_2 = -\frac{m_1\varepsilon_1 m_2\varepsilon_2}{MI_2}[\sin(\omega t + \alpha_2 - \alpha_1) + \sin(\omega t + \alpha_2 - \alpha_3)] - \frac{m_2\varepsilon_2 g}{4I_2\omega^2}\cos(2\omega t + \alpha_2)$$

Тогда уравнения (2.6) принимают вид

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{m_1\varepsilon_1\omega^2}{M}[\cos(\omega t+\alpha_1)+\cos(\omega t+\alpha_3)]+\frac{4m_2\varepsilon_2\omega^2}{M}\cos(2\omega t+\alpha_2)+\\
&+\frac{2m_1^2\varepsilon_1^2 g}{MI_1}[\sin 2(\omega t+\alpha_1)+\sin 2(\omega t+\alpha_3)]\\
\ddot{y} &= -\frac{m_1\varepsilon_1\omega^2}{M}[\sin(\omega t+\alpha_1)+\sin(\omega t+\alpha_3)]-\frac{4m_2\varepsilon_2\omega^2}{M}\sin(2\omega t+\alpha_2)+\\
&+\frac{2m_1^2\varepsilon_1^2 g}{MI_1}[\cos 2(\omega t+\alpha_1)+\cos 2(\omega t+\alpha_3)]\\
\ddot{\varphi} &= -\frac{m_1\varepsilon_1 r\omega^2}{I}[\sin(\omega t+\alpha_1)-\sin(\omega t+\alpha_3)]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь выписаны только слагаемые, влияющие в рамках рассматриваемого приближения на результат вычисления функции Лагранжа.

Ввиду предположения о мягкости упругих опор среднее значение функции Лагранжа равно просто среднему значению кинетической энергии несущего тела

$$D = \Lambda^{(1)} = \langle[T^{(1)}]\rangle = \frac{1}{2}\langle[M(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+I\dot{\varphi}^2]\rangle =$$

$$= \left(\frac{m_1^2\varepsilon_1^2\omega^2}{M}-\frac{m_1^2\varepsilon_1^2 r^2\omega^2}{2I}\right)\cos(\alpha_1-\alpha_3)+\frac{2m_1^2\varepsilon_1^2 m_2\varepsilon_2 g}{I_1 M}[\sin(2\alpha_1-\alpha_2)+\sin(2\alpha_3-\alpha_2)]$$

В итоге при учете уравнений (2.13) для определения медленных составляющих (средних фаз вращения роторов α_s) получается система

$$\begin{aligned}
I_s\ddot{\alpha}_s+k_s\dot{\alpha}_s &= L_s(\omega)-R_s(\omega)+\\
&+(2-s)\frac{m_1^2\varepsilon_1^2\omega^2}{M}\left(1-\frac{Mr^2}{2I}\right)\sin(\alpha_1-\alpha_3)-\frac{4m_1^2\varepsilon_1^2 m_2\varepsilon_2 g}{I_1 M}\cos(2\alpha_s-\alpha_2), \quad s = 1, 3\\
I_2\ddot{\alpha}_2+k_2\dot{\alpha}_s &= L_2(2\omega)-R_2(2\omega)+\\
&+\frac{2m_1^2\varepsilon_1^2 m_2\varepsilon_2 g}{I_1 M}[\cos(2\alpha_1-\alpha_2)+\cos(2\alpha_3-\alpha_2)]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Уравнения медленных процессов установления синхронных движений (4.7) в точности совпадают с уравнениями, полученными более сложным путем (с помощью метода прямого разделения движений [5]). Поэтому совпадут также и все результаты. Подчеркнем, что в рассматриваемых здесь задачах о двукратной синхронизации оказалось достаточным решения уравнений (2.5) с точностью до членов порядка μ. Уравнения (2.6) решаются так же, как и в "простом" случае, но с учетом более точного решения уравнений (2.5).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00621) и Программы 19 президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блехман И.И.* Обоснование интегрального признака устойчивости движения в задачах о самосинхронизации вибраторов // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1100–1103.
2. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.: Synchronization in Science and Technology // New York: ASME Press, 1988.
3. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука. Физматлит, 1994. 394 с.: Vibrational Mechanics. Nonlinear Dynamic Effects, General Aproach, Applications. Singapore etc: World Scientific, 2000.
4. *Барзуков О.П.* Кратная синхронизация в системе слабосвязанных объектов с одной степенью свободы // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 225–231.
5. *Ярошевич Н.П.* Использование эффекта самосинхронизации при возбуждении бигармонических колебаний // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1990. № 6. С. 23–27.
6. *Малахова О.З.* Об особом случае в теории самосинхронизации механических вибровозбудителей // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 29–36.
7. *Ovenden M.W., Feagin T., Graff O.* On the principle of least interaction action and the Laplacean satellites of Jupiter and Uranus // Celest. Mech. V. 8. № 4. P. 455–471.
8. *Белецкий В.В.* Экстремальные свойства резонансных движений // Устойчивость движения. Аналитическая механика. Управление движением. М.: Наука, 1981. С. 41–55.
9. *Khentov A.* On the principle of strong interaction for the resonand orbital motions of some celestial bodies // Mathematics and Computers Simulation. 2000. V. 58. № 4–6. P. 423–434.
10. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
11. *Лурье А.И.* Некоторые задачи самосинхронизации // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. Т. 3. С. 440–455.

Санкт-Петербург, Луцк (Украина)
e-mail: blekhman@vibro.ipme.ru
rektor@dtn.lutsk.ua

Поступила в редакцию
13.X.2003