УДК 531.36

© 2004 г. Г. А. Леонов

КРИТЕРИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕАРИЗАЦИЙ

Рассматриваются эффекты Перрона инверсии знака характеристических показателей Ляпунова для решений нелинейных систем и их первых приближений при одних и тех же начальных условиях. На основе метода триангуляции Перрона–Винограда доказываются критерии неустойчивости по Красовскому и Ляпунову.

В настоящее время проблема обоснования нестационарных линеаризаций для сложных, непериодических движений поразительно напоминает ситуацию стодвадцатилетней давности. Основатели теории автоматического регулирования Максвелл (1868 г.) и Вышнеградский (1876 г.) [1] смело проводили линеаризацию в окрестности стационарных движений, оставив обоснование такой линеаризации Пуанкаре (1886 г.) и Ляпунову (1892 г.). Среди широкого круга специалистов по хаотической динамике возникло стойкое убеждение, что положительность старшего характеристического показателя линейной системы первого приближения влечет за собой неустойчивость решений исходной системы (см., например [2], с. 227, [3], с. 72, [4], с. 26, [5], с. 323, [6]). Более того, существует огромное количество компьютерных экспериментов, где используются различные численные методики вычисления характеристических показателей и ляпуновских экспонент линейных систем первого приближения. При этом авторы, как правило, совершенно игнорируя обоснование процедуры линеаризации, строят из полученных численных значений показателей и экспонент различные численные характеристики аттракторов исходных нелинейных систем (ляпуновские размерности, метрические энтропии и т.д.).

Иногда частичное обоснование процедуры линеаризации аргументируется компьютерными экспериментами. Так, например, компьютерные эксперименты [2], [7] показывают совпадение ляпуновской и хаусдорфовой размерности аттракторов Хенона, Каплана–Йорке и Заславского. Однако для B-аттракторов Хенона и Лоренца такого совпадения нет [8, 9].

Настоящая работа посвящена проблеме обоснования процедуры линеаризации, когда система первого приближения имеет положительный характеристический показатель. Показано, что в этом случае могут наблюдаться перроновские эффекты инверсии знака характеристических показателей решений исходной системы и системы первого приближения при одних и тех же начальных условиях; эти эффекты свидетельствуют о трудностях, с которыми приходится сталкиваться при обосновании процедуры линеаризации. На основе метода триангуляции Перрона–Винограда доказываются критерии неустойчивости по Красовскому и Ляпунову.

1. Эффекты Перрона. Перрон [10] открыл эффект инверсии знака характеристических показателей для решений специальных классов нелинейных систем и их первых приближений. Им была построена нелинейная система, первое приближение которой имело отрицательные характеристические показатели, а почти все ее решения обладали положительными характеристическими показателями.

Здесь рассмотрим аналогичный эффект смены знака характеристических показателей "в другую сторону": решение системы первого приближения имеет положительный характеристический показатель, а решение исходной системы с теми же начальными данными – отрицательный.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= [\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2a]x_1 + x_3 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_3, \quad \dot{x}_3 = -2ax_3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

на инвариантном многообразии

$$M = \{x_1 \in R^1, x_2^2 = x_3\}$$

Число a удовлетворяет условию

$$1 < 2a < 1 + \exp(-\pi)/2$$

Решения системы (1.1) на многообразии M имеют вид

$$\begin{aligned} &x_1(t) = \exp[(t+1)\sin\ln(t+1) - 2at]x_1(0) \\ &x_2(t) = \exp[-at]x_2(0), \quad x_3(t) = \exp[-2at]x_3(0); \quad x_3(0) = x_2(0)^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Очевидно, что все эти решения имеют отрицательные ляпуновские показатели.
Решения системы первого приближения

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = [\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2a]z_1 + z_3 \\ &\dot{z}_2 = -az_2, \quad \dot{z}_3 = -2az_3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

на многообразии M имеют вид

$$z_1(t) = \exp[(t+1)\sin\ln(t+1) - 2at]\times$$

$$\times\left[z_1(0) + z_3(0)\int_0^t \exp[-\tau+1]\sin\ln(\tau+1)\right]d\tau\Bigg]$$

$$z_2(t) = \exp[-at]z_2(0), \quad z_3(t) = \exp[-2at]z_3(0); \quad z_3(0) = z_2(0)^2$$

Полагая $t = \exp[(2n + 1/2)\pi] - 1$, где n – целое число, получим оценку ([11], с. 369)

$$\int_0^t \exp[-(\tau+1)\sin\ln(\tau+1)]d\tau >$$

$$> \exp\left[\frac{1}{2}(t+1)\exp(-\pi)\right](t+1)\left[\exp\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \exp(-\pi)\right]$$

Поэтому при указанных значениях t имеем неравенство

$$\exp[(t+1)\sin\ln(t+1) - 2at]\int_0^t \exp[-(\tau+1)\sin\ln(\tau+1)]d\tau >$$

$$> \exp\left[\frac{1}{2}(2 + \exp(-\pi))\right]\left[\exp\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \exp(-\pi)\right]\exp\left[\left(1 - 2a + \frac{1}{2}\exp(-\pi)\right)t\right]$$

Таким образом, на многообразии M при $z_3(0) \neq 0$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t}\left|\ln|z_1(t)|\right| > 0$$

Заметим, что для любых решений систем (1.1) и (1.3) имеем соотношения

$$(x_2(t)^2 - x_3(t))^{\bullet} = -2a(x_2(t)^2 - x_3(t))$$

$$(z_2(t)^2 - z_3(t))^{\bullet} = -2a(z_2(t)^2 - z_3(t))$$

Поэтому

$$x_2(t)^2 - x_3(t) = \exp[-2at][x_2(0)^2 - x_3(0)]$$

$$z_2(t)^2 - z_3(t) = \exp[-2at][z_2(0)^2 - z_3(0)]$$

Отсюда заключаем, что многообразие M является экспоненциально притягивающим инвариантным множеством для систем (1.1) и (1.3). Последнее означает, что из соотношения $x_2(0)^2 = x_3(0)$ следует равенство $x_2(t)^2 = x_3(t)$ при всех $t \in R^1$ и что для любых начальных условий

$$\left|x_2(t)^2 - x_3(t)\right| \le \exp[-2at]\left|x_2(0)^2 - x_3(0)\right|$$

Таким образом, системы (1.1) и (1.3) имеют одно и то же инвариантное, экспоненциально притягивающее многообразие M, на котором почти все решения системы первого приближения (1.3) имеют положительный характеристический показатель, а все решения исходной системы (1.1) имеют отрицательные характеристические показатели.

Здесь эффект Перрона наблюдается на целом многообразии

$$\{x_1 \in R^1,\ x_3 = x_2^2 \ne 0\}$$

Для того чтобы построить экспоненциально устойчивую систему, первое приближение которой имеет положительный характеристический показатель, изменим систему (1.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= [\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2a]x_1 + x_3 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= F(x_2, x_3), \quad \dot{x}_3 = G(x_2, x_3) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Функции $F(x_2, x_3)$ и $G(x_2, x_3)$ имеют вид

$$F(x_2, x_3) = \pm 2x_3 - ax_2, \quad G(x_2, x_3) = \mp x_2 - \varphi(x_2, x_3)$$

причем верхний знак берется при $x_2 > 0$, $x_3 > x_2^2$ и при $x_2 < 0$, $x_3 < x_2^2$, нижний – при $x_2 > 0$, $x_3 < x_2^2$ и при $x_2 < 0$, $x_3 > x_2^2$. Функция $\varphi(x_2, x_3)$ определена следующим образом:

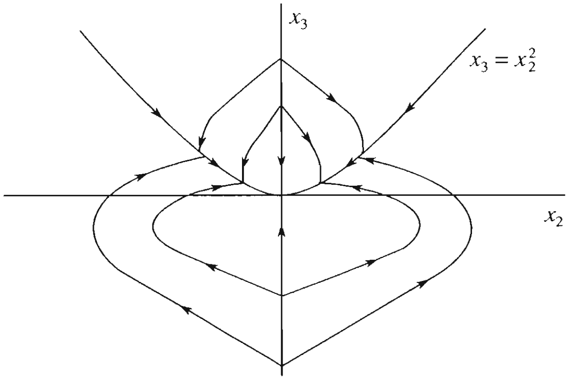
$$\varphi(x_2, x_3) = \begin{cases} 4ax_3 & \text{при } x_3 > 2x_2^2 \text{ и при } x_3 < -2x_2^2 \\ 2ax_3 & \text{при } -2x_2^2 < x_3 < 2x_2^2 \end{cases}$$

Решения системы (1.4) понимаются в смысле А.Ф. Филиппова [12]. Согласно этому определению для данных функций F и G система

$$\dot{x}_2 = F(x_2, x_3), \quad \dot{x}_3 = G(x_2, x_3) \tag{1.5}$$

на линиях разрыва $\{x_2 = 0\}$ и $\{x_3 = x_2^2\}$ имеет скользящие решения, которые описываются уравнениями

$$x_2(t) \equiv 0, \quad \dot{x}_3(t) = -4ax_3(t)$$



и

$$\dot{x}_2(t) = -ax_2(t), \quad \dot{x}_3(t) = -2ax_3(t), \quad x_3(t) \equiv x_2(t)^2$$

При этом решения системы (1.5) с начальными данными $x_2(0) \neq 0$, $x_3(0) \in R^1$ попадают на кривую $\{x_3 = x_2^2\}$ через конечное время, не превосходящее 2π. Фазовый портрет такой системы изображен на фигуре.

Из приведенных здесь соображений следует, что для решений системы (1.4) с начальными данными

$$x_1(0) \in R^1, \quad x_2(0) \neq 0, \quad x_3(0) \in R^1$$

при $t \geq 2\pi$ имеют место равенства

$$F(x_2(t), x_3(t)) = -ax_2(t), \quad G(x_2(t), x_3(t)) = -2ax_3(t)$$

Поэтому на таких решениях система (1.3) является системой первого приближения при $t \geq 2\pi$.

Как было показано выше, эта система имеет положительный характеристический показатель. В то же время все решения системы (1.4) экспоненциально стремятся к нулю.

2. Критерии неустойчивости. Рассмотрим систему

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n \tag{2.1}$$

где $A(t)$ – непрерывная, ограниченная на $[0, \infty)$ $(n \times n)$-матрица. Будем полагать, что вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна и в некоторой окрестности $\Omega(0)$ точки $x = 0$ выполнено неравенство

$$|f(t, x)| \leq \kappa |x|^{\nu}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \Omega(0) \tag{2.2}$$

Числа κ и ν таковы, что $\kappa > 0$, $\nu > 1$.

Напомним здесь определения устойчивости по Ляпунову и Красовскому.

Определение 1. Решение $x(t) \equiv 0$ системы (2.1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ существует число $\delta(\varepsilon, t_0)$, такое, что для решений $x(t, t_0, x_0)$, удовлетворяющих условию $|x_0| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$, выполнено неравенство

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

Определение 2. Решение $x(t) \equiv 0$ системы (2.1) называется устойчивым по Красовскому, если существуют такие положительные числа $\delta(t_0)$ и $R(t_0)$, что для решений $x(t, t_0, x_0)$, удовлетворяющих условию $|x_0| \le \delta(t_0)$, выполнено неравенство

$$|x(t, t_0, x_0)| \le R(t_0)|x_0|, \quad \forall t \ge t_0$$

Напомним, что по определению неустойчивость по Ляпунову (по Красовскому) – это отрицание соответствующего типа устойчивости.

Введем в рассмотрение нормальную фундаментальную матрицу

$$Z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t)) \tag{2.3}$$

состоящую из линейно независимых решений $z_j(t)$ линейной системы первого приближения

$$dz/dt = A(t)z \tag{2.4}$$

Для анализа неустойчивости воспользуемся методом триангуляции линейной системы Перрона–Винограда [10, 13].

Проведем процедуру ортогонализации Шмидта для решений $z_j(t)$, образующих матрицу (2.3),

$$\begin{aligned} v_1(t) &= z_1(t) \\ v_2(t) &= z_2(t) - v_1(t)^* z_2(t)\frac{v_1(t)}{|v_1(t)|^2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n(t) &= z_n(t) - v_1(t)^* z_n(t)\frac{v_1(t)}{|v_1(t)|^2} - \ldots - v_{n-1}(t)^* z_n(t)\frac{v_{n-1}(t)}{|v_{n-1}(t)|^2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Звездочка означает транспонирование.

Из соотношений (2.5) следуют равенства

$$v_i(t)^* v_j(t) = 0, \quad \forall j \ne i; \quad |v_j(t)|^2 = v_j(t)^* z_j(t) \tag{2.6}$$

Из последнего равенства вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Имеет место оценка

$$|v_j(t)| \le |z_j(t)|, \quad \forall t \ge 0 \tag{2.7}$$

Ответ на вопрос о том, насколько сильно могут уменьшиться вектор-функции $v_j(t)$ по сравнению с исходной системой векторов $z_j(t)$, дает следующее утверждение.

Лемма 2. Если для некоторого числа C выполнено неравенство

$$\prod_{j=1}^{n} |z_j(t)| \le C \exp \int_0^t \operatorname{tr} A(s)\,ds, \quad \forall t \ge 0 \tag{2.8}$$

то существует число $r > 0$, для которого имеет место оценка

$$|z_j(t)| \le r|v_j(t)|, \quad \forall t \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{2.9}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение матрицу

$$\tilde{Z}(t) = \left(\frac{z_1(t)}{|z_1(t)|}, \ldots, \frac{z_n(t)}{|z_n(t)|}\right)$$

Из формулы Остроградского–Лиувилля [13] и неравенства (2.8) имеем соотношение

$$|\det\tilde{Z}(t)| = |\det(z_1(0), \ldots, z_n(0))|(|z_1(t)|, \ldots, |z_n(t)|)^{-1}\exp\int\limits_0^t \operatorname{tr} A(s)ds \geq$$

$$\geq C^{-1}|\det(z_1(0), \ldots, z_n(0))|, \quad \forall t \geq 0$$

Отсюда следует, что для линейного подпространства $L(t)$, натянутого на вектора $z_1(t), \ldots, z_m(t)$ $(m < n)$, найдется число $\varepsilon \in (0, 1)$, такое, что выполнена оценка

$$\frac{|z_{m+1}(t)^* e(t)|}{|z_{m+1}(t)|} \leq 1 - \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.10}$$

для всех $e(t) \in L(t)$, удовлетворяющих равенству $|e(t)| = 1$.

Соотношения (2.5) при $j > 1$ можно переписать следующим образом:

$$\frac{v_j(t)}{|z_j(t)|} = \prod_{i=1}^{j-1}\left(I - \frac{v_i(t)v_i(t)^*}{|v_i(t)|^2}\right)\frac{z_j(t)}{|z_j(t)|} \tag{2.11}$$

где I – единичная матрица.

Предположим теперь, что утверждение леммы не имеет места. В этом случае существует последовательность $t_k \to +\infty$, для которой

$$\lim_{k \to +\infty}\frac{v_j(t_k)}{|z_j(t_k)|} = 0$$

Но тогда из равенства (2.11) получим, что существует число $l < j$, для которого

$$\lim_{k \to +\infty}\left[\frac{z_j(t_k)}{|z_j(t_k)|} - \frac{v_l(t_k)}{|v_l(t_k)|}\right] = 0 \tag{2.12}$$

Поскольку $v_l(t) \in L(t)$, соотношения (2.10) и (2.12) противоречат друг другу. Полученное противоречие доказывает оценку (2.9).

Из приведенных здесь рассуждений видно, что условие (2.8) является необходимым и достаточным условием существования числа $r > 0$, для которого выполнена оценка (2.9).

Заметим, что условие (2.8) является необходимым и достаточным условием невырожденности при $t \to +\infty$ нормированной фундаментальной матрицы системы первого приближения (2.4)

$$\varliminf_{t \to +\infty}|\det\tilde{Z}(t)| > 0$$

Опишем теперь процедуру триангуляции Перрона–Винограда.

Введем в рассмотрение унитарную матрицу

$$U(t) = \left(\frac{v_1(t)}{|v_1(t)|}, \ldots, \frac{v_n(t)}{|v_n(t)|}\right)$$

и сделаем следующую замену в системе (2.4): $z = U(t)w$.

Из унитарности матрицы $U(t)$ следует, что для столбцов $w_j(t)$ матрицы

$$W(t) = (w_1(t), \ldots, w_n(t)) = U(t)^* Z(t)$$

выполнены соотношения $|w_j(t)| = |z_j(t)|$.

Из соотношений (2.5), (2.6) вытекает, что матрица $W(t)$ имеет следующий треугольный вид:

$$W(t) = \begin{pmatrix} |\upsilon_1(t)| & \dots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & |\upsilon_n(t)| \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Матрица $W(t)$ является фундаментальной матрицей системы

$$dw/dt = B(t)w \tag{2.14}$$

где

$$B(t) = U(t)^{-1}A(t)U(t) - U(t)^{-1}\dot{U}(t) \tag{2.15}$$

Из того факта, что $W(t)$ – верхняя треугольная матрица, следует, что и $W(t)^{-1}$, $\dot{W}(t)$ – верхние треугольные матрицы. Поэтому матрица

$$B(t) = \dot{W}(t)W(t)^{-1}$$

является верхней треугольной матрицей вида

$$B(t) = \begin{pmatrix} (\ln|\upsilon_1(t)|)^{\bullet} & \dots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & (\ln|\upsilon_n(t)|)^{\bullet} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Покажем, что если матрица $A(t)$ ограничена при $t \ge 0$, то и матрицы $B(t)$, $U(t)$ и $\dot{U}(t)$ также ограничены при $t \ge 0$. Ограниченность матрицы $U(t)$ имеет место всегда и очевидна. Поэтому ограничена также матрица

$$U(t)^{-1}A(t)U(t) = U(t)^{*}A(t)U(t)$$

Из унитарности матрицы $U(t)$ следует тождество

$$(U(t)^{-1}\dot{U}(t))^{*} = -U(t)^{-1}\dot{U}(t) \tag{2.17}$$

Отсюда и из соотношений (2.15) и (2.16) следует, что модуль элемента матрицы $U(t)^{-1}\dot{U}(t)$ совпадает с модулем некоторого элемента матрицы $U(t)^{-1}A(t)U(t)$. Таким образом, матрица $U(t)^{-1}\dot{U}(t)$ ограничена при $t \ge 0$. Отсюда и из равенства (2.15) следует ограниченность матрицы $B(t)$. Из ограниченности $B(t)$ и равенства $\dot{U}(t) = A(t)U(t) - U(t)B(t)$ следует ограниченность $\dot{U}(t)$.

Докажем теперь еще одну полезную оценку для вектор-функции $\upsilon_n(t)$.

Лемма 3. Имеет место оценка

$$\frac{|\upsilon_n(t)|}{|\upsilon_n(\tau)|} \ge \exp\left[\int_{\tau}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds\right] \prod_{j=1}^{n-1} \frac{|\upsilon_j(\tau)|}{|z_j(t)|} \tag{2.18}$$

Доказательство. Из соотношения (2.13) следует равенство

$$\frac{|\upsilon_n(t)|}{|\upsilon_n(\tau)|} = \frac{\det W(t)\prod\limits_{j=1}^{n-1}|\upsilon_j(\tau)|}{\det W(\tau)\prod\limits_{j=1}^{n-1}|\upsilon_j(t)|}$$

Из формулы Остроградского–Лиувилля, соотношений (2.14), (2.15) и (2.17) имеем равенства

$$\det W(t) = \det W(\tau)\exp\int\limits_\tau^t \operatorname{tr} B(s)ds = \det W(\tau)\int\limits_\tau^t \operatorname{tr} A(s)ds$$

Из этих равенств и оценки (2.7) сразу следует утверждение леммы.

Описанный выше метод триангуляции и лемма 3 позволяют сделать почти очевидным следующий результат.

Теорема 1. Если выполнено неравенство

$$\sup_k \varlimsup_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{t}\left(\int\limits_0^t \operatorname{tr} A(s)ds - \sum_{j\neq k}\ln|z_j(t)|\right)\right] > 0 \tag{2.19}$$

то решение $x(t) \equiv 0$ системы (2.1) неустойчиво по Красовскому.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что в условии (2.19) супремум по k достигается при $k = n$.

Сделаем замену $x = U(t)y$ в системе (2.1)

$$dy/dt = B(t)y + g(t, y); \quad g(t, y) = U(t)^{-1}f(t, U(t)y) \tag{2.20}$$

Матрица $B(t)$ определяется по формуле (2.15).

Таким образом, последнее уравнение системы (2.20) примет вид

$$\dot{y}_n = (\ln|\upsilon_n(t)|)^{\bullet}y_n + g_n(t, y) \tag{2.21}$$

Здесь y_n и g_n – n-е компоненты векторов y и g.

Предположим теперь, что решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво по Красовскому. Это означает существование для некоторой окрестности $x = 0$ числа $R > 0$, такого, что выполнена оценка

$$|x(t, x_0)| \le R|x_0|, \quad \forall t \ge 0 \tag{2.22}$$

Здесь $x(0, x_0) = x_0$.

Из условий (2.2) и (2.22) следует оценка

$$|g(t, y(t))| \le \kappa R^\nu|y(0)|^\nu \tag{2.23}$$

Из условия (2.19) по лемме 3 получим существование такого числа $\mu > 0$, что при достаточно больших значениях t выполнена оценка

$$\ln|\upsilon_n(t)| \ge \mu t \tag{2.24}$$

Заметим, что решение $y_n(t)$ уравнения (2.21) можно представить в форме

$$y_n(t) = \frac{|\upsilon_n(t)|}{|\upsilon_n(0)|}\left(y_n(0) + \int\limits_0^t \frac{|\upsilon_n(0)|}{|\upsilon_n(s)|}g(s, y(s))ds\right) \tag{2.25}$$

Из оценки (2.24) следует существование числа $\rho > 0$, такого, что выполнено неравенство

$$\int_0^t \frac{|\upsilon_n(0)|}{|\upsilon_n(s)|} ds \le \rho, \quad \forall t \ge 0 \tag{2.26}$$

Возьмем теперь начальные условия $x_0 = U(0)y(0)$ так, чтобы $y_n(0) = |y(0)| = \delta$, где $\delta > \rho\kappa R^\nu\delta^\nu$. В этом случае из соотношений (2.23)–(2.26) получим при достаточно больших $t \ge 0$ оценку

$$y_n(t) \ge \exp(\mu t)(\delta - \rho\kappa R^\nu\delta^\nu)$$

Отсюда сразу следует соотношение

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} y_n(t) = +\infty$$

Последнее противоречит предположению об устойчивости по Красовскому тривиального решения системы (2.1). Теорема доказана.

Замечание относительно метода доказательства теоремы 1. Если предположить наличие устойчивости по Ляпунову и попытаться вывести к этому противоречие, так же как это было сделано в доказательстве по отношению к устойчивости по Красовскому, то в этом случае необходимо было бы доказать неравенство

$$y_n(0) + \int_0^{+\infty} \frac{|\upsilon_n(0)|}{|\upsilon_n(s)|} g(s, y(s)) ds \ne 0 \tag{2.27}$$

Это неравенство легко обеспечить, когда речь идет об устойчивости по Красовскому, и необходимость его доказательства – труднопреодолимое препятствие при рассмотрении устойчивости по Ляпунову.

Аналогичная схема сведения задачи к одному скалярному уравнению типа (2.21) была использована Четаевым [14, 15] при получении критериев неустойчивости. И аналогичная трудность в доказательстве неравенства (2.27) имеется в схеме, предложенной Четаевым. Поэтому метод Четаева в настоящее время дает возможность получения критериев неустойчивости по Красовскому.

Методика получения критериев неустойчивости по Ляпунову требует дальнейшего развития. Такое развитие с некоторыми дополнительными ограничениями будет дано в теореме 2.

Условие (2.19) теоремы 1 выполнено, если имеет место неравенство

$$\Lambda - \Gamma > 0 \tag{2.28}$$

Здесь Λ – максимальный характеристический показатель, Γ – коэффициент неправильности [13]. Напомним, что

$$\Gamma = \Sigma - \underline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr} A(s) ds$$

Условие неустойчивости по Красовскому (2.28) было получено Четаевым [14, 15] при более сильном требовании аналитичности функции $f(t, x)$.

Заметим также, что для системы (1.3) $\Gamma = \Lambda + 2a + 1$. Поэтому условие (2.28) для рассмотренных в разд. 1 систем не выполняется.

Теорема 2. Если для некоторых чисел $C > 0$, $\beta > 0$, $\alpha_j < \beta$ ($j = 1, \ldots, n-1$) выполнены условия

$$\prod_{j=1}^{n} |z_j(t)| \le C\exp\int_0^t \operatorname{tr} A(s)ds, \quad \forall t \ge 0 \text{ при } n > 2 \tag{2.29}$$

$$|z_j(t)| \le C\exp(\alpha_j(t-\tau))|z_j(\tau)|, \quad \forall t \ge \tau \ge 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n-1 \tag{2.30}$$

$$\frac{1}{(t-\tau)}\int_\tau^t \operatorname{tr} A(s)ds > \beta + \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j, \quad \forall t \ge \tau \ge 0 \tag{2.31}$$

то нулевое решение системы (2.1) неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Напомним что фундаментальная матрица $W(t)$ системы (2.14) имеет вид (2.13). Векторы-столбцы этой матрицы $w_j(t)$ ($j = 1, \ldots, n-1$) имеют вид

$$w_1(t) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, w_{n-1}(t) = \begin{pmatrix} w_{n-1,1}(t) \\ \vdots \\ w_{n-1,n-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому матрица $\tilde{W}(t)$, полученная вычеркиванием последнего столбца и последней строки матрицы $W(t)$, является фундаментальной матрицей системы

$$\dot{\tilde{w}} = \tilde{B}(t)\tilde{w}, \quad \tilde{w} \in R^{n-1}$$

с матрицей $\tilde{B}(t)$, полученной вычеркиванием последнего столбца и последней строки матрицы $B(t)$.

Из условия (2.30) и тождеств $|w_j(t)| \equiv |z_j(t)|$, которые вытекают из унитарности матрицы $U(t)$, следуют оценки

$$|\tilde{w}_j(t)| \le C\exp(\alpha_j(t-\tau))|\tilde{w}_j(\tau)|, \quad \forall t \ge \tau \ge 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n-1 \tag{2.32}$$

Кроме того, из условия (2.29) по лемме 2 следуют оценки (2.9), а из условий (2.30) и (2.31) по лемме 3 вытекает оценка

$$\frac{|\upsilon_n(t)|}{|\upsilon_n(\tau)|} \ge C^{1-n}\exp(\beta(t-\tau))\prod_{j=1}^{n-1}\frac{|\upsilon_j(\tau)|}{|z_j(\tau)|}, \quad \forall t \ge \tau \ge 0 \tag{2.33}$$

Из соотношений (2.9) и (2.33) получим неравенство

$$\frac{|\upsilon_n(t)|}{|\upsilon_n(\tau)|} \ge (Cr)^{1-n}\exp(\beta(t-\tau)), \quad \forall t \ge \tau \ge 0 \tag{2.34}$$

Поскольку при $n = 2$ имеем $\upsilon_1(t) = z_1(t)$, из неравенства (2.33) получим оценку

$$\frac{|\upsilon_2(t)|}{|\upsilon_2(\tau)|} \ge C^{-1}\exp(\beta(t-\tau)), \quad \forall t \ge \tau \ge 0$$

без предположения (2.29).

Сделаем теперь для системы (2.1) замену

$$x = e^{dt}U(t)y \tag{2.35}$$

Здесь число $d > 0$ выберем таким, чтобы

$$\alpha < d < \beta$$

где

$$\alpha = \max \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, n-1$$

В результате замены получим систему

$$\frac{dy}{dt} = (B(t) - dI)y + g(t, y) \tag{2.36}$$

где

$$g(t, y) = e^{-dt}U(t)^{-1}f(t, e^{dt}U(t)y)$$

Из условия (2.2) следует, что для любого числа $\rho > 0$ существует окрестность $\Phi(0)$ точки $y = 0$, такая, что

$$|g(t, y)| \le \rho|y|, \quad \forall t \ge 0, \quad \forall y \in \Phi(0) \tag{2.37}$$

Заметим, что для системы

$$\dot{\tilde{y}} = (\tilde{B}(t) - dI)\tilde{y}, \quad \tilde{y} \in R^{n-1} \tag{2.38}$$

в силу соотношений (2.32) имеем оценку

$$|\tilde{y}(t)| \le C\exp[(\alpha - d)(t - \tau)]|\tilde{y}(\tau)|, \quad \forall t \ge \tau$$

Поэтому по теореме Малкина [11] существует непрерывно дифференцируемая, ограниченная на $[0, +\infty)$ матрица $H(t)$ и положительные числа ρ_1 и ρ_2, для которых

$$\tilde{y}^*(\dot{H}(t) + 2H(\tilde{B}(t) - dI))\tilde{y} \le -\rho_1|\tilde{y}|^2, \quad \forall \tilde{y} \in R^{n-1}, \quad \forall t \ge 0 \tag{2.39}$$

$$\tilde{y}^*H(t)\tilde{y} \ge \rho_2|\tilde{y}|^2, \quad \forall \tilde{y} \in R^{n-1}, \quad \forall t \ge 0 \tag{2.40}$$

Для скалярного уравнения

$$\dot{y}_n = [(\ln|\upsilon_n(t)|)^{\bullet} - d]y_n, \quad y_n \in R^1$$

при $n \ne 2$ из соотношения (2.34) имеем оценку

$$|y_n(t)| \ge (Cr)^{1-n}\exp[(\beta - d)(t - \tau)]|y_n(\tau)|, \quad \forall t \ge \tau \ge 0$$

При $n = 2$ аналогичная оценка имеет вид

$$|y_2(t)| \ge C^{-1}\exp[(\beta - d)(t - \tau)]|y_2(\tau)|, \quad \forall t \ge \tau \ge 0$$

Поэтому по теореме Малкина [11] существует непрерывно дифференцируемая, ограниченная на $[0, +\infty)$ функция $h(t)$ и положительные числа ρ_3 и ρ_4, для которых

$$\dot{h}(t) + 2h(t)[(\ln|\upsilon_n(t)|)^{\bullet} - d] \le -\rho_3, \quad h(t) \le -\rho_4, \quad \forall t \ge 0 \tag{2.41}$$

Покажем теперь, что функция

$$V(t, y) = \tilde{y}^* H(t)\tilde{y} + \omega h(t) y_n^2$$

при достаточно большом ω будет функцией Ляпунова, удовлетворяющей для системы (2.36) всем условиям классической теоремы Ляпунова о неустойчивости.

В самом деле, систему (2.36) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}} &= (\tilde{B}(t) - dI)\tilde{y} + q(t)y_n + \tilde{g}(t, \tilde{y}, y_n) \\ \dot{y}_n &= ((\ln|\upsilon_n(t)|)^{\bullet} - d)y_n + g_n(t, \tilde{y}, y_n) \end{aligned} \tag{2.42}$$

где $q(t)$ – некоторая ограниченная на $[0, +\infty)$ вектор-функция, $\tilde{g}$ и g_n таковы, что

$$g(t, y) = \begin{pmatrix} \tilde{g}(t, y) \\ \\ g_n(t, y) \end{pmatrix}$$

Поэтому из оценок (2.39), (2.41) следуют неравенства

$$\dot{V}(t, y) \le -\rho_1|\tilde{y}|^2 - \omega\rho_3 y_n^2 + 2\tilde{y}^* H(t) q(t) y_n +$$

$$+ 2\tilde{y}^* H(t)\tilde{g}(t, \tilde{y}, y_n) + 2\omega h(t) y_n g_n(t, \tilde{y}, y_n) \le$$

$$\le -\rho_1|\tilde{y}|^2 - \omega\rho_3 y_n^2 + 2[(|y_n||\tilde{y}|\sup_t|H(t)||q(t)| +$$

$$+ |\tilde{y}|\sup_t|H(t)|\rho(|\tilde{y}| + |y_n|) + \omega|y_n|\sup_t|h(t)|\rho(|\tilde{y}| + |y_n|)]$$

Из этих неравенств и ограниченности при $t \ge 0$ матрицы-функции $H(t)$, вектор-функции $q(t)$ и функции $h(t)$ следует, что при достаточно большом ω и достаточно малом ρ найдется положительное число θ, для которого

$$\dot{V}(t, y) \le -\theta|y|^2 \tag{2.43}$$

Из ограниченности $H(t)$, $h(t)$ следует существование числа a, для которого

$$|y|^2 \ge -aV(t, y), \quad \forall t \ge 0, \quad \forall y \in R^n$$

Поэтому отсюда и из неравенства (2.43) вытекает неравенство

$$\dot{V}(t, y) \le a\theta V(t, y), \quad \forall t \ge 0, \quad \forall y \in R^n \tag{2.44}$$

Возьмем теперь начальные данные $y(0)$ так, чтобы $V(0, y(0)) < 0$. Тогда из неравенства (2.43) следует, что

$$V(t, y(t)) < 0, \quad \forall t \ge 0$$

и в силу неравенства (2.44) имеем оценку

$$-V(t, y(t)) \ge e^{a\theta t}(-V(0, y(0)))$$

Отсюда и из неравенств (2.40) и (2.41) вытекает неравенство

$$-\omega h(t) y_n(t)^2 \ge e^{a\theta t}(-V(0, y(0))), \quad \forall t \ge 0$$

Таким образом,

$$y_n(t)^2 \geq \frac{e^{a\theta t}}{\omega \sup\limits_t(-h(t))}(-V(0, y(0))) \tag{2.45}$$

Из этого неравенства следует неустойчивость по Ляпунову решения $y(t) \equiv 0$. Более того, из оценки (2.45) следует, что в окрестности $y = 0$ решение $y(t)$ с начальными данными $V(0, y(0)) < 0$ экспоненциально возрастает.

Поскольку $d > 0$ и $U(t)$ – унитарная матрица, нулевое решение системы (2.1) также неустойчиво по Ляпунову.

Отметим, что требование равномерности по τ в оценках (2.30) и (2.31) характерно и для критериев устойчивости по первому приближению [11, 16, 17].

Естественным образом возникает задача ослабления условий неустойчивости, полученных в теоремах 1 и 2. Однако эффекты Перрона, описанные в разд. 1, ставят границы таких ослаблений.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00317), программы "Университеты России" и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2257.2003.01).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Максвелл Д.К., Вышнеградский И.А., Стодола А.* Теория автоматического регулирования. Линеаризованные задачи. М.: Изд-во АН СССР, 1949. 431 с.
2. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.
3. *Moon F.* Chaotic Vibrations. N.Y.: Wiley, 1987 = *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 311 с.
4. *Landa P.S.* Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems. Dordrecht: Kluwer, 556 p.
5. *Berge P., Pomeau Y., Vidal C.* L'Ordre dans le Chaos. Paris: Hermann, 1984 = *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 367 с.
6. *Ryabov V.B.* Using Lyapunov exponents to predict the onset of chaos in nonlinear oscillators // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. № 1. P. 16214–16231.
7. *Russel D.A., Hanson J.D., Ott E.* Dimension of strange attractors // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. № 14. P. 1175–1178.
8. *Леонов Г.А.* Формулы ляпуновской размерности аттракторов Хенона и Лоренца // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 3. С. 155–170.
9. *Леонов Г.А.* Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 3. С. 3–42.
10. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Z. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 703–728.
11. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
12. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
13. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
14. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
15. *Четаев Н.Г.* О некоторых вопросах об устойчивости и неустойчивости для неправильных систем // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 6. С. 639–642.
16. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
17. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.

Санкт-Петербург
e-mail: leonov math.spbu.ru

Поступила в редакцию
29.V.2003