ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **Том 68. Вып. 6, 2004**

УДК 531.38

© 2004 г. В. Н. Кошляков, В. Л. Макаров

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДЕННЫМИ МАТРИЦАМИ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

Полученные ранее результаты [1–4] развиваются применительно к некоторому специальному классу неконсервативных механических систем, в которых матрицы диссипативных и неконсервативных сил являются вырожденными. Для указанного класса систем формируются необходимые и достаточные условия приведения исходного матричного уравнения к виду, допускающему прямое применение теорем Кельвина – Четаева. Приводится пример.

Общее исследование качественных свойств неконсервативных механических систем представляет достаточно сложную проблему в силу своеобразного и трудно предсказуемого влияния неконсервативных позиционных сил на устойчивость рассматриваемой системы. В некоторых случаях указанные силы действительно способствуют расширению области устойчивости. Однако при самом незначительном изменении параметров системы неконсервативные позиционные силы способны разрушить ее.

Была предложена [1–4] методика исследования механических систем с неконсервативными силами, в основе которой лежит преобразование исходного уравнения с помощью матрицы Ляпунова. Указанное преобразование, не изменяющее, как известно, свойств устойчивости линейной части исходного уравнения, построено таким образом, чтобы в преобразованном уравнении вообще не содержались неконсервативные позиционные структуры. При этом допускалось [1], что матрицы D, G, Π, P (см. ниже, уравнение (1.1)) могут быть переменными.

Как известно, обеспечение асимптотической устойчивости в линейных системах, содержащих неконсервативные позиционные силы, не может быть осуществлено без учета диссипативных сил. В связи с этим следует отметить, что рассмотренная в цитируемых выше работах методика оказывается применимой лишь в случае, когда матрицы диссипативных и неконсервативных позиционных сил невырожденные.

Был рассмотрен и другой подход к исследованию устойчивости неконсервативных систем с помощью прямого метода Ляпунова, не использующий отмеченное выше структурное преобразование исходной системы; при этом матрица диссипативных сил также полагалась невырожденной [5].

К настоящему времени известны публикации, посвященные исследованию неконсервативных систем, в которых матрица диссипативных сил является вырожденной. Примером может служить исследование устойчивости тела, подвешенного на струне [6]. Матрица диссипативных сил в уравнениях возмущенного движения указанной системы является вырожденной, хотя диссипация, тем не менее, является полной.

На основе методики, развитой ранее [1–4], был рассмотрен некоторый класс систем, в котором матрицы диссипативных и неконсервативных позиционных сил также являются вырожденными[1]. При этом предполагалось, что матрицы диссипативных и позиционных неконсервативных сил, входящие в виде блоков в состав исходных матриц, связаны линейным соотношением со скалярной постоянной.

Ниже рассматривается более общий класс механических систем с вырожденными матрицами диссипативных и неконсервативных позиционных сил, не требующий соблюдения указан-

[1] *Кошляков В.Н., Стороженко В.А.* К исследованию влияния диссипации в симметричных системах связанных твердых тел: Препринт № 3, Киев, НАН Украины. Ин-т математики, 2003. 34 с.

ного выше линейного соотношения. Получены строгие условия, на основе которых допустимо исследование устойчивости с помощью прямого применения теорем Кельвина – Четаева.

1. Исходные уравнения. Рассмотрим матричное уравнение вида

$$J\ddot{x} + (D + HG)\dot{x} + (\Pi + P)x = 0 \tag{1.1}$$

где $x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_{2m})$ – искомый вектор; $J = J^T$, $D = D^T$, $G = -G^T$, $\Pi = \Pi^T$, $P = -P^T$ – заданные постоянные матрицы $2m \times 2m$; H – некоторый большой положительный скалярный параметр, от которого, вообще говоря, может зависеть матрица Π.

Матрица J считается положительно определенной, матрица D в отличие от принятых ранее [1–4] условий предполагается неотрицательно определенной.

Уравнение (1.1) описывает поведение многочисленных механических систем, находящихся под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и собственно-неконсервативных позиционных сил. В системах, содержащих гироскопы, под J следует понимать матрицу суммарных моментов инерции относительно соответствующих осей.

Положим, что $\mathrm{rank}D = m$. Тогда с помощью элементарных операций можно представить матричное уравнение (1.1) таким образом, что матрица D будет иметь вид [7]

$$D = \begin{Vmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

Перейдем к новому вектору $\xi(t)$, полагая

$$x(t) = L_1(t)\xi(t) \tag{1.3}$$

Матрица $L_1(t)$ находится из условия

$$D\dot{L}_1(t) = -PL_1(t); \quad P = \|P_{\alpha\beta}\|_{\alpha,\,\beta\,=\,1,\,2}, \quad t > 0; \quad L_1(0) = \mathrm{diag}(E, E) \tag{1.4}$$

E – единичная матрица $m \times m$.

Условия (1.4) удовлетворяются, если

$$P_{12} = P_{22} = 0, \quad L_1(t) = \mathrm{diag}[L(t), L(t)] \tag{1.5}$$

При этом $(m \times m)$-матрица $L(t)$ находится из условия

$$\dot{L}(t) = -D_{11}^{-1}P_{11}L(t), \quad t > 0, \quad L(0) = E \tag{1.6}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} V_1 &= 2J\mathrm{diag}[A, A] + D + HG \\ W_1 &= J\mathrm{diag}[A^2, A^2] + HG\mathrm{diag}[A, A] + \Pi, \quad A = -D_{11}^{-1}P_{11} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Тогда, используя замены (1.3) и (1.6), приводим уравнение (1.1) к форме

$$\ddot{\xi}(t) + L_1^{-1}(t)J^{-1}V_1L_1(t)\dot{\xi}(t) + L_1^{-1}(t)J^{-1}W_1L_1(t)\xi(t) = 0 \tag{1.8}$$

где матрица $L_1(t)$ считается невырожденной. При соблюдении условий коммутативности

$$J^{-1}V_1L_1(t) = L_1(t)J^{-1}V_1, \quad J^{-1}W_1L_1(t) = L_1(t)J^{-1}W_1 \tag{1.9}$$

уравнение (1.8) приводится к виду

$$J\ddot{\xi}(t) + V_1\dot{\xi}(t) + W_1\xi(t) = 0, \tag{1.10}$$

где матрицы J, V_1, W_1 постоянны и определяются формулами (1.7).

Если матрица W_1 получается симметрической, а матрица V_1 зависящей от диссипативных и гироскопических сил, то к уравнению (1.10) допустимо применение теорем Кельвина – Четаева. Поэтому естественной является постановка вопроса о нахождении необходимых и достаточных условий, при которых уравнения (1.8) и (1.10) будут эквивалентными, в том смысле, что каждое решение уравнения (1.8) является одновременно решением уравнения (1.10) и наоборот.

2. Условие эквивалентности уравнений (1.8) и (1.10). Решение матричной задачи Коши (1.6) имеет вид

$$L(t) = \exp(At) = D_{11}^{-1/2}\exp(P'_{11}t)D_{11}^{1/2}, \quad P'_{11} = -D_{11}^{-1/2}P_{11}D_{11}^{-1/2} \tag{2.1}$$

при условии, что матрица D_{11} является положительно определенной и следовательно для нее существуют матрицы $D_{11}^{1/2}$, $D_{11}^{-1/2}$. Если потребовать выполнения условия $\det P_{11} \neq 0$, то совершенно аналогично тому, как это было сделано ранее [3], показывается, что матрица $L(t)$, а вместе с ней и матрица $L_1(t)$ будут матрицами Ляпунова. Тогда преобразование (1.3) не изменяет свойств устойчивости уравнения (1.1).

Теорема. Пусть J, D, Π – произвольные симметричные $(2m \times 2m)$-матрицы, причем матрицы J, D_{11} положительно определены. Пусть далее P_{11} – произвольная невырожденная кососимметрическая $(m \times m)$-матрица, где m – четное число. Тогда, для того чтобы уравнения (1.8) и (1.10) были эквивалентны при любом $H > 0$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{gathered} J^{-1}G\dot{L}_1(0) = \dot{L}_1(0)J^{-1}G, \quad J^{-1}\Pi\dot{L}_1(0) = \dot{L}_1(0)J^{-1}\Pi, \\ J^{-1}D\dot{L}_1(0) = \dot{L}_1(0)J^{-1}D, \quad \dot{L}_1(0) = \mathrm{diag}(A, A) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Доказательство. Сначала покажем, что для того чтобы уравнения (1.8) и (1.10) были эквивалентными, необходимо и достаточно выполнения условий (1.9). Действительно, пусть условия (1.9) имеют место. Тогда уравнение (1.8) в силу неособенности матрицы $L_1(t)$ $(t \geq 0)$ преобразуется в уравнение (1.10). Это свидетельствует о том, что уравнения (1.8) и (1.10) эквивалентны.

Справедливо обратное утверждение. Пусть уравнения (1.8) и (1.10) эквивалентны в указанном выше смысле. Зафиксируем произвольный момент времени $t_0 \geq 0$ и положим

$$\xi(t_0) = e_k, \quad \dot{\xi}(t_0) = 0, \quad e_k = (\delta_{jk})_{j=1}^{2m}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2m \tag{2.3}$$

(δ_{jk} – символ Кронекера). Тогда из уравнения (1.10) получаем

$$\ddot{\xi}(t_0) = -J^{-1}W_1e_k \tag{2.4}$$

Поскольку решение уравнения (1.10) с начальными условиями (2.3) является одновременно и решением уравнения (1.8), то будем иметь

$$-JL_1(t_0)J^{-1}W_1e_k + W_1L_1(t_0)e_k = 0$$

или

$$J^{-1}W_1L_1(t_0)e_k = L_1(t_0)J^{-1}W_1e_k, \quad \forall t_0 \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 2m \tag{2.5}$$

что совпадает со вторым из условий (1.9).

Первое из условий (1.9) доказывается аналогично. Вместо начальных условий (2.3) здесь следует принять

$$\xi(t_0) = 0, \quad \dot{\xi}(t_0) = e_k, \quad k = 1, 2, \ldots, 2m \tag{2.6}$$

Тогда приходим к первому из условий (1.9). Повторяя рассуждения, примененные ранее [3], убеждаемся, что условия (1.9) эквивалентны следующим:

$$J^{-1}V_1\dot{L}_1(0) = \dot{L}_1(0)J^{-1}V_1, \quad J^{-1}W_1\dot{L}_1(0) = \dot{L}_1(0)J^{-1}W_1 \tag{2.7}$$

Действительно, из условий (1.9) очевидно следуют условия (2.7). Тогда из соотношений (1.5) и (2.1) следует, что матрицы $J^{-1}V_1$ и $J^{-1}W_1$ коммутируют с матрицей diag$[D_{11}^{-1}P_{11}, D_{11}^{-1}P_{11}]$ и, следовательно, с матрицей $L(t)$, $\forall t \geq 0$.

Вместе с тем условия (2.7) при любом $H > 0$ выполняются тогда и только тогда, когда имеют место условия коммутативности (2.2).

Следствие. Для того чтобы матрица W_1 была симметричной при любом $H > 0$ необходимо и достаточно выполнения условий

$$G\dot{L}_1(0) = -\dot{L}_1(0)^TG, \quad J[\dot{L}_1(0)]^2 = [\dot{L}_1(0)]^2J \tag{2.8}$$

Доказательство становится очевидным, если разность $W_1 - W_1^T$ представить в форме

$$W_1 - W_1^T = J[\dot{L}_1(0)]^2 - [\dot{L}_1(0)^T]^2J + H\{G\dot{L}_1(0) + \dot{L}_1(0)^TG\} \tag{2.9}$$

В силу изложенного выше при решении задачи (1.4) не требуется специального нахождения псевдообратной матрицы D^+ [8], так как она непосредственно получается в явном виде:

$$D^+ = \begin{Vmatrix} D_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.10}$$

Из доказательства приведенной выше теоремы также следует, что матрицы G и Π могут быть переменными, что согласуется с более ранними результатами [1].

В предположении достаточно большой величины скалярного параметра $H > 0$ и невырожденности матрицы гироскопических сил в прикладной теории гироскопов находят широкое применение так называемые прецессионные уравнения, матричное представление которых получается из уравнения (1.1) при пренебрежении слагаемым $J\ddot{x}$ в левой части этого уравнения. Тогда приходим к уравнению вида

$$(D + HG)\dot{u} + (\Pi + P)u = 0 \tag{2.11}$$

Законность замены уравнения (1.1) уравнением (2.11) требует, конечно, надлежащего обоснования. Установлено, что определенным препятствием при переходе к прецессионным уравнениям является наличие в исходных уравнениях неконсервативных позиционных структур. В этом случае асимптотически устойчивое решение, получаемое в рамках уравнения (2.11), может оказаться в силу расходимости быстрых нутационных колебаний неустойчивым в точных уравнениях. В такой ситуации без учета диссипативных сил, всегда присутствующих в реальной системе, никаким доминированием гироскопических сил, т.е. никаким увеличением скалярного параметра H, добиться устойчивости невозможно. Это обстоятельство учитывается далее при рассмотрении одного из вариантов четырехгироскопного гирогоризонта с управлением по типу радиальной коррекции.

3. Четырехгироскопный гирогоризонт. В качестве примера приложения изложенной выше теории исследуется математическая модель четырехгироскопного гироризонта, отличающаяся по структуре управления от рассмотренных ранее систем подобного рода [9].

Система представляет собой установленную в кардановом подвесе платформу, стабилизируемую в горизонте посредством четырех одинаковых гироскопов с вертикальными осями их кожухов. Гироскопы попарно связаны антипараллелограммами, обеспечивающими разворот каждой пары гироскопов в плоскости платформы на одинаковые углы в противоположные стороны. Каждая пара гироскопов соединена пружиной с внутренней рамкой подвеса. Предполагается, что центр масс системы расположен ниже ее геометрического центра.

В отличие от систем, рассмотренных в [9], предусмотрены две системы управления, работающие по типу радиальной коррекции, с помощью которых накладываются два корректирующих момента: относительно оси внешнего кольца карданова подвеса, пропорционального величине угла поворота одной из пар гироскопов относительно вертикальных осей их кожухов и момента, действующего относительно оси кожуха гироскопа указанной пары, пропорционального величине угла поворота внешнего кольца.

Уравнения движения рассматриваемой системы в предположении ее установки на подвижном основании и с учетом вращения Земли имеют вид

$$\begin{aligned}
&J_1\ddot{\alpha} + b_1\dot{\alpha} + 2H\dot{\delta} + 2H\omega\gamma + s_1\delta + Pl\alpha = -Pl\upsilon\omega/g \\
&J_2\ddot{\delta} + b_2\dot{\delta} - 2H\dot{\alpha} + 2H\omega\beta + c\delta - s_2\alpha = 2HU\cos\varphi\sin\psi \\
&J_2\ddot{\gamma} + 2H\dot{\beta} + 2H\omega\alpha + c\gamma = -2H(U\cos\varphi\sin\psi + \upsilon/R) \\
&J_2\ddot{\beta} - 2H\dot{\gamma} + 2H\omega\delta + Pl\beta = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где α, β – углы отклонения платформы от плоскости горизонта, γ, δ – углы поворота каждой пары гироскопов относительно вертикальных осей их кожухов. Остальные обозначения – те же, что и в уравнениях (3.1) работы [3]. Введены еще дополнительные обозначения: U – угловая скорость суточного вращения Земли, принимаемой за сферу радиуса R, φ – широта (геоцентрическая) места, ψ – угол, отсчитываемый по часовой стрелке от направления на Север (курс основания). Вертикальная составляющая $U\sin\varphi$ угловой скорости вращения Земли включена в состав ω.

Моменты $b_1\dot{\alpha}$ и $b_2\dot{\delta}$ малых диссипативных сил учтены в первых двух уравнениях системы (3.1), содержащих неконсервативные позиционные моменты $s_1\delta$ и $s_2\alpha$. В двух остальных уравнениях, не содержащих неконсервативных позиционных структур, диссипативные силы не учитываются.

Однородная часть системы (3.1) соответствует матричному уравнению (1.1) и структурам (1.2). Обозначая $\alpha = x_1$, $\delta = x_2$, $\gamma = x_3$, $\beta = x_4$ и вводя вектор $x = \mathrm{col}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, будем иметь применительно к системе (3.1):

$$\begin{gathered}
J = \mathrm{diag}[J_1, J_2, J_2, J_3], \quad D = \mathrm{diag}[b_1, b_2, 0, 0], \quad D_{11} = \mathrm{diag}[b_1, b_2], \quad G = \mathrm{diag}[S, S] \\
P = s\,\mathrm{diag}[S, [0]], \quad P_{11} = sS, \quad S = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \\
\Pi = \begin{Vmatrix} T_1 & 2H\omega E \\ 2H\omega E & T_2 \end{Vmatrix}, \quad T_1 = \begin{Vmatrix} Pl & m \\ m & c \end{Vmatrix}, \quad T_2 = \begin{Vmatrix} c & 0 \\ 0 & Pl \end{Vmatrix} \\
s = (s_1 + s_2)/2, \quad m = (s_1 - s_2)/2
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Для этих данных

$$\dot{L}_1(0) = \mathrm{diag}(A, A), \quad A \begin{Vmatrix} 0 & -b_1^{-1}s \\ b_2^{-1}s & 0 \end{Vmatrix} \tag{3.3}$$

Матрица A определяется согласно выражениям (1.5).

Условия (2.2) налагают определенные ограничения на выбор параметров системы. Так, используя первое из них и принимая во внимание формулы (3.2), получаем соотношения

$$b_1/b_2 = J_1/J_2 = J_2/J_3 \tag{3.4}$$

С учетом их из второго условия (2.2) получаем, учитывая обозначения в (3.2), еще одни ограничения

$$b_1 = b_2, \quad J_1 = J_2 = J_3, \quad s_1 = s_2, \quad c = Pl \tag{3.5}$$

Третье из условий (2.2) при этом выполняется и дополнительных ограничений не вносит.

При условиях (3.4) и (3.5), в которых полагаем $b_1 = b_2 = b$, $J_1 = J_2 = J_3 = J$, получаем следующее выражение матрицы W_1:

$$W_1 = 2H\omega \begin{Vmatrix} \mu E & E \\ E & \mu E \end{Vmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{2H\omega}\left[c + 2H\frac{s}{b} - J\left(\frac{s}{b}\right)^2\right] \tag{3.6}$$

где E – единичная матрица 2×2.

Применяя критерий Сильвестра к симметричной матрице (3.6), получаем необходимое и достаточное условие ее положительной знакоопределенности

$$b^2c + 2Hb(s - b\omega) - Js^2 > 0 \tag{3.7}$$

совпадающее по структуре со вторым из условий (3.8) работы [3], если положить $J = 2A'$.

Заметим, что в предположении достаточно большой величины скалярного параметра $H > 0$ можно применить использованную ранее [4] методику сравнения соответствующих матриц по нормам. Тогда, как было показано [4], можно прийти к более общим в сравнении с (3.7) условиям, не требующим, в частности, выполнения равенства $s_1 = s_2$ в ограничениях (3.5).

Матрица D диссипативных сил в уравнениях (3.1) является вырожденной. Поэтому соответствующая функция Релея $2\Phi = b_1\dot{\alpha}^2 + b_2\dot{\delta}^2$ не будет положительно определенной для всех скоростей $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\beta}$. Тем не менее диссипация в уравнениях (3.1) может оказаться полной.

Обращаясь к однородной части системы (3.1), замечаем, что при $\dot{\alpha} = \dot{\delta} = 0$, т.е. когда α и δ постоянны, будут постоянными и величины β, γ, т.е. $\dot{\beta} = \dot{\gamma} = 0$. Это означает, что диссипативные силы обращаются в нули в положениях равновесия.

Обозначим через Δ определитель позиционных сил в системе (3.1). Вычисление дает

$$\Delta = (4H^2\omega^2 - cPl)^2 + cPls_1s_2 \tag{3.8}$$

Если этот определитель не равен нулю, то диссипативные силы обращаются в нуль только в невозмущенном движении, соответствующем положениям равновесия. Это означает, что диссипация является полной [6]. Тогда в случае выполнения условия (3.7) положительной определенности матрицы W_1 добавление произвольных гироскопических сил и сил с полной диссипацией сообщает рассматриваемой системе свойство асимптотической устойчивости.

Если определитель (3.8) оказывается равным нулю, то рассматриваемая система может не обладать свойством асимптотической устойчивости. Чтобы показать это, положим $Pl = 0$, $c = 0$ в уравнениях (3.1) применительно к случаю неподвижного основания, когда $\omega \equiv 0$. Этот случай соответствует отсутствию в системе маятникового эффекта, когда ее центр тяжести совпадает с геометрическим центром подвеса, а также отсутствию пружин, с помощью которых гироскопы соединены с внутренним кольцом. При этих условиях система (3.1) распадается на две независимые системы. При этом уравнения относительно координат β и γ получаются в виде

$$J_2\ddot{\gamma} + 2H\dot{\beta} = M, \quad J_3\ddot{\beta} - 2H\dot{\gamma} = 0, \quad M = -2H(U\cos\varphi\sin\psi + \upsilon/R) \tag{3.9}$$

Однородная часть уравнений (3.9) соответствует исходному уравнению (1.1), когда в нем присутствуют лишь одни гироскопические силы.

Если определитель матрицы гироскопических сил не равен нулю (это имеет место в данном случае), то система оказывается устойчивой в скоростях и координатах, но не асимптотически. Даже при добавлении диссипативных сил в системе (3.9) можно обеспечить асимптотическую устойчивость лишь в скоростях, но не в координатах [10].

При наличии же постоянного момента M в правой части уравнений (3.9) возникает нежелательный уход (дрейф) системы, линейно нарастающий со временем. Действительно, решение системы (3.9) применительно к нулевым начальным условиям в координатах и скоростях имеет вид

$$\beta = \frac{Mt}{2H} + \frac{M}{2Hk}\sin kt, \quad \gamma = \frac{J_3M}{4H^2}(1-\cos kt); \quad k = \frac{2H}{\sqrt{J_2J_3}} \tag{3.10}$$

Первое из выражений (3.10) свидетельствует о систематическом дрейфе внутреннего кольца подвеса, который сопровождается незатухающими нутационными колебаниями с круговой частотой k, определяемой последней формулой (3.10). По координате γ имеют место нутационные колебания с той же частотой около смещенного относительно нуля и весьма малого по величине положения равновесия $\gamma = \gamma^*$, где $\gamma^* = J_3M/(4H^2)$.

Наличие систематического ухода внутреннего кольца непосредственно следует и из уравнений (3.9), рассматриваемых в рамках прецессионной теории, для чего в названных уравнениях следует пренебречь инерционными членами $J_2\ddot{\gamma}$ и $J_3\ddot{\beta}$.

Иной результат получается, если применительно к условиям $Pl = c = 0$, считать $\omega \neq 0$. Для этих условий, согласно выражению (3.8), имеем $\Delta = 16H^4\omega^4$. Система (3.1) уже не распадается на две независимые системы. Характеристическое уравнение прецессионной системы, получаемой из (3.1), можно представить в виде

$$\begin{gathered}(1+\varepsilon_1\varepsilon_2)\lambda^4 + (m_1+m_2)\lambda^3 + (2\omega^2 + m_1m_2)\lambda^2 + \omega^2(m_1+m_2)\lambda + \omega^4 = 0\\ \varepsilon_i = b_i/(2H), \quad m_i = s_i/(2H); \quad i = 1, 2\end{gathered} \tag{3.11}$$

Поскольку коэффициенты уравнения (3.11) положительны, то единственное условие Гурвица для названного уравнения приводится к виду

$$\omega^2(s_1+s_2)^2(s_1s_2 - b_1b_2\omega^2) > 0 \tag{3.12}$$

Условие (3.12) выполняется, если

$$\omega \neq 0, \quad s_1s_2 > b_1b_2\omega^2 \tag{3.13}$$

При выполнении условий (3.13) имеет место асимптотическая устойчивость в прецессионных уравнениях. Если принять $s_1 = s_2 = s$, $b_1 = b_2 = b$, то второе из условий (3.13) приводится к виду $s > b\omega$, что согласуется с неравенством (3.7), в котором, применительно к случаю $c = 0$, следует также считать $\omega \neq 0$.

Если рассматриваемое устройство способно реагировать на вращение Земли, то в случае неподвижного относительно Земли основания следует положить $\omega = U\sin\varphi$. Тогда условие (3.12) выполняется лишь при соблюдении второго из условий (3.13), за исключением экватора, когда $\varphi = 0$. В противном случае можно осуществлять принудительное вращение основания с заданной угловой скоростью. Подобная мера находит применение на практике в целях повышения точности гироскопической аппаратуры и описана в соответствующей технической литературе [11].

При $\omega \neq 0$ в двух последних уравнениях системы (3.1) содержатся члены $2H\omega\alpha$ и $2H\omega\beta$ с множителем $2H\omega$, который, в свою очередь, входит в состав матрицы П консервативных сил в (3.2).

Поэтому вращение основания с угловой скоростью ω способствует проявлению консервативных свойств всей системы в целом. При определенных условиях это приводит к расширению области устойчивости в рассматриваемом устройстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кошляков В.Н.* О структурных преобразованиях динамических систем с гироскопическими силами // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 774–780.
2. *Кошляков В.Н.* О структурных преобразованиях неконсервативных систем // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 933–941.
3. *Кошляков В.Н., Макаров В.Л.* К теории гироскопических систем с неконсервативными силами // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 698–704.
4. *Кошляков В.Н.* О переходе к уравнениям прецессионной теории в неконсервативных гироскопических системах // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 43–51.
5. *Агафонов С.А.* Устойчивость неконсервативных систем и оценка области притяжения // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 239–243.
6. *Карапетян А.В., Лагутина И.С.* Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом диссипативного и постоянного моментов // ИЗв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 53–57.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
8. *Müller P.C.* Verallgemeinerung des stabilitätssatzes von Thomson – Tait – Chetaev auf mechanische Systeme mit scheinbar nichtkonservativen Lagekzäften // ZAMM. 1972. Bd. 52. H. 4. T. 65–T. 67.
9. *Ройтенберг Я.Н.* Гироскопы. М.: Наука, 1975. 592 с.
10. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
11. *Каргу Л.И.* Гироскопические приборы и системы. Л.: Судостроение, 1988. 235 с.

Киев
e-mail: institute@imath.kiev.ua

Поступила в редакцию
16.XII.2003