УДК 531.36; 62-50

© 2004 г. В. И. Каленова, В. М. Морозов, М. А. Салмина

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ НЕГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОДНОГО КЛАССА

Исследуется устойчивость стационарных движений и управляемость одного класса неголономных механических систем, находящихся под действием потенциальных и управляющих сил. Рассматривается задача о стабилизации стационарного движения трехколесного экипажа с учетом инерционности колес, являющаяся примером систем указанного класса.

1. Стационарные движения. Рассмотрим неголономную механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$. Будем полагать, что она обладает определенной спецификой. А именно ее обобщенные координаты можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие условия.

Скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ стеснены $n - l$ $(l < n)$ стационарными неголономными связями, которые можно представить в виде двух групп

$$\dot{q}_\chi = \sum_{r=1}^{l} b_{\chi r}(q)\dot{q}_r \tag{1.1}$$

$$\dot{q}_\rho = \sum_{r=1}^{l} b_{\rho r}(q)\dot{q}_r \tag{1.2}$$

Индексы здесь и везде далее принимают значения

$p, r, s = 1, \ldots, l;\ \chi = l+1, \ldots, m;\ \rho = m+1, \ldots, n;\ \mu = l+1, \ldots, n.$

Исключение величин $\dot{q}_\chi$, $\dot{q}_\rho$ при помощи уравнений связей (1.1), (1.2) из выражений для T и $\partial T/\partial \dot{q}_\mu$ (T – кинетическая энергия системы) приводит к выражениям

$$2\Theta = \sum_{r,s=1}^{l} a_{rs}(q)\dot{q}_r\dot{q}_s > 0, \quad \Theta_\mu = \sum_{p=1}^{l} \Theta_{\mu p}(q)\dot{q}_p \tag{1.3}$$

Пусть также выполняются условия:

1) коэффициенты $b_{\chi r}$ в уравнениях (1.1) – функции только координат $q_{l+1}, \ldots, q_m$, скорости которых зависимы в силу тех же уравнений (1.1), тогда как коэффициенты $b_{\rho r}$ в уравнениях (1.2) могут зависеть от координат $q_1, \ldots, q_l, q_{l+1}, \ldots, q_m$;

2) потенциальные силы, действующие на систему, являются производными от силовой функции $U(q)$, также зависящей только от координат q_χ, т.е. $U = U(q_\chi)$;

3) коэффициенты a_{rs} в выражении (1.3) и выражение

$$\sum_{\mu=l+1}^{n} \Theta_{\mu p}\nu_{\mu rs}$$

где

$$\nu_{\mu rs} = \frac{\partial b_{\mu r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\mu s}}{\partial q_r} - \sum_{\mu' = l+1}^{n} \left(b_{\mu' r}\frac{\partial b_{\mu s}}{\partial q_{\mu'}} - b_{\mu' s}\frac{\partial b_{\mu r}}{\partial q_{\mu'}} \right)$$

зависят только от координат $q_{l+1}, \ldots, q_m$.

Для неголономной механической системы, принадлежащей рассматриваемому классу, уравнения движения в форме уравнений Воронца [1, 2] имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}_r} = \sum_{\chi = l+1}^{m} \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_\chi} b_{\chi r} + \sum_{\mu = l+1}^{n}\sum_{p, s = 1}^{l} \Theta_{\mu p}\nu_{\mu rs}\dot{q}_s\dot{q}_p + Q_r + \sum_{\chi = l+1}^{m} Q_\chi b_{\chi r} \tag{1.4}$$

где Q_r, Q_χ – управляющие силы, которые будем полагать зависящими только от переменных $\dot{q}_r$, q_χ.

Специфическая особенность систем рассматриваемого класса состоит в том, что при отсутствии управляющих воздействий ($Q_r = 0$, $Q_\chi = 0$) все координаты q_r – циклические в смысле определения [2–4], координаты q_χ ($\chi = l + 1, \ldots, m$) – позиционные.

Следует подчеркнуть, что в отличие от общего случая уравнения (1.4) совместно с уравнениями связей (1.1) образуют замкнутую систему уравнений *первого* порядка относительно $\dot{q}_r$, q_χ и не содержат в явном виде координат q_r. Уравнения неголономных связей (1.2) представляют собой уравнения связей типа Чаплыгина.

Допустим, что при некоторых начальных условиях и $Q_r = 0$, $Q_\chi = 0$ возможно установившееся движение системы, при котором позиционные координаты и циклические скорости постоянны:

$$\dot{q}_r(t) = \dot{q}_{r0} = \omega_r \quad q_\chi(t) = q_{\chi 0} \tag{1.5}$$

При этом m постоянных величин ω_r, $q_{\chi 0}$ удовлетворяют m уравнениям

$$\sum_{p, s = 1}^{l} \left\{ \sum_{\mu = l+1}^{n} \Theta_{\mu p}\nu_{\mu rs} + \sum_{\chi = l+1}^{m} \frac{1}{2} b_{\chi r}\frac{\partial a_{ps}}{\partial q_\chi} \right\}_0 \omega_p\omega_s + \sum_{\chi = l+1}^{m} \left\{ b_{\chi r}\frac{\partial U}{\partial q_\chi} \right\}_0 = 0 \tag{1.6}$$

$$\sum_{r = 1}^{l} (b_{\chi r})_0\omega_r = 0 \tag{1.7}$$

Нулевой индекс означает, что выражение вычислено для значений переменных, соответствующих стационарному движению (СД) (1.5).

В зависимости от параметров система (1.6), (1.7) может иметь одно или несколько изолированных решений. Возможны случаи, когда среди уравнений (1.6), (1.7) может оказаться только $m - m'$ независимых, тогда рассматриваемая система будет иметь многообразие СД вида (1.5) размерности m'.

Заметим, что при выполнении условий существования СД, сформулированных ранее для общего случая [2–4], уравнения (1.6), (1.7) удовлетворяются тождественно по ω_r, $q_{\chi 0}$, т.е. существует m-мерное многообразие СД.

2. Исследование устойчивости. Выберем произвольную точку ω_r, $q_{\chi 0}$, определяемую соотношениями (1.6), (1.7), и рассмотрим вопрос об устойчивости решения (1.5) системы уравнений (1.1), (1.4) по отношению к возмущениям переменных $\dot{q}_r$, q_χ.

Введем отклонения

$$y_r = \dot{q}_r - \omega_r, \quad z_\chi = q_\chi - q_{\chi_0}$$

Уравнения возмущенного движения в переменных

$$\underset{(l\times 1)}{y} = \|y_1 \ldots y_l\|^T, \qquad \underset{((m-l)\times 1)}{z} = \|z_{l+1} \ldots z_m\|^T$$

имеют вид

$$A\dot{y} = P_1 y + V_1 z + F^{(1)}u^{(1)} + P_2^T F^{(2)}u^{(2)} + Y(y, z), \quad \dot{z} = P_2 y + V_2 z + Z(y, z) \tag{2.1}$$

Элементы матриц A, P, V вычисляются аналогично указанному ранее [2]; $Y(y, z, u^{(1)}, u^{(2)})$, $Z(y, z)$ – вектор-функции, содержащие члены порядка выше первого по введенным переменным y, z; $\underset{(l\times 1)}{F^{(1)}u^{(1)}}$, $\underset{((m-l)\times 1)}{F^{(2)}u^{(2)}}$ – линейные части управляющих воздействий.

В отличие от уравнений возмущенного движения неголономной системы общего вида, рассмотренной ранее [4–7], система уравнений (2.1) является системой первого порядка и не содержит блока уравнений, отвечающих позиционным координатам. По этой причине задача устойчивости СД неголономной механической системы указанного класса не может быть сведена к задаче об устойчивости положения равновесия некоторой голономной системы, и к ней не могут быть применены теоремы, доказанные в [2–7]. Именно это обстоятельство и обосновывает целесообразность выделения введенного выше специального класса неголономных систем.

Характеристическое уравнение линеаризованной однородной системы (2.1) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det G(\lambda) = 0, \quad G(\lambda) = \begin{Vmatrix} A\lambda - P_1 & -V_1 \\ -P_2 & \lambda E - V_2 \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

Если неголономная механическая система обладает многообразием СД размерности m', то выполняется условие $\operatorname{rank} G(0) \le m - m'$. Если $\operatorname{rank} G(0) = m - m'$, то характеристическое уравнение (2.2) имеет m' нулевых корней, что соответствует особенному критическому по Ляпунову случаю, и для исследования устойчивости СД системы может быть применена теорема Ляпунова–Малкина [8, 9].

Таким образом, для систем рассматриваемого класса при отсутствии управляющих воздействий можно сформулировать следующее утверждение

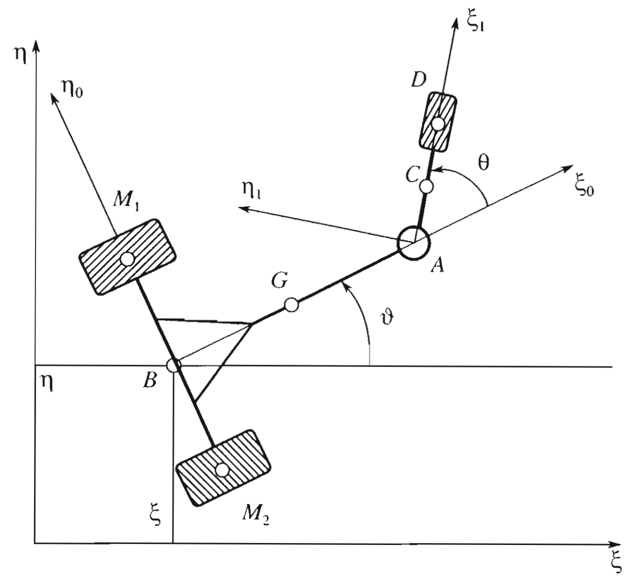
Теорема 1. Если неголономная система (1.1), (1.4) при выполнении условий 1–3 разд. 1 имеет многообразие СД, определяемое соотношениями (1.6), (1.7), то СД (1.5) устойчиво (неустойчиво), если все корни уравнения (2.2), кроме m' нулевых, имеют отрицательные действительные части (по крайней мере, один корень с положительной действительной частью). В случае устойчивости всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится при $t \to \infty$ к одному из возможных стационарных движений, принадлежащих указанному многообразию, определяемому соотношениями (1.6), (1.7).

Если выполнены дополнительные условия [2–4], то матрицы P_1, P_2, V_1, V_2 – нулевые, и число нулевых корней характеристического уравнения (2.2) равно m. В этом случае для анализа устойчивости необходимо рассматривать полную нелинейную систему.

3. Управляемость. Критерии управляемости и наблюдаемости для неголономных механических систем общего вида были сформулированы ранее [5]. Используя критерий [10], легко получить критерии управляемости для неголономных систем рассматриваемого класса.

Теорема 2. Система (2.1) управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank} G_1 = m, \quad \forall\lambda \in \Lambda, \quad \Lambda = \{\lambda_i: \det G(\lambda) = 0\} \tag{3.1}$$



где

$$G_1 = \left\| \, G(\lambda) \; F \, \right\|, \quad F = \left\| \begin{matrix} F^{(1)} & P_2^T F^{(2)} \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Следствия. 1°. Если управляющие воздействия действуют только по всем циклическим координатам ($F^{(1)} = E_l$, ($F^{(2)} = 0$)), то система (2.1) управляема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\|P_2 \quad \lambda E - V_2\| = m - l$, $\forall\lambda \in \Lambda$.

2°. Если управляющие воздействия вводятся только по всем позиционным координатам ($F^{(1)} = 0$, $F^{(2)} = E_{m-1}$), и система имеет многообразие СД размерности m', то для управляемости системы (2.1) необходимо, чтобы размерность многообразия СД не превышала числа позиционных координат ($m - l$).

Последнее утверждение показывает, что, если $m' > m - l$, то для стабилизации СД необходимо вводить управляющие воздействия не только по позиционным координатам, но хотя бы по части циклических координат.

Аналогично могут быть получены критерии наблюдаемости для рассматриваемых систем при наличии информации того или иного вида.

4. Стационарные движения трехколесного экипажа. Рассмотрим модель трехколесного экипажа (трицикла) как систему твердых тел: тележка массы m_T, корпус тележки, жестко соединенный с осью, на которую насажены два колеса радиуса r, масс m_1, m_2 (центры в точках M_1, M_2), вертикальная стойка массы m_c (центр масс в точке M_c), соединенная с тележкой цилиндрическим шарниром в точке A, в точке D стойки прикреплена жестко ось с насаженным на нее колесом радиуса R массы m_3 (центр в точке M_3).

Колеса катятся по шероховатой горизонтальной плоскости без скольжения и отрыва. Смещением центра масс системы, возникающим при повороте передней части трицикла, пренебрегаем [11].

Введем неподвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$. Корпус и стойка совершают плоскопараллельное движение в горизонтальной плоскости $O\xi\eta$. Обозначим через C, G, D проекции центров масс стойки, тележки и третьего колеса на плоскость $O\xi\eta$. Положение системы определим координатами ξ, η, θ, ϑ, φ_1, φ_2, φ_3 (фигура): ξ, η – координаты точки B – середины заднего моста – в системе координат $O\xi\eta$, ϑ – угол между осью симметрии тележки AB и неподвижной осью $O\xi$, θ – угол поворота стойки относительно оси тележки AB, при этом $\vartheta_1 = \theta + \vartheta$, где ϑ_1 – угол поворота стойки относительно неподвижной оси $O\xi$, φ_1, φ_2, φ_3 – углы поворота колес вокруг соответствующих осей.

Введем обозначения

$$a = M_1B = M_2B, \quad l_1 = BG, \quad l_2 = GA, \quad l = l_1 + l_2 = AB, \quad d = AC, \quad b = AD$$

Условия отсутствия скольжения колес в данной задаче означают отсутствие составляющих скоростей точек контакта колес с плоскостью качения в поперечном и продольном направлениях.

В принятых обозначениях эти условия (условия неголономных связей) примут вид

$$\begin{gathered}\dot\xi\cos\vartheta + \dot\eta\sin\vartheta - a\dot\vartheta - r\dot\varphi_1 = 0, \quad \dot\xi\sin\vartheta - \dot\eta\cos\vartheta = 0\\ \dot\xi\cos\vartheta + \dot\eta\sin\vartheta + a\dot\vartheta - r\dot\varphi_2 = 0\\ \dot\xi\cos\vartheta_1 + \dot\eta\sin\vartheta_1 + l\dot\vartheta\sin\theta - R\dot\varphi_3 = 0\\ -\dot\xi\sin\vartheta_1 + \dot\eta\cos\vartheta_1 + l\dot\vartheta\cos\theta + b\dot\vartheta_1 = 0\end{gathered} \tag{4.1}$$

Введем новые обобщенные координаты, также однозначно определяющие положение рассматриваемой механической системы,

$$q_1 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad q_2 = \vartheta, \quad q_3 = \theta, \quad q_4 = \xi, \quad q_5 = \eta, \quad q_6 = \varphi_3, \quad q_7 = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{4.2}$$

Уравнения неголономных связей (4.1) в переменных (4.2) примут более простой вид, причем одна связь является неголономной связью общего вида (1.1)

$$\dot q_3 = b_{31}\dot q_1 + b_{32}\dot q_2 \tag{4.3}$$

а остальные связи (1.2) – связями типа Чаплыгина

$$\dot q_4 = b_{41}\dot q_1, \quad \dot q_5 = b_{51}\dot q_1, \quad \dot q_6 = b_{61}\dot q_1 + b_{62}\dot q_2, \quad \dot q_7 = b_{71}\dot q_2 \tag{4.4}$$

Здесь

$$\begin{gathered}b_{31}(q_3) = \frac{r}{b}\sin q_3, \quad b_{32}(q_3) = -\left(1 + \frac{l}{b}\cos q_3\right), \quad b_{41}(q_2) = r\cos q_2\\ b_{51}(q_2) = r\sin q_2, \quad b_{61}(q_3) = \frac{r}{R}\cos q_3, \quad b_{62}(q_3) = \frac{l}{R}\sin q_3, \quad b_{72} = \frac{2a}{r}\end{gathered} \tag{4.5}$$

Коэффициенты b_{31}, b_{32}, являясь функциями только координаты q_3, удовлетворяют условию 1 разд. 1.

Выражение для кинетической энергии системы без учета связей (4.3), (4.4) имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{7} A_{ij}\dot q_i\dot q_j$$

Здесь

$$A_{11} = A_{77} = J, \quad A_{17} = \frac{1}{2}J_4, \quad A_{22} = I + I_4 + 2S_3 l\cos q_3, \quad A_{23} = \frac{1}{2}(I_4 + S_3 l\cos q_3)$$

$$A_{24} = \frac{1}{2}(-S_1\sin q_2 + S_2\cos q_2 - S_3\sin(q_2 + q_3))$$

$$A_{25} = \frac{1}{2}(S_1\cos q_2 + S_2\sin q_2 + S_3\cos(q_2+q_3))$$

$$A_{33} = I_4, \quad A_{34} = -\frac{1}{2}S_3\sin(q_2+q_3), \quad A_{35} = \frac{1}{2}S_3\cos(q_2+q_3)$$

$$A_{44} = A_{55} = M, \quad A_{66} = J_3$$

Остальные коэффициенты A_{ij} равны нулю. Здесь

$$J = \frac{1}{4}(J_1+J_2), \quad J_4 = \frac{1}{4}(J_1-J_2), \quad M = m_T + m_C + m_1 + m_2 + m_3$$

$$S_1 = m_T l_1 + (m_C+m_3)l, \quad S_2 = (m_2-m_1)a, \quad S_3 = m_C d + m_3 b$$

$$I = m_T l_1^2 + (m_1+m_2)a^2 + (m_C+m_3)l^2 + I_1 + I_2 + J_G$$

$$I_4 = m_C d^2 + m_3 b^2 + J_C + I_3$$

$J_j (j = 1, 2, 3)$, $I_i (i = 1, 2)$ – моменты инерции колес относительно собственных осей вращения и диаметров соответственно, J_G, J_C – моменты инерции тележки и стойки относительно вертикальных осей, проходящих через их центры масс.

Исключив величины $\dot q_3, \ldots, \dot q_7$ из выражения для кинетической энергии T при помощи уравнений связей (4.3), (4.4), получим выражение приведенной кинетической энергии

$$\Theta = \frac{1}{2}[a_{11}\dot q_1^2 + 2a_{12}\dot q_1\dot q_2 + a_{22}\dot q_2^2]$$

Здесь

$$a_{11} = a_{11}^0 + a_{11}^1\cos^2 q_3 + a_{11}^2\sin^2 q_3 = Mr^2 + J + \frac{r^2}{R^2}J_3\cos^2 q_3 + \frac{r^2}{b^2}I_5\sin^2 q_3$$

$$a_{12} = a_{12}^0 + a_{12}^1\sin q_3\cos q_3 = S_2 r + \frac{2a}{r}J_4 + rl\mu\sin q_3\cos q_3$$

$$a_{22} = a_{22}^0 + a_{22}^1\cos^2 q_3 + a_{22}^2\sin^2 q_3 = I + \frac{4a^2}{r^2}J + \frac{l^2}{b^2}I_5\cos^2 q_3 + \frac{l^2}{R^2}J_3\sin^2 q_3$$

$$I_5 = I_4 - 2bS_3, \quad \mu = \frac{J_3}{R^2} - \frac{1}{b^2}I_5$$

Коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33} зависят только от координаты q_3 (угла θ).

Трехиндексные символы $\nu_{\chi rs}$ ($\chi = 3, \ldots, 7$; $r = 1, 2$; $s = 1, 2$) имеют в данном случае вид

$$\nu_{311} = 0, \quad \nu_{312} = -\nu_{321} = -\frac{r}{b^2}(b^2\cos q_3 + 1)$$

$$\nu_{412} = -\nu_{421} = -r\sin q_2, \quad \nu_{712} = \nu_{721} = 0$$

$$\nu_{512} = -\nu_{521} = r\cos q_2, \quad \nu_{612} = -\nu_{621} = \frac{r}{R}\sin q_3$$

Можно показать, что выражение $\sum_{\chi=3}^{7}\Theta_{\chi p}\nu_{\chi rs}$ также зависит только от координаты q_3, т.е. удовлетворяет условию 3 разд. 1.

Таким образом, механическая модель, описывающая движение трицикла, является примером неголономной системы, принадлежащей выделенному выше классу.

Уравнения движения трицикла в форме уравнений Воронца (1.5) имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2) &= \dot{q}_2(\beta_1\dot{q}_1 + \beta_2\dot{q}_2) + b_{31}\frac{\partial\Theta}{\partial q_3} + Q_1 + b_{31}Q_3 + \sum_{i=4}^{6} b_{i1}Q_i \\ \frac{d}{dt}(a_{12}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2) &= -\dot{q}_1(\beta_1\dot{q}_1 + \beta_2\dot{q}_2) + b_{32}\frac{\partial\Theta}{\partial q_3} + Q_2 + b_{32}Q_3 + \sum_{i=6,7} b_{i2}Q_i\end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь

$$\beta_1 = \beta_1(q_3) = r^2\sin q_3\left[\mu\cos q_3 - \frac{1}{b^3}\gamma\right]$$

$$\beta_2 = \beta_2(q_3) = \left(\frac{lr}{R^2}J_3 + S_1 r\right) + lr\cos q_3\left[\mu\cos q_3 - \frac{1}{b^3}\gamma\right]$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial q_3} = \mu\left[\frac{1}{2}(l^2\dot{q}_1^2 - r^2\dot{q}_2^2)\sin 2q_3 + lr\dot{q}_1\dot{q}_2\cos 2q_3\right], \quad \gamma = I_4 - bS_3$$

где Q_i ($n = 1, \ldots, 7$) – управляющие воздействия.

Координаты $q_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ (сумма углов вращения колес) и $q_2 = \vartheta$ (угол курса) – циклические [2, 3], а координата $q_3 = \theta$ – позиционная.

Следует подчеркнуть, что в данной задаче введение обобщенных координат по формулам (4.2) позволило получить уравнения движения рассматриваемой неголономной системы в достаточно простом виде. А именно уравнения движения (4.6) и уравнение связи (4.3) образуют замкнутую систему уравнений первого порядка относительно переменных $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, q_3 и не содержат в явном виде координат q_1, q_2; остальные переменные находятся из уравнений связей (4.4). Очевидно, что при таком подходе упрощается анализ СД системы, анализ их устойчивости, а также управляемости и наблюдаемости системы.

Система уравнений (4.6), (4.3) при некоторых начальных условиях и отсутствии управляющих воздействий допускает частное решение

$$\dot{q}_1(t) = \dot{q}_{10} = \omega; \quad \dot{q}_2(t) = \dot{q}_{20} = \Omega; \quad q_3(t) = q_{30} = \theta_0 \tag{4.7}$$

описывающее СД системы.

Параметры, определяющие СД системы, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}&(\beta_1^0\omega + \beta_2^0\Omega)\Omega + rb^{-1}K_0\sin\theta_0 = 0 \\ &-(\beta_1^0\omega + \beta_2^0\Omega)\omega - (1 + lb^{-1}\cos\theta_0)K_0 = 0 \\ &rb^{-1}\omega\sin\theta_0 - (1 + lb^{-1}\cos\theta_0)\Omega = 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

Нулевой индекс означает, что выражение вычислено для стационарных значений (4.7), $K_0 = (\partial\Theta/\partial q_3)_0$.

Предполагая, что $1 + lb^{-1}\cos\theta_0 \neq 0$ (например, $l < b$), условия (4.8) можно свести к двум независимым соотношениям

$$\Omega = \frac{r\sin\theta_0}{b + l\cos\theta_0}\omega, \quad \kappa\omega^2\sin^2\theta_0 = 0 \tag{4.9}$$

где

$$\kappa = m_T l_1 b + m_C l(b-d)$$

Соотношения (4.9) определяют однопараметрические семейства СД трицикла. Эти СД следующие:

$$1)\ \sin\theta_0 = 0,\ \Omega = 0, \quad \omega \neq 0 - \text{произвольная величина} \tag{4.10}$$

СД представляет собой прямолинейное движение трицикла с произвольной скоростью; направление движения определяется знаком ω; если $\theta_0 = 0$, то третье колесо вынесено вперед по отношению к точке A, а если $\theta = \pi$, то третье колесо вынесено назад по отношению к точке A;

$$2)\ \omega = \Omega = 0, \quad \theta_0 \neq 0 - \text{произвольная величина} \tag{4.11}$$

СД – однопараметрическое семейство положений равновесия системы;

$$3)\ \kappa = 0, \text{ т.е. } m_T l_1 b + m_C l(b-d) = 0$$

$$\theta_0 \neq 0, \pi; \quad \omega \neq 0, \quad \Omega = \frac{r\sin\theta_0}{b + l\cos\theta_0}\omega \tag{4.12}$$

В этом случае при выполнении условий (4.12), связывающих параметры системы, реализуется такое СД трицикла, при котором плоскость третьего колеса повернута на угол θ_0 к оси симметрии тележки, ведущие колеса вращаются с угловой скоростью $\omega/2$, ось симметрии тележки поворачивается со скоростью Ω, а проекция центра масс тележки описывает окружность на горизонтальной плоскости.

Введем отклонения от произвольного СД

$$\dot{q}_1 = \omega + y_1, \quad \dot{q}_2 = \Omega + y_2, \quad q_3 = \theta_0 + z \tag{4.13}$$

Линеаризованные уравнения движения системы (4.6), (4.3) в окрестности СД (4.7) имеют вид

$$A\dot{y} = P_1 y + V_1 z + F^{(1)}u^{(1)} + P_2^T F^{(2)}u^{(2)}, \quad \dot{z} = P_2 y + V_2 z \tag{4.14}$$

где

$$y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix}, \quad u^{(1)} = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix}, \quad u^{(2)} = u_3$$

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11}(\theta_0) & a_{12}(\theta_0) \\ a_{21}(\theta_0) & a_{22}(\theta_0) \end{Vmatrix}, \quad F^{(1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_{72} \end{Vmatrix}, \quad F^{(2)} = 1, \quad P_2 = \begin{Vmatrix} b_{31}(\theta_0) & b_{32}(\theta_0) \end{Vmatrix}$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости прямолинейного СД трицикла (4.10) в отсутствие управляющих воздействий.

В этом случае

$$P_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\omega\beta_2(\theta_0) \end{Vmatrix}, \quad V_1 = \begin{Vmatrix} 0 \\ \dfrac{lr^2\omega^2}{b^3}\varepsilon\gamma \end{Vmatrix}, \quad P_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -\left(1+\dfrac{l\varepsilon}{b}\right) \end{Vmatrix}$$

$$V_2 = \frac{r}{b}\omega\varepsilon \quad (\varepsilon = \cos\theta_0)$$

Здесь предполагается, что ведущие колеса одинаковы ($m_1 = m_2$, тогда $J_4 = 0$, $S_2 = 0$).

Характеристическое уравнение системы (4.14) имеет один нулевой корень, что соответствует наличию одномерного многообразия СД; остальные корни определяются из уравнения

$$\delta_0\lambda^2 + \delta_1\lambda + \delta_2 = 0 \tag{4.15}$$

Согласно доказанной в разд. 2 теореме об устойчивости СД неголономных механических систем рассматриваемого класса условия устойчивости прямолинейного движения трицикла имеют вид ($\delta_0 > 0$)

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon\omega r}{b}\left[lr\left(\mu - \frac{\gamma}{b^2}\right) - a_{12}^1\right] > 0$$

$$\delta_2 = -\varepsilon\kappa > 0$$

Таким образом, для устойчивости прямолинейного движения параметры системы должны удовлетворять условиям

$$\varepsilon[m_T l_1 b + m_C l(b-d)] < 0$$

$$\omega\left\{m_T l_1(\varepsilon l_1 - b) + \varepsilon\left[(m_1+m_2)a^2 + I_G + I_1 + I_2 + \frac{a^2}{r^2}(J_1+J_2)\right] - \right.$$

$$\left. - m_C\left[bl + \frac{d^2 l}{b}(d+\varepsilon l) - 2dl\right] - \frac{l}{b}(I_3 + I_C)\right\} < 0 \tag{4.16}$$

Знак δ_1 зависит от знака ω, т.е. направление движения существенно влияет на устойчивость данной системы, что присуще неголономным механическим системам [2, 3, 7, 12].

При некотором наборе параметров системы ($\delta_1 = 0$, $\delta_2 > 0$) характеристическое уравнение системы (4.15) будет иметь пару мнимых корней, что указывает на возможность существования периодических движений системы в случае, когда значения параметров близки к указанным значениям [13].

Условия устойчивости прямолинейного движения для более простой модели трицикла, не учитывающей инерционности колес, полученные ранее [7], являются следствием условий (4.16).

Рассмотрим вопрос об устойчивости "вращательного" движения (4.12) (случай 3). Для простоты вычислений и наглядности будем полагать $\theta_0 = \pi/2$.

Линеаризованные в окрестности этого СД уравнения имеют вид (4.14), где

$$P_1 = \omega\frac{lr}{b^2}\begin{Vmatrix} -\dfrac{r^2}{b^2}\nu & \dfrac{r}{b}I_5 \\ \dfrac{r}{b}I_6 & -I_6 \end{Vmatrix}, \quad P_2 = \begin{Vmatrix} \dfrac{r}{b} & -1 \end{Vmatrix}, \quad V_1 = \omega^2\frac{r^2l^2}{b^4}\begin{Vmatrix} -\dfrac{r}{b}\nu \\ I_6 \end{Vmatrix},$$

$$V_2 = \omega\frac{lr}{b^2} \quad (I_6 = \nu + b^2\mu)$$

Характеристическое уравнение также имеет один нулевой корень, а остальные корни определяются из уравнения (4.15).

В данном случае $\delta_0 > 0$, $\delta_2 > 0$, и условие устойчивости $\delta_1 > 0$ принимает вид

$$\omega\{a_{11}(\theta_0)I_6b^2 + a_{22}(\theta_0)[\nu r^2 - a_{11}(\theta_0)b^2]\} > 0 \tag{4.17}$$

Так же, как и для случая прямолинейного движения, из условий устойчивости (4.17) СД (4.12) следуют условия устойчивости рассматриваемого движения для более простой модели [7].

Исследуем вопрос о принципиальных возможностях стабилизации СД трицикла, что соответствует анализу управляемости системы.

Вообще говоря, введение управляющих воздействий возможно по всем обобщенным координатам $q_1, \ldots, q_7$. В колесных роботах управление, как правило, реализуется путем введения управляющих моментов по угловым переменным φ_1, φ_2, φ_3, θ, что характеризует повороты колес (φ_1, φ_2, φ_3) и стойки (θ). Эти управляющие моменты соответствуют обобщенным управляющим силам Q_j ($j = 1, 3, 6, 7$).

Очевидно, что при наличии всех управляющих воздействий система всегда управляема.

Управление по координате ϑ не рассматривается ($Q_2 = 0$), так как для его введения необходимо приложение дополнительного внешнего момента сил к трициклу.

Согласно теореме 2 условия управляемости имеют вид

$$\operatorname{rank} U = 3 \tag{4.18}$$

$$U = \begin{Vmatrix} a_{11}\lambda_i - p_{11} & -p_{12} & -\nu_{11} & 1 & b_{31} & b_{61} & 0 \\ -p_{21} & a_{22}\lambda_i - p_{22} & -\nu_{12} & 0 & 0 & b_{62} & b_{72} \\ -b_{31} & -b_{32} & \lambda_i - \nu_{22} & 0 & b_{32} & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

где $\lambda_1 = 0$; λ_2, λ_3 определяются из уравнения (4.15).

Управляемость системы для прямолинейного движения при разных способах введения управляющих воздействий.

1°. Управление вводится только по координатам φ_1, φ_2 ($Q_1 \neq 0$, $Q_7 \neq 0$). Тогда из условия (4.18) следует, что система управляема ($b_{32}b_{72} \neq 0$).

2°. Управление вводится только по координате φ_3. Такое управление формально эквивалентно одному из вариантов введения согласованного управления по координатам φ_1, φ_2: $Q_{\varphi 1} = Q_{\varphi 2}$ ($Q_1 = 2Q_{\varphi 1}$, $Q_6 = 0$, $Q_7 = 0$). В этих случаях система неуправляема.

3°. Управление вводится только по координате θ ($Q_3 \neq 0$, $Q_1 = 0$, $Q_6 = 0$, $Q_7 = 0$). Это управление формально эквивалентно другому варианту введения согласованного управления по координатам φ_1, φ_2: $Q_{\varphi 1} = -Q_{\varphi 2}$ ($Q_1 = 0$, $Q_3 = 0$, $Q_6 = 0$, $Q_7 = 2Q_{\varphi 1}$). В этих случаях система также неуправляема.

Управляемость системы в случае "вращательного" движения.

1°. Система управляема в случае, когда вводятся управления только по координатам φ_1, φ_2 ($Q_1 \neq 0$, $Q_7 \neq 0$). Если управление согласовано: $Q_{\varphi 1} = Q_{\varphi 2}$ ($Q_1 = 2Q_{\varphi 1}$, $Q_6 = 0$, $Q_7 = 0$), то система неуправляема, так же, как и в случае прямолинейного движения.

2°. Если введено управление только по координате φ_3 ($Q_1 = 0$, $Q_3 = 0$, $Q_6 \neq 0$, $Q_7 = 0$), то система управляема.

3°. Если управление вводится только по координате θ, то система управляема в отличие от случая прямолинейного движения.

Проведенный анализ управляемости позволяет строить алгоритмы стабилизации рассмотренных СД трицикла при использовании минимального числа управляющих воздействий.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00194) и программы "Университеты России".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
2. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем //Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. 132 с.
3. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
4. *Карапетян А.В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем // ПММ, 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 418–426.
5. *Каленова В.И., Морозов В.М., Шевелева Е.Н.* Управляемость и наблюдаемость в задаче стабилизации установившихся движений неголономных механических систем с циклическими координатами // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 6. С. 915–924.
6. *Каленова В.И., Морозов В.М.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 192–199.
7. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Об устойчивости установившихся движений неголономных механических систем с циклическими координатами // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 195–205.
8. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 272–331.
9. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
10. *Hautus M.L.J.* Controllability and observability conditions of linear autonomous systems // Indaga Kt. Cones. Math. 1969. V. 31. P. 443–448.
11. *Лобас Л.Г.* Неголономные модели колесных экипажей. Киев: Наук. думка, 1986. 231 с.
12. *Карапетян А.В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 44. Вып. 1. С. 42–51.
13. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.

Москва
e-mail: kalenova@imec.msu.ru
morozov@)imec.msu.ru
salmina@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
28.XI.2003