УДК 531.01 + 532.527

© 2004 г. В. В. Козлов

ДИНАМИКА ИЗМЕНЯЕМЫХ СИСТЕМ И ГРУППЫ ЛИ

Рассматриваются механические системы, у которых конфигурационным пространством служит группа Ли, а лагранжиан инвариантен относительно левых сдвигов на этой группе. Предполагается, что под действием только внутренних сил может меняться геометрия масс системы. Уравнения движения допускают полный набор нётеровых интегралов, линейных по скоростям. При фиксированных значениях этих интегралов уравнения движения сводятся к неавтономной системе дифференциальных уравнений первого порядка на группе Ли. Обсуждаются условия, при которых за счет изменения геометрии масс систему можно переместить из любого начального положения в наперед заданное. В качестве примеров рассмотрены задача "о падающей кошке" и задача о движении тела переменной формы в безграничном объеме идеальной жидкости.

1. Изменяемые системы на группах Ли. Пусть G – связная n-мерная группа Ли, которая является конфигурационным многообразием механической системы с $n > 1$ степенями свободы. Пусть g – ее алгебра Ли; это n-мерное векторное пространство с естественной операцией коммутирования [,]. Например, можно считать, что g – это линейное пространство левоинвариантных векторных полей на группе G, причем операция [,] совпадает с обычным коммутатором (скобкой Якоби) касательных векторных полей.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – локальные координаты на G, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ – скорость системы – касательный вектор к G в точке x. Введем базис $v_1, \ldots, v_n$ независимых левоинвариантных векторных полей (они линейно независимы во всех точках G). Скорость $\dot{x}$ можно разложить по этому базису:

$$\dot{x} = \sum \omega_k v_k \tag{1.1}$$

Коэффициенты $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ зависят от x и $\dot{x}$, причем линейно по скоростям. Они называются квазискоростями и служат координатами на алгебре g.

Будем рассматривать движение по инерции. Так что лагранжиан сводится к кинетической энергии $T = T_2 + T_1 + T_0$. Будем полагать, что функция T левоинвариантна; другими словами, она зависит только от квазискоростей ω и времени t. Зависимость от времени появляется из-за возможного изменения геометрии масс системы под действием только внутренних сил.

Таким образом,

$$T_2 = (I\omega, \omega)/2, \quad T_1 = (\lambda, \omega) \tag{1.2}$$

где матрица инерции $I = \|I_{ij}\|$ и гироскопический вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – заранее известные функции времени. Так как свободное слагаемое T_0 зависит лишь от времени, оно несущественно (поскольку не присутствует в уравнениях движения). Уравнения Пуанкаре будут уравнениями только на алгебре Ли g:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_k}\right)^{\cdot} = \sum c_{ki}^j \omega_i \frac{\partial T}{\partial \omega_j}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Здесь c_{ki}^{j} – структурные постоянные алгебры g. Детали см., например, в [1] (гл. III).

Приведем два примера.

1°. *Задача Лиувилля о вращении изменяемого тела* [2]. Свяжем с телом неподвижные оси, которые в каждый момент времени будут главными осями инерции этого тела, причем начало подвижной системы совпадает с неподвижным центром масс. Предположим, что изменение геометрии масс системы точек под действием внутренних сил происходит по известному заранее закону. В этих предположениях уравнения (1.3) переходят в уравнения Лиувилля

$$(I\omega+\lambda)^{\cdot}+\omega\times(I\omega+\lambda) = 0 \tag{1.4}$$

где $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$, ω – угловая скорость вращения подвижного трехгранника. Вектор $I\omega + \lambda$ – кинетический момент изменяемого тела относительно центра масс. Уравнения (1.4) были обобщены [3] на случай пространственного движения изменяемого тела (когда $G = E(3)$).

2°. *Задача о движении изменяемого тела в бесконечном объеме идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности [3]*. В этом случае G совпадает с $E(3)$ – группой движений трехмерного евклидова пространства, и уравнения (1.3) переходят в систему уравнений Кирхгофа:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\omega}\right)^{\cdot}+\upsilon\times\frac{\partial T}{\partial\upsilon} = 0,\quad \left(\frac{\partial T}{\partial\upsilon}\right)^{\cdot}+\omega\times\frac{\partial T}{\partial\omega}+\upsilon\times\frac{\partial T}{\partial\upsilon} = 0 \tag{1.5}$$

Здесь υ – скорость начала подвижной системы отсчета, ω – угловая скорость подвижного трехгранника, T – кинетическая энергия системы тело + жидкость, которая зависит от υ, ω и времени t.

2. Динамика изменяемых систем с нулевым кинетическим моментом. Изменяемые системы на группах Ли с левоинвариантной кинетической энергией можно изучать развитым ранее методом ([1], гл. III). С этой целью рассмотрим n независимых *правоинвариантных* векторных полей $w_1, \ldots, w_n$. Порождаемые ими фазовые потоки являются семействами *левых* сдвигов на группе G. Поскольку лагранжиан (совпадающий с кинетической энергией) по предположению левоинвариантен, полная система дифференциальных уравнений (1.1) и (1.3) допускает n независимых нетеровых интегралов

$$\frac{\partial T}{\partial\omega}\cdot w_1 = c_1, \ldots, \frac{\partial T}{\partial\omega}\cdot w_n = c_n \tag{2.1}$$

где $c_1, \ldots, c_n$ – набор произвольных постоянных. Левые части этих уравнений линейны относительно скоростей $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$. Ввиду невырожденности квадратичной формы T_2, систему (2.1) можно разрешить относительно скоростей:

$$\dot{x} = \upsilon(x, t, c), \quad x\in G \tag{2.2}$$

Это – система уравнений на группе, зависящая от параметров c. Было показано [1], что фазовый поток (2.2) по своим свойствам аналогичен течениям многомерной идеальной жидкости.

Будем рассматривать случай, когда $c = 0$: можно считать, что в начальный момент система покоилась, а затем под действием внутренних сил начала меняться ее геометрия масс. Уравнения (2.2) в этом случае сильно упрощаются. Действительно, поскольку $c = 0$ и векторные поля $w_1, \ldots, w_n$ линейно независимы во всех точках G, то $\partial T/\partial\omega = 0$. Ввиду формул (1.2),

$$\frac{\partial T}{\partial\omega} = I\omega+\lambda = 0$$

Следовательно, скорость $\omega = -I^{-1}\lambda$ – известная функция времени.

Без ущерба для общности можно считать, что тензор инерции приведен к диагональному виду: $I = \mathrm{diag}(I_1, \ldots, I_n)$. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – компоненты ковектора гироскопических сил λ, то

$$\omega_k = -\frac{\lambda_k}{I_k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

и, следовательно, уравнения (2.2) при $c = 0$ сразу вытекают из системы (1.1):

$$\dot{x} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{I_k} v_k(x) \tag{2.3}$$

Напомним, что $v_1, \ldots, v_n$ – фиксированный набор независимых векторных полей на группе G.

Неавтономная система (2.3) обладает важными свойствами. Например, она допускает интегральный инвариант (инвариантную меру), плотность которого совпадает с плотностью правоинвариантной меры на группе G. Этот результат выводится из результатов рассмотрения стационарного случая [4]. В частности, для унимодулярной группы G (сюда, например, относятся все компактные группы) поток системы (2.3) сохраняет двустороннюю меру Хаара.

С другой стороны, поток системы (2.3) переводит интегральные кривые каждого правоинвариантного векторного поля w в интегральные кривые этого же поля. Другими словами, эти кривые вморожены в поток системы (2.3). Действительно, условие вмороженности интегральных кривых стационарного поля $w(x)$ имеет вид $[w, v] = \mu w$, где μ – некоторая функция от x и t (простое доказательство этого условия можно найти в [5]). Однако $[w, v_k] = 0$ для всех k, поскольку фазовые потоки, порождаемые левоинвариантными (правоинвариантными) векторными полями на группе Ли, являются семействами правых (левых) сдвигов.

Пример 1. В задаче Лиувилля о вращении изменяемого тела уравнения (2.3) имеют вид

$$\begin{gathered} \dot{\vartheta} = -\frac{\lambda_1 \cos\varphi}{I_1} + \frac{\lambda_2 \sin\varphi}{I_2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\lambda_1 \sin\varphi\cos\theta}{I_1 \sin\theta} + \frac{\lambda_2 \cos\varphi\cos\theta}{I_2 \sin\theta} - \frac{\lambda_3}{I_3} \\ \dot{\psi} = -\frac{\lambda_1 \sin\varphi}{I_1 \sin\theta} - \frac{\lambda_2 \cos\varphi}{I_2 \cos\theta} \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь ϑ, φ, ψ – углы Эйлера – координаты на группе $SO(3)$. В соответствии с системой (2.3) в этих формулах коэффициенты при $-\lambda_k/I_k$ определяют компоненты независимых левоинвариантных векторных полей на группе $SO(3)$. Действительно, например,

$$\cos\varphi, \quad -\sin\varphi\cos\theta/\sin\theta, \quad \sin\varphi/\sin\theta \tag{2.5}$$

– компоненты единичной угловой скорости, направленной вдоль первой подвижной оси (что вытекает из кинематических уравнений Эйлера). Но это как раз означает, что (2.5) – компоненты левоинвариантного векторного поля.

Уравнения (2.4) допускают интегральный инвариант

$$\iiint \sin\theta d\theta d\varphi d\psi \tag{2.6}$$

который совпадает с двусторонней инвариантной мерой Хаара на группе $SO(3)$ (см., например, [6]). В углах Эйлера ϑ, φ, ψ правоинвариантное поле, отвечающее вращению трехгранника с единичной угловой скоростью вокруг третьей неподвижной оси, имеет компоненты 0, 0, 1. Следовательно, интегральные кривые этого поля задаются уравнениями ϑ, $\varphi = \mathrm{const}$. Поскольку уравнения системы (2.4) не содержат явно угла ψ, то отсюда вытекает, что указанные линии вморожены в поток системы (2.4).

Отметим, что уравнения (2.4) имеют место и для гиростата – твердого тела с симметричными маховиками. Распределение масс такой системы, очевидно, не меняется ($I_k = \mathrm{const}$) и гироскопический момент $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ также постоянен. В этом случае уравнения (2.4) явно интегрируются. Так как система (2.4) имеет интегральный инвариант (2.6), для ее интегрируемости достаточно знать непостоянный первый интеграл. Наличие такого интеграла – исключительное явление.

Уравнения (2.4) можно представить в виде линейной системы дифференциальных уравнений с избыточными переменными. Действительно, из уравнений Лиувилля (1.4) вытекает, что вектор кинетического момента $K = I\omega + \lambda$ сохраняет неизменную величину и направление в неподвижным пространстве. Согласно предположению, $K = 0$. Следовательно, $\omega = -I^{-1}\lambda$. Пусть α, β, γ – неподвижный ортонормированный репер. Тогда уравнения Пуассона

$$\dot{\alpha} + \omega \times \alpha = 0, \quad \dot{\beta} + \omega \times \beta = 0, \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0 \tag{2.7}$$

будут замкнутой системой линейных уравнений с переменными коэффициентами. Девять компонент векторов α, β, γ связаны шестью соотношениями ортогональности. Интересно отметить, что для интегрируемости системы (2.7) достаточно знать хотя бы одно ненулевое решение $\xi(t)$ уравнения Пуассона. Действительно, функция (ξ, α) будет первым интегралом первого из уравнений (2.7):

$$(\xi, \alpha)^{\boldsymbol{\cdot}} = (\xi \times \omega, \alpha) + (\xi, \alpha \times \omega) = 0$$

Эти замечания можно обобщить. Согласно теореме Адо, каждая алгебра Ли конечной размерности допускает представление в конечномерном векторном пространстве. Следовательно, уравнения (2.3) также можно представить в виде линейной системы дифференциальных уравнений (с избыточным набором переменных).

Пример 2. Рассмотрим частный случай плоскопараллельного движения изменяемого тела в жидкости без воздействия внешних сил: тело движется так, что в каждый момент времени его форма и распределение масс симметричны относительно некоторой неподвижной плоскости П. Пусть x, y – декартовы координаты начала подвижной системы отсчета на плоскости П, а α – угол поворота подвижных осей. Известно (см. [3]), что в каждый момент времени подвижную систему отсчета можно выбрать так, что кинетическая энергия системы тело + жидкость имеет вид

$$T = (a_1 v_1^2 + a_2 v_2^2 + b\omega^2)/2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \mu\omega + \chi$$

Здесь $\omega = \dot{\alpha}$ – угловая скорость подвижного репера, v_1, v_2 – проекции скорости начала этого репера на подвижные оси. Коэффициенты в этой формуле считаются известными функциями времени. В случае плоскопараллельного движения тела группа G совпадает с группой движений плоскости $E(2)$.

Уравнения (2.3) принимают следующий вид:

$$\dot{x} = -\frac{\lambda_1 \cos\alpha}{a_1} + \frac{\lambda_2 \sin\alpha}{a_2}, \quad \dot{y} = -\frac{\lambda_1 \sin\alpha}{a_1} - \frac{\lambda_2 \cos\alpha}{a_2}, \quad \dot{\alpha} = -\frac{\mu}{b} \tag{2.8}$$

Здесь, конечно, предполагается, что суммарный импульс и кинетический момент системы тело + жидкость равны нулю.

Укажем левоинвариантные векторные поля на $E(2)$

$$X = (\cos\alpha, -\sin\alpha, 0), \quad Y = (\sin\alpha, \cos\alpha, 0), \quad Z = (0, 0, 1)$$

Их коммутаторы

$$[X, Y] = 0, \quad [X, Z] = Y, \quad [Y, Z] = -X \tag{2.9}$$

В отличие от системы (2.4) уравнения (2.8) легко интегрируются в самом общем случае. Поток системы (2.8) сохраняет стандартную меру на группе $E(2) = \{x, y, \alpha, \mathrm{mod}2\pi\}$.

3. Условия полной управляемости. Положим в системе (2.3) $u_k = -\lambda_k/I_k$ и будем считать эти функции управлениями. Более точно, предположим, что $u_k \equiv 0$ при $k > m$, а $u_1, \ldots, u_m$ – произвольные кусочно-гладкие функции времени, удовлетворяющие неравенствам $|u_k(t)| \leq \varepsilon$. Спрашивается, всегда ли можно подобрать m управлений так, чтобы система переместилась из любого начального положения $x^1 \in G$ в любое наперед заданное $x^2 \in G$? Это свойство называется *полной* управляемостью.

Очевидно, что при $m = 1$ система не может быть вполне управляемой: она не может сойти с интегральной кривой левоинвариантного поля v_1, которая в свою очередь никогда не сможет заполнить все G (если, конечно, $n > 1$). Наиболее интересной задача о полной управляемости выглядит при $m = 2$.

Теорема. Система

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{m} u_k(t) v_k(x), \quad x \in G \tag{3.1}$$

вполне управляема тогда и только тогда, когда поля $v_1, \ldots, v_m$ не лежат в некоторой подалгебре g, не совпадающей со всей алгеброй g.

Это условие можно переформулировать следующим образом. Если среди векторных полей $v_1, \ldots, v_m$ и среди векторных полей, составленных из них последовательными применениями операции коммутирования, можно указать n векторных полей $V_1, \ldots, V_n$, линейно независимых хотя бы в одной точке G, то из любой точки связной группы G можно прийти в любую другую, смещаясь конечное число раз по траекториям полей $v_1, \ldots, v_m$. В этом заключается известная теорема Рашевского – Чжоу [7, 8]. Поскольку поля $V_1, \ldots, V_n$ левоинвариантны (как коммутаторы левоинвариантных полей на группе G), то из их линейной независимости хотя бы в одной точке G вытекает, что они линейно независимы во всех точках группы G. Нужное управление строится так, что временной промежуток делится на интервалы Δ_k, в которых все управления, кроме одного $u_k(t)$, равны нулю, а $u_k(t) = \varepsilon$ или $u_k(t) = -\varepsilon$ при $t \in \Delta_k$.

Указанное достаточное условие полной управляемости также и необходимо. Действительно, пусть поля $v_1, \ldots, v_m$ порождают собственную подалгебру $g' \subset g$, $\dim g' = m' < n$. Алгебра g' содержит все левоинвариантные векторные поля $V_1, \ldots V_{m'}$, которые получаются из полей $v_1, \ldots, v_m$ последовательным применением операции коммутирования. Введем на группе G m'-мерное распределение касательных векторов, которое в каждой точке $x \in G$ порождается линейными комбинациями векторов $V_1(x), \ldots, V_{m'}(x)$. Так как подалгебра g' замкнута относительно операции коммутирования, это распределение интегрируемо. Следовательно, вся группа расслоена на семейство интегральных многообразий Σ_c (c – набор $n - m'$ независимых параметров), таких, что касательное пространство к Σ_c в точке x совпадает с линейными комбинациями векторов $V_1(x), \ldots, V_{m'}(x)$. Следовательно, если точка x_0 принадлежит некоторому пространству Σ_c, то для всех $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ решение системы (3.1) с начальным условием x_0 также лежит в Σ_c. Остается заметить, что поскольку $\dim\Sigma_c = m' < n$, то Σ_c не может совпадать со всей группой G. Что и требовалось.

Так как коммутатор левоинвариантных векторных полей линейно выражается через $v_1, \ldots, v_n$ с постоянными коэффициентами, то рассматриваемая задача о полной управляемости – число алгебраическая. Более того, условия полной управляемости зависят исключительно от групповой структуры G (конечно, после того, как векторные поля $v_1, \ldots, v_m$ выбраны). В частности, если группа G коммутативна, полная управляемость возможна лишь при $m = n$.

Как уже отмечалось (разд. 2), с использованием избыточных координат систему (3.1) можно представить в виде линейной системы дифференциальных уравнений. Это дает возможность применить хорошо развитую теорию оптимального управления в линейном случае (см. [9]).

Пример 1. Уравнения (2.4) описывают вращение твердого тела с симметричными маховиками, причем вращением маховиков (гиродинов) можно управлять внутренними силами. Тогда $I_k = \text{const}$, а в качестве управлений естественно принять относительные кинетические моменты маховиков λ_k. Эта задача хорошо изучена (см., например, [10]). В частности, управляя только двумя маховиками (не лежащими на одной оси), тело можно повернуть из любого положения в любое заданное. Этот факт – простое следствие теоремы (с учетом свойств группы $SO(3)$).

Если положить $u_k = -\lambda_k/I_k$ и считать теперь управлениями функции u_k, то этот случай сводится к упомянутой задаче о теле с маховиками. Развиваемый метод можно применить и к известной задаче *о подающей кошке* (в первой публикации на эту тему [11] приведены фотографии, показывающие, как падающая кошка меняет пространственную ориентацию на противоположную). Для объяснения эффекта смены ориентации кошку часто моделируют двумя шарнирно связанными гироскопами Лагранжа [12, 13]. При таком подходе приходится иметь дело с довольно сложной динамической системой; ее конфигурационное пространство – прямое произведение $SO(3) \times SO(3)$. Предложенный подход сводит эту задачу по сути дела к задаче о теле с маховиками. Следуя [12, 13], можно рассмотреть задачу о *быстродействии*; для тела с маховиками она была детально изучена [10].

Заметим, что в задаче о падающей кошке можно ограничиться рассмотрением системы двух первых уравнений (2.4) (поскольку нас не интересует угол поворота кошки при приземлении). Укажем простой пример гарантированного управления с обратной связью

$$u_1 = \xi\cos\varphi, \quad u_2 = -\xi\sin\varphi, \quad u_3 = \eta,$$

где ξ, η – произвольное непрерывные функции времени, причем $\xi(t) > 0$. Первое уравнение системы (2.4) принимает вид $\dot{\vartheta} = \xi$, и поэтому за конечное время угол ϑ изменяется от 0 до π, что и решает задачу управления.

Пример 2. Если положить в системе (2.7) $u_k = -\lambda_k/a_k$ ($k = 1, 2$) и $u_3 = -\mu/b$, то при $u_3 = 0$ изменяемая "плоская" система тело + жидкость не будет вполне управляемой (согласно равенствам (2.9)). Если же положить $u_1 = 0$ ($u_2 = 0$), то при подходящем выборе управлений u_2, u_3 (соответственно u_1, u_3) сопутствующий подвижный репер можно переместить из любого положения в любое наперед заданное.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01096 и 01-01-22004) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-136.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский ун-т", 1998. 238 с.
2. *Liouville J.* Développements sur un chapitre de la "Mechanique" de Poisson // J. Math. Pures et Appl. 1858. V. 3. P. 1–25.
3. *Козлов В.В., Рамоданов С.М.* О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 592–601.

4. *Козлов В.В., Ярощук В.А.* Об инвариантных мерах уравнений Эйлера – Пуанкаре на унимодулярных группах // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. 1993. № 2. С. 91–95.
5. *Козлов В.В.* Условие вмороженности поля направлений, малые знаменатели и хаотизация стационарных течений вязкой жидкости // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 237–244.
6. *Наймарк М.А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: Наука, 1958. 376 с.
7. *Рашевский П.К.* О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Учен. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук. 1938. № 2. С. 83–94.
8. *Chow W.L.* Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung // Math. An. 1939. V. 117. P. 98–105.
9. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
10. *Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
11. *Marey M.* Des mouvements que certains animaux exécutent pour retomber sur leurs pieds, lorsqu'ils sont précipités d'unlieuélevé // C. R. Acad. Sci. Paris. 1894. V. 119. P. 714–717.
12. *Kane T.R., Scher M.P.* A dymanical explanation of the falling cat phenomenon // Intern. J. Solids Structures. 1969. V. 5. № 7. P. 663–670.
13. *Enos M.J.* On an optimal control problem on SO(3) × SO(3) and the falling cat // Fields Inst. Communications. 1993. V. 1. P. 75–111.

Москва
e-mail: kozlov@pran.ru

Поступила в редакцию
11.II.2004