УДК 539.3:534.1

© 2004 г. Д. В. Долгих, В. В. Киселев

СОЛИТОНЫ ПОПЕРЕЧНОЙ ГОФРИРОВКИ В ТРЕХСЛОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассматривается задача о поперечных изгибах сильно нагруженного тонкого среднего слоя материала в трехслойной нелинейно-упругой среде. Для анализа двумерной динамики слоев развиваются специальные варианты теории возмущений. В результате их "сшивки" строится квазиодномерная модель, которая описывает эволюцию изгибов среднего слоя вблизи порога его неустойчивости. Устанавливается возможность формирования в трехслойной среде солитонов "поперечной гофрировки", которые предшествуют неупругому формоизменению среднего слоя. Исследуются условия существования солитонов в зависимости от внешнего напряжения, толщины среднего слоя и материальных параметров среды.

Волнообразные искривления отдельных слоев материала экспериментально наблюдаются при разных способах деформирования образцов [1]. По-видимому, поперечная гофрировка сопровождает наиболее сильно нагруженные слои среды при сдерживающем влиянии соседних, слабо нагруженных и потому устойчивых слоев. Чтобы выявить особенности этого механизма, рассмотрим динамику нелинейно-упругого слоя материала в форме пластины, стесненного двумя полупространствами с меньшими модулями упругости. Локальные изгибы пластины предполагаются сравнимыми с ее толщиной. Поэтому используется теория конечных деформаций [2–4].

Теория конечных деформаций Мурнагана привлекательна тем, что в ней полная нелинейно-упругая энергия системы выбирается в форме ряда по всем совместимым с симметрией среды инвариантам лагранжева тензора деформаций. В то же время более современные версии нелинейной теории упругости для упрощения задачи ограничиваются некоторым конечным набором инвариантов, используя в качестве критерия их отбора дополнительные геометрические гипотезы, справедливость которых трудно оценить количественно. Каждый новый "качественный" подбор инвариантов в конечном итоге должен проверяться на решениях конкретных динамических задач.

Ниже развивается вариант редуктивной теории возмущений, преимущество которого состоит в том, что он из полной нелинейно-упругой энергии системы без априорных гипотез позволяет выделить главные взаимодействия, отражающие динамическую симметрию рассматриваемой задачи. Предлагаемая процедура автоматически приводит к сокращению числа феноменологических постоянных в исходном разложении нелинейно–упругой энергии системы, так как эти постоянные условиями самосогласования теории возмущений объединяются в небольшое число параметров, которые и будут экспериментально наблюдаемыми эффективными упругими модулями слоистой среды.

Исходные (3 + 1)-мерные уравнения нелинейной теории упругости чрезвычайно сложны для анализа. Конструктивное решение задачи возможно посредством построения упрощенных уравнений, которые корректно учитывают главные особенности задачи и в то же время допускают точные решения. Поперечные изгибы пластины индуцируют деформации в подложках. Эффекты нелокального обратного влияния подложек на пластину существенно осложняют теоретическое описание ее динамики. Задача упрощается вблизи порога неустойчивости пластины по линейной теории. В этой области можно ограничиться рассмотрением медленной пространственно-временной эволюции той линейной моды, которая ответственна за гофрировку пластины. Из-за неустойчивости линейной моды проявятся и начнут играть определяющую роль нелинейные свойства среды. Эффекты нелинейности и дисперсии ограничат рост амплитуды смещений, откроют возможность формирования на пластине долгоживущих нелинейных возбуждений и структур.

Выделяется область характерных пространственно-временных масштабов и внешних нагрузок, в которой возможно исследование гофрировки пластины на основе упрощенной модели. Формулируются краевые условия для трехслойной среды, соответствующие проскальзыванию среднего слоя вдоль подложек. Упрощенная модель квазиодномерной динамики изгибов сильно нагруженного слоя материала выводится из полной системы уравнений нелинейной теории упругости, включающей все совместимые с симметрией среды взаимодействия, с контролируемой точностью по малым параметрам, которые отражают величину внешнего напряжения, пространственно-временные отклики среды на внешние воздействия в рассматриваемой области характерных масштабов, а также геометрическую и физическую нелинейность материала.

При построении модели решается нетривиальная нелинейная краевая задача, в которой форма поверхности сильно нагруженного слоя среды заранее не известна, а находится в процессе решения задачи. Отметим также, что изучение реальной неодномерной динамики слоистой среды предлагаемый подход сводит к анализу решений эффективных одномерных уравнений. Особенности самолокализованной гофрировки слоя среды определяются в результате баланса дисперсии, которая имеет геометрическое происхождение и зависит от толщины слоя и краевых условий на его поверхности, нелинейного взаимодействия близких неустойчивых мод деформации, а также нелокального взаимодействия между слоями среды.

Насколько известно авторам, динамика таких деформаций материала не исследована, хотя самолокализованные нелинейно-упругие изгибы отдельных слоев среды являются концентраторами напряжений и, следовательно, обуславливают последующее пластическое течение материала.

Иллюстрируется принципиальная возможность аналитического описания долгоживущих пространственно-локализованных нелинейно-упругих возбуждений и структур вблизи порогов нестабильности многослойных сред. На основе построенной модели предсказываются и исследуются солитоны поперечной гофрировки слоистой среды, которые предшествуют неупругому формоизменению материала.

Заметим, что модельные уравнения будут пригодны для изучения эволюции формы сильно нагруженного слоя и после потери им устойчивости, до тех пор пока деформации остаются нелинейно-упругими и сравнительно малыми.

1. Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим пластину толщиной d, стесненную двумя нелинейно-упругими полупространствами, одно из которых находится выше ($x_3 \geq d/2$), а другое ниже ($x_3 \leq -d/2$) пластины. Пусть $x_k(\breve{x}_k)$ – координаты материальной точки пластины (одной из подложек) до деформации, $X_k = x_k + u_k(\mathbf{x}, t)$ ($\breve{X}_k = \breve{x}_k + \upsilon_k(\breve{\mathbf{x}}, t)$) – координаты той же точки после деформации (нижние индексы из латинских букв принимают значения 1, 2, 3, если не оговорено иное), $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{v}(\breve{\mathbf{x}}, t)$ – векторы смещений.

В теории конечных деформаций [2–4] упругая энергия среды записывается в форме разложения по инвариантам лагранжева тензора деформаций

$$\eta_{ik} = \frac{1}{2}[\partial_i u_k + \partial_k u_i + \partial_i u_m \partial_k u_m], \quad \breve{\eta}_{ik} = \frac{1}{2}[\partial_i \upsilon_k + \partial_k \upsilon_i + \partial_i \upsilon_m \partial_k \upsilon_m] \qquad (1.1)$$

Пусть материал слоев изотропен. В качестве независимых инвариантов выберем

$$I_1 = \eta_{ll}, \quad I_2 = \eta_{nm}^2, \quad I_3 = \eta_{nm}\eta_{mk}\eta_{kn}$$

Далее сходственные физические величины для пластины и подложек будем обозначать одинаковыми буквами. Над величинами, относящимся к подложкам, будем ставить вогнутую вниз дужку (˘). Когда это не вызывает недоразумений, будем говорить только о пластине.

Энергию нелинейно-упругой пластины представим в форме [2–4]

$$W = \int\limits_{V_0} \phi d\mathbf{x}', \quad \phi = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\langle kpq \rangle = n} A_{kpq} I_1^k I_2^p I_3^q \tag{1.2}$$

где ϕ – энергия, отнесенная к единице объема пластины до деформации. Выражение $\sum_{\langle kpq \rangle = n}$ означает, что суммируются слагаемые, для которых $k + 2p + 3q = n$ $(n \geq 2)$, интегрирование производится по объему V_0 пластины до деформации. Предполагаем, что упругие модули A_{kpq} сравнимы по порядку величины.

Динамические уравнения для пластины имеют вид [2–4]

$$-\rho_0 \partial_t^2 u_i + \partial_s P_{is} = 0 \tag{1.3}$$

где

$$P_{is} = \frac{\partial \phi}{\partial [\partial_s u_i]} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{is}} + \partial_k u_i \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{ks}} \tag{1.4}$$

$\rho_0 = \mathrm{const}$ – плотность среды в недеформированном состоянии.

Тензор P_{ij} несимметричен по индексам i, j. В то же время простым соотношением он связан с симметричным тензором напряжений деформированной среды [2]

$$T_{ij} = \left[\det\left\|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}\right\|\right]^{-1} P_{ik} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \left[\det\left\|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}\right\|\right]^{-1} P_{jk} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \tag{1.5}$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести безразмерные переменные. Пусть l – характерный масштаб деформаций пластины в плоскости x_1Ox_2, a и $\tau_{\mathrm{ch}} = l/\sqrt{\mu/\rho_0}$ – характерные амплитуда и время деформаций (μ – модуль сдвига пластины). Определим два параметра $\epsilon_1 = a/l$ и $\epsilon_2 = d/l$, отражающие порядок малости амплитуд смещений и толщины пластины. В динамических уравнениях пластины перейдем к безразмерным переменным

$$\xi_\alpha = x_\alpha/l, \quad \eta = x_3/d, \quad \tau = t/\tau_{\mathrm{ch}}, \quad u_i = a\bar{u}_i; \quad \alpha = 1, 2$$

Тогда они примут вид

$$\mu\epsilon_1\epsilon_2\partial_\tau^2\bar{u}_\alpha = \epsilon_2\partial_\beta P_{\alpha\beta} + \partial_\eta P_{\alpha 3}, \ \mu\epsilon_1\epsilon_2\partial_\tau^2\bar{u}_3 = \epsilon_2\partial_\beta P_{3\beta} + \partial_\eta P_{33}; \ \alpha, \beta = 1, 2; \ \partial_\alpha = \partial/\partial\xi_\alpha \tag{1.6}$$

Рассмотрим область сильных изгибов пластины, где справедлива оценка $\epsilon_1 \sim \epsilon_2$ (или $a \sim d$).

Пусть материал подложек имеет меньшие модули упругости по сравнению с материалом пластины: $\breve{A}_{kpq}/A_{kpq} = O(\epsilon_1^3)$. Однородное на бесконечности внешнее напряжение T_{11}^{ext} приложено только к пластине, причем

$$T_{11}^{\mathrm{ext}}/\mu = O(\epsilon_1^2) + O(\epsilon_1^4)$$

Задача упрощается, когда нет внешних нагрузок порядка ϵ_1^3 [5][1].

[1] См. также: *Киселев В.В., Долгих Д.В.* Эффективная модель двумерной нелинейно-упругой динамики тонкой пластины: Препринт № 26/50(02). Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2001.

Деформации подложек описываем другими безразмерными переменными:

$$\xi_k = \breve{x}_k/l, \quad \tau = t/\tau_{ch}, \quad \upsilon_i = a\bar{\upsilon}_i, \quad i, k = 1, 2, 3$$

В безразмерных переменных уравнения нелинейной теории упругости для подложек имеют вид

$$\breve{\mu}\gamma_0\epsilon_1\partial_\tau^2\bar{\upsilon}_i = \partial_k\breve{P}_{ik}; \quad \gamma_0 = \mu\breve{\rho}_0/(\breve{\mu}\rho_0) = O(1), \quad \partial_i = \partial/\partial\xi_i \tag{1.7}$$

Перечисленными условиями выделена область физических параметров задачи, в которой нелинейная динамика пластины может быть изучена в рамках упрощенной модели [5]. Далее рассматривается случай, когда поля смещений трехслойной среды не зависят от координаты $x_2(\breve{x}_2)$ и компоненты смещений u_2 и υ_2 равны нулю. С целью построения модели будем искать решение динамических уравнений трехслойной среды в виде

$$\begin{gathered}\bar{u}_3 = \bar{u}_3^{(0)}(\xi_1, \tau) + \sum_{n=2}^{\infty}\bar{u}_3^{(n)}(\xi_1, \eta, \tau), \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_1^{(0)}(\xi_1, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_1^{(n)}(\xi_1, \eta, \tau) \\ \bar{\upsilon}_i = \sum_{n=0}^{\infty}\bar{\upsilon}_i^{(n)}(\xi_1, \xi_3, \tau), \quad i = 1, 3\end{gathered} \tag{1.8}$$

Верхние индексы указывают общий порядок слагаемых по параметрам ϵ_1 и ϵ_2 ($\epsilon_1 \sim \epsilon_2$). Отметим, что поля $\bar{u}_3^{(0)}$ и $\bar{\upsilon}_i^{(0)}$ описывают локальные деформации среды с характерным масштабом l: $\partial\bar{\upsilon}_i^{(0)}/\partial\xi_k = O(1)$, $\partial\bar{u}_3^{(0)}/\partial\xi_1 = O(1)$, а также их медленные пространственно-временные модуляции, в то время как смещение $\bar{u}_1^{(0)}$ описывает только однородное плоское напряженное состояние пластины и его медленные модуляции, при которых $\partial\bar{u}_1^{(0)}/\partial\xi_1 = O(\epsilon_1)$. Ниже, в разд. 3, посредством введения медленных переменных будут уточнены эти утверждения и, в частности, конкретизировано выделение слагаемого $\bar{u}_1^{(0)}$ из поправки $\bar{u}_1^{(1)}$.

Решению (1.8) соответствуют разложения тензоров P_{ij} и $\breve{P}_{ij}$:

$$P_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty}P_{ij}^{(n)}, \quad \breve{P}_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty}\breve{P}_{ij}^{(n)}; \quad i, j = 1, 3 \tag{1.9}$$

после подстановки которых в уравнения (1.6) и (1.7) получается цепочка уравнений теории возмущений.

Анализ показывает, что при сформулированных условиях можно ограничится конечным числом слагаемых в представлении (1.2) для нелинейно-упругой энергии среды. В плотности энергии пластины следует сохранить следующие члены:

$$\phi = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 + \frac{A}{3}I_3 + BI_1I_2 + \frac{C}{3}I_1^3 \tag{1.10}$$

где λ, μ, A, B, C – упругие модули пластины [3].

Поскольку подложки имеют меньшие модули упругости, для "сшивки" напряжений вдоль границ раздела сред в энергии подложек необходимо удержать больше слагаемых:

$$\phi = \frac{\breve{\lambda}}{2}\breve{I}_1^2 + \breve{\mu}\breve{I}_2 + \frac{\breve{A}}{3}\breve{I}_3 + \breve{B}\breve{I}_1\breve{I}_2 + \frac{\breve{C}}{3}\breve{I}_1^3 + \frac{\breve{H}}{4}\breve{I}_2^2 + \frac{\breve{F}}{6}\breve{I}_1\breve{I}_3 + \frac{\breve{M}}{2}\breve{I}_1^2\breve{I}_2 + \frac{\breve{N}}{12}\breve{I}_1^4 \tag{1.11}$$

Упругие модули $\breve{H}$, $\breve{F}$, $\breve{M}$, $\breve{N}$ введены так, чтобы в окончательных формулах получились сравнительно простые коэффициенты.

2. Условие проскальзывания среднего слоя. Сформулируем граничные условия, соответствующие проскальзыванию пластины вдоль подложек.

На соприкасающихся поверхностях пластины и подложек нормальные составляющие смещений среды должны быть непрерывны. В первых порядках теории возмущений этому требованию соответствуют краевые условия

$$\bar{u}_3^{(k)}\Big|_{\eta=\pm 1/2} = \bar{\upsilon}_3^{(k)}\Big|_{\xi_3^\pm=0}, \quad k = 0, 2; \quad \bar{\upsilon}_3^{(1)}\Big|_{\xi_3^\pm=0} = 0 \tag{2.1}$$

где $\xi_3^\pm = \xi_3 \mp d/(2l)$.

Нормаль к деформированной поверхности пластины определяется соотношением [2]

$$N_i = \frac{m_i}{|\mathbf{m}|}, \quad m_j = \frac{\partial x_s}{\partial X_j} n_s; \quad i, j = 1, 3$$

где $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ – вектор нормали к недеформированной поверхности пластины. Далее потребуется выражение для нормали через поля смещений с точностью до слагаемых порядка ϵ_1^2

$$N_1 = -\epsilon_1 \partial_1 \bar{u}_3^{(0)} + o(\epsilon_1^2), \quad N_3 = 1 - \frac{\epsilon_1^2}{2}(\partial_1 \bar{u}_3^{(0)})^2 + o(\epsilon_1^2) \tag{2.2}$$

Вследствие проскальзывания пластины сдвиговые напряжения на деформированных поверхностях пластины и подложек должны обращаться в нуль:

$$N_i e_{is} T_{sk} N_k = 0, \quad N_i e_{is} \breve{T}_{sk} N_k = 0$$

где e_{ij} – антисимметричный единичный тензор ($e_{13} = 1$). Разложение этих соотношений по параметрам ϵ_1, ϵ_2 (см. формулы (1.5), (1.9), (2.2)) дает краевые условия для уравнений теории возмущений

$$\begin{gathered} P_{13}^{(4)}\Big|_{\eta=\pm 1/2} = 0, \quad [P_{13}^{(k)} + \epsilon_1 \partial_1 \bar{u}_3^{(0)} P_{33}^{(k-1)}]\Big|_{\eta=\pm 1/2} = 0, \quad k = 5, 6 \\ \breve{P}_{13}^{(1)}\Big|_{\xi_3^\pm=0} = 0, \quad [\breve{P}_{13}^{(n)} + \epsilon_1 \partial_1 \bar{u}_3^{(0)} \breve{P}_{33}^{(n-1)}]\Big|_{\xi_3^\pm=0} = 0, \quad n = 2, 3 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Заметим, что, хотя сдвиговые напряжения на соприкасающихся поверхностях пластины и подложек обращаются в нуль, касательные компоненты тензоров Пиолы – Кирхгофа P_{13} и $\breve{P}_{13}$ не равны нулю.

Требование непрерывности нормальных напряжений на соприкасающихся поверхностях пластины и подложек

$$N_i T_{ij} N_j = N_i \breve{T}_{ij} N_i$$

дает следующие краевые условия для уравнений теории возмущений:

$$\begin{gathered} P_{33}^{(4)}\Big|_{\eta=\pm 1/2} = \breve{P}_{33}^{(1)}\Big|_{\xi_3^\pm=0}, \quad P_{33}^{(5)}\Big|_{\eta=\pm 1/2} = [\breve{P}_{33}^{(2)} - \epsilon_1 \partial_1 \bar{\upsilon}_1^{(0)} \breve{P}_{33}^{(1)}]\Big|_{\xi_3^\pm=0} \\ P_{33}^{(6)}\Big|_{\eta=\pm 1/2} = \{\breve{P}_{33}^{(3)} - \epsilon_1 \partial_1 \bar{\upsilon}_1^{(0)} \breve{P}_{33}^{(2)} + \epsilon_1 \breve{P}_{33}^{(1)} [\partial_1 \bar{u}_1^{(1)} - \partial_1 \bar{\upsilon}_1^{(1)}]\}\Big|_{\xi_3^\pm=0} \end{gathered} \tag{2.4}$$

При рассмотрении соотношений, содержащих компоненты $P_{ij}^{(n)}$ и $\breve{P}_{ij}^{(k)}$, необходимо учитывать разный порядок величины упругих модулей пластины и подложек.

Краевые условия на гранях пластины характеризуют обратное влияние на пластину деформаций в подложках. В частности, последнее из условий (2.4) учитывает изменение нормальных напряжений вследствие разной сжимаемости материалов пластины и подложек.

В формулах (2.3), (2.4) из-за малых модулей упругости подложек связь напряжений на поверхности пластины с напряжениями в подложках проявилась, начиная с четвертого порядка теории возмущений для пластины. В низших порядках напряжения на развитой поверхности пластины обращаются в нуль. Это требование эквивалентно условиям

$$P_{i3}^{(n)}\Big|_{\eta = \pm 1/2} = 0, \quad n = 1, 2, 3 \tag{2.5}$$

Статические деформации среды на бесконечности должны обеспечить равновесие сжатых из-за деформирования пластины подложек. Динамические деформации подложек на бесконечности обращаются в нуль.

3. Редуктивная теория возмущений. Нелинейная динамика пластины определяется не только локальными взаимодействиями ее собственных деформаций, но и “косвенным" взаимодействием деформаций пластины через смещения подложек. Даже в простейшем случае квазиодномерной гофрировки пластины смещения подложек двумерны. Поэтому косвенные взаимодействия нелокальны. Для квазиодномерной динамики пластины теория возмущений (1.8) дает, вообще говоря, интегродифференциальные нелинейные уравнения. Задача упрощается и сводится к "почти локальной", когда пластина испытывает волнообразную гофрировку, близкую к той, что соответствует нейтрально-устойчивой линейной моде.

Рассмотрим этот случай. Вблизи порога нестабильности пластины по линейной теории решение (1.8) следует конкретизировать, введя зависимость от медленных переменных X, T:

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_1^{(0,0)}(X, T) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{u}_1^{(n,l)}(X, T, \eta)\exp(ikl\xi_1)$$

$$\bar{u}_3 = [\bar{u}_3^{(0,1)}(X, T)\exp(ik\xi_1) + \text{c.c.}] + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{u}_3^{(n,l)}(X, T, \eta)\exp(ikl\xi_1) \tag{3.1}$$

$$\bar{\upsilon}_m = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{\upsilon}_m^{(n,l)}(X, T, \xi_3)\exp(ikl\xi_1), \quad m = 1, 3$$

Индекс n характеризует порядок слагаемых по параметрам ϵ_1, ϵ_2 ($\epsilon_1 \sim \epsilon_2$), k – волновое число нейтрально-устойчивой линейной моды, которая формируется при критическом напряжении T_{11}^{lin}. Значения k и T_{11}^{lin} находятся в процессе решения задачи. Дальнейший анализ покажет, что справедлива оценка $T_{11}^{\text{lin}}/\mu = O(\epsilon_1^2)$.

При внешних напряжениях T_{11}^{ext}, близких к T_{11}^{lin}, нелинейная динамика пластины определяется неустойчивыми модами, волновые числа которых принадлежат малой окрестности критического волнового числа k. Радиус окрестности зависит от того, насколько напряжение T_{11}^{ext} отличается от T_{11}^{lin}. Далее считаем $(T_{11} - T_{11}^{\text{lin}})/\mu = O(\epsilon_1^4)$, тогда через параметр ϵ_1 определятся медленные переменные: $X = \epsilon_1\xi_1$, $T = \epsilon_1^2\tau$, которые описывают модуляции основной гармоники $\sim\exp(ik\xi_1)$ в результате ее взаимодействия с близкими неустойчивыми модами. В конечном итоге, справедливость масштабного растяжения оправдывается самосогласованностью результатов.

Согласно соотношениям (3.1) рассматриваются два варианта теории возмущений. Один – для описания нелинейной динамики пластины, другой – для подложек. В результате их "сшивки" будет построена эффективная квазиодномерная модель эволюции огибающей поперечных изгибов пластины.

Теория возмущений для пластины. Выбранная форма решения (3.1) приводит к следующим представлениям для компонентов тензоров η_{sp} и P_{sp}:

$$\eta_{sp} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\eta_{sp}^{(n,l)}\exp(ikl\xi_1), \quad P_{sp} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}P_{sp}^{(n,l)}\exp(ikl\xi_1) \tag{3.2}$$

Связь между коэффициентами $\eta_{ij}^{(n,l)}$ и $\bar{u}_i^{(n,l)}$ находим в результате подстановки выражений (3.1), (3.2) в соотношения (1.1). Ввиду вещественности исходных полей функции $\bar{u}_i^{(n,l)}$ и т.д. удовлетворяют условиям

$$\bar{u}_i^{(n,-l)} = [\bar{u}_i^{(n,l)}]^*$$

Компоненты $\bar{u}_i^{(n,l)}$, $\eta_{ij}^{(n,l)}$, $P_{ij}^{(n,l)}$ зависят от переменных η, X, T. Подставляя выражения (3.2) в соотношения (1.6), (2.1), (2.3)–(2.5) и приравнивая члены одного порядка малости при каждой из независимых гармоник, получаем краевые задачи по переменной η.

В первых порядках теории возмущений имеем краевые задачи с тривиальными решениями: $P_{13}^{(n,l)} \equiv 0$ ($n = 1, 2$) и $P_{33}^{(k,l)} \equiv 0$ ($k = 2, 3$). Первое из них эквивалентно условию $\eta_{13}^{(n,l)} = 0$, из которого прежде всего следует, что коэффициенты $\eta_{13}^{(n,l)}$, в действительности, не равны нулю, начиная с $n = 3$. Если условия $\eta_{13}^{(n,l)} = 0$ ($n = 1, 2$) переписать через смещения, получатся уравнения для вычисления полей $\bar{u}_1^{(n,l)}$. Функции $\bar{u}_1^{(n,l)}$ ($n = 1, 2$) с $l = 0, 2, 3, \ldots$ оказываются не зависящими от η. Далее функции, не зависящие от η, будем отмечать тильдой: $\bar{u}_1^{(n,l)} = \tilde{u}_1^{(n,l)}$ ($n = 1, 2$; $l = 0, 2, 3, \ldots$). Коэффициенты $\bar{u}_1^{(n,1)}$ ($n = 1, 2$) выражаются через $\tilde{u}_3^{(0,1)}$:

$$\bar{u}_1^{(1,1)} = -\epsilon_2 ik\eta\tilde{u}_3^{(0,1)} + \tilde{u}_1^{(1,1)}, \quad \bar{u}_1^{(2,1)} = -\epsilon_1\epsilon_2\eta\partial_X\tilde{u}_3^{(0,1)} + \tilde{u}_1^{(2,1)} \tag{3.3}$$

где $\tilde{u}_1^{(n,1)}$ ($n = 1, 2$) – произвольные функции, возникшие при интегрировании; они определяются следующими порядками теории возмущений. Оказывается, что $\tilde{u}_1^{(n,1)} = 0$ ($n = 1, 2$).

Из соотношений

$$P_{33}^{(n,l)} = (\lambda + 2\mu)\eta_{33}^{(n,l)} + \lambda\eta_{11}^{(n,l)} \equiv 0, \quad n = 2, 3 \tag{3.4}$$

находим полезную для дальнейших вычислений связь между $\eta_{11}^{(n,l)}$ и $\eta_{33}^{(n,l)}$, которая ведет к представлению

$$P_{11}^{(n,l)} = (\lambda' + 2\mu)\eta_{11}^{(n,l)}, \quad n = 2, 3$$

Здесь и далее введен эффективный упругий модуль плоской деформации

$$\lambda' = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$$

который характеризует напряжения (в линейном приближении, см. [5]), возникающие в среднем слое при изменении элемента его площади.

Общую схему вычислений поясним на примере краевой задачи

$$\partial_\eta P_{13}^{(3,l)} + \epsilon_2 ikl P_{11}^{(2,l)} = 0; \quad P_{13}^{(3,l)}\Big|_{\eta = \pm 1/2} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

Проинтегрируем уравнение (3.5) по толщине пластины. Получим условие его разрешимости

$$\int_{-1/2}^{1/2} P_{11}^{(2,l)} d\eta = (\lambda' + 2\mu)\int_{-1/2}^{1/2} \eta_{11}^{(2,l)} d\eta = 0, \quad l = 1, 2, \ldots$$

из которого найдем связи между уже введенными функциями

$$\tilde{u}_1^{(1,1)} = 0, \quad \bar{u}_1^{(1,2)} = \tilde{u}_1^{(1,2)} = -\frac{\epsilon_1 ik}{4}(\tilde{u}_3^{(0,1)})^2, \quad \bar{u}_1^{(1,l)} = 0, \quad l = 3, 4, \ldots \tag{3.6}$$

Ограничения (3.6) означают, что из коэффициентов $\eta_{11}^{(2,l)}$ ($l \ge 0$) не обращаются в нуль только два:

$$\eta_{11}^{(2,0)} = \epsilon_1^2(\partial_X \tilde{u}_1^{(0,0)} + k^2|\tilde{u}_3^{(0,1)}|^2) \equiv \epsilon_{11}^{(2,0)}, \quad \eta_{11}^{(2,1)} = \epsilon_1\epsilon_2 k^2 \eta \tilde{u}_3^{(0,1)} \tag{3.7}$$

Величина $\epsilon_{11}^{(2,0)}$ характеризует продольную деформацию пластины, однородную по ее толщине.

При $l = 0, 1, 2, \ldots$ решения задачи (23) имеют вид

$$P_{13}^{(3,1)} = -\frac{1}{2}(\lambda' + 2\mu)\epsilon_1\epsilon_2^2 ik^3 \tilde{u}_3^{(0,1)}\left(\eta^2 - \frac{1}{4}\right), \quad P_{13}^{(3,l)} = 0, \quad l = 0, 2, 3, \ldots \tag{3.8}$$

Установленные ограничения величин $\eta_{ij}^{(2,l)}$ (см. (3.7)) позволяют вернуться к уравнениям (3.4) и разрешить их относительно полей $\bar{u}_3^{(2,l)}$. В результате интегрирования полученных уравнений вычисляются поправки $\bar{u}_3^{(2,l)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{d}\bar{u}_3^{(2,0)} &= -\frac{\lambda'}{2\mu}\epsilon_{11}^{(2,0)}\eta - (\epsilon_1 k)^2|\tilde{u}_3^{(0,1)}|^2\eta + \frac{a}{d}\tilde{u}_3^{(2,0)} \\
\bar{u}_3^{(2,1)} &= -\frac{\lambda'}{4\mu}(\epsilon_2 k\eta)^2\tilde{u}_3^{(0,1)} + \tilde{u}_3^{(2,1)} \\
\bar{u}_3^{(2,2)} &= \frac{\epsilon_1\epsilon_2 k^2}{2}(\tilde{u}_3^{(0,1)})^2\eta + \tilde{u}_3^{(2,2)} \\
\bar{u}_3^{(2,l)} &= \tilde{u}_3^{(2,l)}, \quad l = 3, 4, \ldots
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\tilde{u}_3^{(2,l)}$ ($l = 0, 1, \ldots$) – функции, возникшие при интегрировании.

Чтобы продвинуться дальше, заметим, что, с одной стороны, компоненты $P_{13}^{(3,l)}$, уже найдены (3.8), а с другой – они могут быть выражены через деформации:

$$P_{13}^{(3,l)} = 2\mu\eta_{13}^{(n,l)} \tag{3.10}$$

Из уравнений (3.10) могут быть найдены не только деформации $\eta_{13}^{(3,l)}$, но и продольные смещения $\bar{u}_1^{(3,l)}$:

$$\bar{u}_1^{(3,0)} = \tilde{u}_1^{(3,0)}$$

$$\bar{u}_1^{(3,1)} = -\epsilon_2^3 ik^3\left[\left(1+\frac{\lambda'}{4\mu}\right)\frac{\eta^3}{3} - \frac{1}{4}\left(1+\frac{\lambda'}{2\mu}\eta\right)\right]\tilde{u}_3^{(0,1)} + \epsilon_2 ik\eta\left[-\tilde{u}_3^{(2,1)} + \left(1+\frac{\lambda'}{4\mu}\right)\epsilon_{11}^{(2,0)}\tilde{u}_3^{(0,1)}\right] + \tilde{u}_1^{(3,1)}$$

$$\bar{u}_1^{(3,2)} = \frac{\lambda'}{4\mu}\epsilon_1\epsilon_2^2 ik^3\eta^2[\tilde{u}_3^{(0,1)}]^2 - 2\epsilon_2 ik\eta\tilde{u}_3^{(2,2)} + \tilde{u}_1^{(3,2)} \tag{3.11}$$

$$\partial_\eta\bar{u}_1^{(3,l)} + \epsilon_2 ikl\tilde{u}_3^{(2,l)} = 0, \quad l = 3, 4\ldots$$

После интегрирования соотношений (3.10) снова появились произвольные функции $\tilde{u}_1^{(3,l)}$.

Общая схема вычислений будет самосогласованной, если функции, которые были произвольными в первых порядках теории возмущений, в конечном итоге объединятся в блоки так, что получится замкнутая система уравнений, определяющая эволюцию первых из них. Эта система уравнений и будет эффективной моделью нелинейной динамики пластины. Процедура замыкается лишь при верном выборе медленных переменных. Связи между функциями возникают из условий разрешимости краевых задач теории возмущений. Замечательно, что предложенная теория возмущений удовлетворяет сформулированному критерию. Необходимые вычисления просты, но утомительны и осуществляются по уже изложенной схеме. Перечислим ключевые моменты.

Для задачи

$$\partial_\eta P_{13}^{(4,l)} + \epsilon_2 iklP_{11}^{(3,l)} + \epsilon_1\epsilon_2\partial_X P_{11}^{(2,l)} = 0; \quad P_{13}^{(4,l)}\Big|_{\eta=\pm 1/2} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.12}$$

условия разрешимости дают не только алгебраические связи между функциями, возникшими при интегрированиях, но и уравнение

$$\partial_X\sigma_{11}^{(2,0)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2,0)} = (\lambda' + 2\mu)\epsilon_{11}^{(2,0)} \tag{3.13}$$

Поскольку внешнее напряжение на бесконечности $[T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)} = \text{const}$, из соотношений (1.5), (3.13) заключаем:

$$\sigma_{11}^{(2,0)} = (\lambda' + 2\mu)\epsilon_1^2[\partial_X\tilde{u}_1^{(0,0)} + k^2\left|\tilde{u}_3^{(0,1)}\right|^2] = [T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)} = \text{const} \tag{3.14}$$

Используя найденные ограничения, из решения задачи (3.12) вычисляем компоненты $P_{13}^{(4,l)}$. Не равной нулю оказывается лишь $P_{13}^{(4,1)} = -i\epsilon_1\partial_X\partial_k P_{13}^{(3,1)}$. Для построения эффективной модели этой информации о $P_{13}^{(4,l)}$ достаточно. Можно не вычислять поправки $\bar{u}_1^{(4,l)}$, поскольку они не входят в уравнения изгибов пластины. В эффективные уравнения не входят также поля $\bar{u}_3^{(3,l)}$, поэтому можно избежать интегрирования системы (3.4) при $n = 3$.

Начиная с четвертого порядка теории возмущений проявятся реакции подложек на изгибы пластины. Поясним это на примере краевой задачи

$$\epsilon_2 iklP_{31}^{(3,l)} + \partial_\eta P_{33}^{(4,l)} = 0; \quad P_{33}^{(4,l)}\Big|_{\eta = \pm 1/2} = \breve{P}_{33}^{(1,l)}\Big|_{\xi_3^\pm = 0} \tag{3.15}$$

На поверхности пластины $\eta = \pm 1/2$ действуют напряжения $\breve{P}_{33}^{(1,l)}\Big|_{\xi_3^\pm = 0}$, вызванные деформациями подложек. Поэтому варианты теории возмущений (для пластины и подложек) взаимосвязаны. Успех метода связан с тем, что краевые задачи для подложек решаются на основе уже вычисленных смещений и деформаций на поверхностях $\eta = \pm 1/2$ пластины. Чтобы не прерывать анализа динамики пластины, теорию возмущений для подложек рассмотрим в следующем разделе, а здесь приведем результаты решения краевых задач для подложек. На границе пластины отлична от нуля только компонента $\breve{P}_{33}^{(1,1)}$, причем она определяется через поперечные смещения пластины $\tilde{u}_3^{(0,1)}$:

$$\breve{P}_{33}^{(1,1)}\Big|_{\xi_3^\pm = 0} = \mp\frac{1}{2}(\breve{\lambda}' + 2\breve{\mu})\epsilon_1|k|\tilde{u}_3^{(0,1)}(X,T), \quad \breve{\lambda}' = \frac{2\breve{\mu}\breve{\lambda}}{\breve{\lambda} + 2\breve{\mu}} \tag{3.16}$$

Заметим также, что при $n \geq 3$ поля $P_{13}^{(n,l)}$ и $P_{31}^{(n,l)}$ не равны друг другу. Однако, согласно соотношениям (1.4), они связаны между собой так, что по известным компонентам $P_{13}^{(n,l)}$ всегда можно найти $P_{31}^{(n,l)}$. В частности, используя соотношения (3.8), можно убедиться, что при $l \geq 0$ отличны от нуля две из функций $P_{31}^{(3,l)}$:

$$\begin{aligned} P_{31}^{(3,1)} &= -\frac{1}{2}(\lambda' + 2\mu)\epsilon_1\epsilon_2^2 ik^3\tilde{u}_3^{(0,1)}\left(\eta^2 - \frac{1}{4}\right) + \epsilon_1 ik\tilde{u}_3^{(0,1)}[T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)} \\ P_{31}^{(3,2)} &= (\lambda' + 2\mu)\epsilon_1^2\epsilon_2 ik^3[\tilde{u}_3^{(0,1)}]^2\eta \end{aligned} \tag{3.17}$$

Интегрируя уравнение (3.15) с $l = 1$ по толщине пластины, получим условие его разрешимости

$$[T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)} = -\frac{\breve{\lambda}' + 2\breve{\mu}}{\epsilon_2|k|} - \frac{(\epsilon_2 k)^2}{12}(\lambda' + 2\mu) \tag{3.18}$$

Соотношение (3.18) связывает внешнее сжимающее напряжение $[T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)}$ с волновым вектором k нейтрально устойчивой линейной моды, ответственной за гофрировку пластины. Из условия экстремума функции $[T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)}(k)$ найдем минимальное напряжение T_{11}^{lin} и деформацию $\epsilon_{11}^{(2,0)}$, начиная с которых наблюдается гофрировка пластины, и соответствующее им значение волнового числа k_0

$$T_{11}^{\text{lin}} = -\frac{\lambda' + 2\mu}{4}(\epsilon_2 k_0)^2 = (\lambda' + 2\mu)\epsilon_{11}^{(2,0)}, \quad \epsilon_2^3|k_0|^2 = 6\frac{\breve{\lambda}' + 2\breve{\mu}}{\lambda' + 2\mu} \tag{3.19}$$

Решения уравнений пятого порядка теории возмущений дают поля $P_{13}^{(5,l)}$ и $P_{33}^{(5,l)}$. Компонента $P_{31}^{(5,1)}$ выражается через $P_{13}^{(5,1)}$ и другие известные поля с помощью соотношения (1.4). Для построения модели изгибов пластины потребуется $P_{31}^{(5,1)}$, причем не сама функция, а ее среднее значение. Приведем окончательный результат

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} P_{31}^{(5,1)}(\eta)d\eta = \epsilon_1 ik_0\tilde{u}_3^{(0,1)}[\sigma_{11}^{(4,0)} + (\epsilon_2 k_0)^4 p] -$$

$$-\frac{\lambda' + 2\mu}{6}\epsilon_1\epsilon_2^2 ik_0^3\tilde{u}_3^{(2,1)} - \frac{\lambda' + 2\mu}{4}\epsilon_1^3\epsilon_2^2 ik_0\partial_X^2\tilde{u}_3^{(0,1)} + \epsilon_1\frac{g_v^{(4)}}{ik_0}\left|\tilde{u}_3^{(0,1)}\right|^2\tilde{u}_3^{(0,1)} \tag{3.20}$$

где

$$p = \frac{1}{8}\left[\left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu}\right)\left(\frac{\lambda'}{6} - \frac{3}{5}\mu\right) + \frac{3a_1 + a_2}{6}\right]$$

a_1 и a_2 – эффективные упругие модули пластины, введеные ранее [5], причем

$$3a_1 + a_2 = (A + 2B)\left[1 - \left(\frac{\lambda'}{2\mu}\right)^3\right] + (B + C)\left[1 - \frac{\lambda'}{2\mu}\right]^3$$

Параметр

$$g_v^{(4)} = \frac{(\epsilon_1\epsilon_2 k_0^3)^2}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu}\right)\left(\lambda' - \frac{5}{3}\mu\right) - \frac{3a_1 + a_2}{3}\right]$$

характеризует взаимодействие поперечных мод в объеме пластины. Величина $\sigma_{11}^{(4,0)} = (\lambda' + 2\mu)\epsilon_{11}^{(4,0)}$ определяется через однородную по толщине пластины часть $\epsilon_{11}^{(4,0)}$ тензора продольной деформации $\eta_{11}^{(4,0)}$ и представляет комбинацию функций, которые были произвольными в первых порядках теории возмущений. Для построения эффективной модели в представлении $\sigma_{11}^{(4,0)}$ через поля смещений нет необходимости, так как условия разрешимости уравнений шестого порядка теории возмущений дают замкнутую систему для вычисления $\sigma_{11}^{(4,0)}$, $\tilde{u}_3^{(1,0)}$ и $\tilde{u}_1^{(0,0)}$.

Из уравнений шестого порядка теории возмущений для построения модели изгибов пластины используются два:

$$\begin{aligned} \mu\epsilon_2\epsilon_1^5\partial_T^2\tilde{u}_1^{(0,0)} &= \partial_\eta P_{13}^{(6,0)} + \epsilon_1\epsilon_2\partial_X P_{11}^{(4,0)} \\ \mu\epsilon_2\epsilon_1^5\partial_T^2\tilde{u}_3^{(0,1)} &= \partial_\eta P_{33}^{(6,1)} + \epsilon_2 ik_0 P_{31}^{(5,1)} + \epsilon_1\epsilon_2\partial_X P_{31}^{(4,1)} \end{aligned} \tag{3.21}$$

В уравнениях (3.21) неизвестными являются функции $P_{13}^{(6,0)}$ и $P_{33}^{(6,1)}$.

Из условий (2.3) следует краевое условие

$$P_{13}^{(6,0)}\Big|_{\eta = \pm 1/2} = 0 \tag{3.22}$$

Процедура расчета граничных значений $P_{33}^{(6,1)}$ изложена в следующем разделе. Приведем результат

$$P_{33}^{(6,1)}\Big|_{\eta=\pm 1/2} =$$

$$= \pm\left\{-\frac{\lambda'+2\mu}{12}\epsilon_1\epsilon_2^3k_0^4\left[\tilde{u}_3^{(2,1)}-\left(1+\frac{\lambda'}{2\mu}\right)\left(\frac{\epsilon_2k_0}{2}\right)^2\tilde{u}_3^{(0,1)}\right]+\frac{g_s^{(4)}\epsilon_1\epsilon_2}{2}\left|\tilde{u}_3^{(0,1)}\right|^2\tilde{u}_3^{(0,1)}\right\} \tag{3.23}$$

Параметр $g_s^{(4)}$ представляет интегральную характеристику трехслойной среды. Он связан с действующими на пластину со стороны подложек поверхностными силами, которые ведут к косвенному взаимодействию поперечных мод в пластине.

Условия разрешимости краевых задач (3.21)–(3.23) таковы:

$$\mu\epsilon_1^4\partial_T^2\tilde{u}_1^{(0,0)} = \partial_X\{\sigma_{11}^{(4,0)}+(\epsilon_1\epsilon_2)^2q\left|\tilde{u}_3^{(0,1)}\right|^2\} \tag{3.24}$$

$$\mu\epsilon_1^4\partial_T^2\tilde{u}_3^{(0,1)} = -k_0^2\sigma_{11}^{(4,0)}\tilde{u}_3^{(0,1)}+-\left[p-\frac{(\lambda'+2\mu)^2}{48\mu}\right]\epsilon_2^4k_0^6\tilde{u}_3^{(0,1)}+$$
$$+\frac{\lambda'+2\mu}{4}(\epsilon_1\epsilon_2k_0)^2\partial_X^2\tilde{u}_3^{(0,1)}+g_{sv}^{(4)}\left|\tilde{u}_3^{(0,1)}\right|^2\tilde{u}_3^{(0,1)} \tag{3.25}$$

где

$$q = k_0^4\left[\left(1+\frac{\lambda'}{2\mu}\right)\left(\frac{2}{3}\mu-\frac{\lambda'}{4}\right)+\frac{3a_1+a_2}{6}\right],\quad g_{sv}^{(4)} = g_s^{(4)}+g_v^{(4)}$$

Уравнения (3.14), (3.24), (3.25) образуют замкнутую систему для вычисления полей $\sigma_{11}^{(4,0)}$, $\tilde{u}_3^{(0,1)}$, $\tilde{u}_1^{(0,0)}$. Ее решения соответствуют разным начальным условиям и разным способам нагружения пластины при $|X|\to\infty$.

Когда деформация пластины однородна на бесконечности, следует положить

$$\sigma_{11}^{(4,0)}\Big|_{|X|\to\infty} = [T_{11}^{\text{ext}}]^{(4)}-\left[\frac{1}{2\mu}+\frac{3a_1+a_2}{(\lambda'+2\mu)^2}\right][T_{11}^{\text{lin}}]^2$$
$$\tilde{u}_3^{(0,1)}\Big|_{|X|\to\infty} = \partial_T\tilde{u}_1^{(0,0)}\Big|_{|X|\to\infty} = 0 \tag{3.26}$$

Это выражение для $\sigma_{11}^{(4,0)}\Big|_{|X|\to\infty}$ проще всего получить методом работы [2].

Теория возмущений для подложек. При расчете смещений $\bar{\upsilon}_i$ используются другие медленные координаты, которые лучше отражают пространственно-временной отклик полубесконечных подложек на изгибы пластины. Вычисление компонент $\bar{\upsilon}_i^{(n)}$ в разложении (1.8) сводится к рекуррентному решению квазистатических краевых задач линейной теории упругости, в которые медленное время входит в качестве параметра. При этом уравнения, определяющие поля $\bar{\upsilon}_i^{(0)}$, однородны, а уравнения для расчета функций $\bar{\upsilon}_i^{(n)}$ с $n\geq 1$ содержат объемные силы, которые индуцированы смещениями, найденными в предыдущих порядках теории возмущений. Конкретизация формы решения (3.1), связанная с выделением резонансной моды и введением медленной координаты X, позволяет избежать появления сложных интегралов при построении упрощенной модели. Краевые задачи для вычисления компонент $\bar{\upsilon}_i^{(n,l)}$ с $l\neq 0$ представляют преобразования Фурье по переменной ξ_1 от линейных краевых задач с источниками.

При $n = 0$, $l \geq 0$ не равны нулю смещения $\bar{\upsilon}_i^{(n,\,l)}$ с $l = 1$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}^{(0,\,1)} = \tilde{u}_3^{(0,\,1)}\mathbf{s} \\
&\mathbf{s} = \frac{\exp(-|k_0|\xi_3^{\pm})}{\gamma+1}\left\| \begin{matrix} i\,\mathrm{sign}\,\xi_3^{\pm}\,\mathrm{sign}\,k_0[\gamma-1-2|k_0\xi_3^{\pm}|] \\ \gamma+1+2|k_0\xi_3^{\pm}| \end{matrix} \right\|, \quad \gamma = \frac{\breve{\lambda}+3\breve{\mu}}{\breve{\lambda}+\breve{\mu}}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

С помощью соотношений (3.27) вычисляются граничные значения (3.16), которые были использованы в предыдущем разделе.

Общую схему интегрирований поясним на примере уравнений второго порядка теории возмущений

$$ik_0 l\breve{P}_{i1}^{(2,\,l)} + \epsilon_1\partial_X\breve{P}_{i1}^{(1,\,l)} + \partial_3\breve{P}_{i3}^{(2,\,l)} = 0 \tag{3.28}$$

Краевые условия для них определяются из условий (2.1) и (2.3)

$$\begin{aligned}
&\bar{\upsilon}_3^{(1,\,l)}\Big|_{\xi_3^{\pm}=0} = 0; \quad \breve{P}_{13}^{(2,\,l)}\Big|_{\xi_3^{\pm}=0} = 0, \quad l \neq 2 \\
&\breve{P}_{13}^{(2,\,2)}\Big|_{\xi_3^{\pm}=0} = \pm\frac{\breve{\lambda}'+2\breve{\mu}}{2}\epsilon_1^2 ik_0|k_0|(\tilde{u}_3^{(0,\,1)})^2
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Задача (3.28), (3.29) имеет отличные от нуля решения для $\mathbf{v}^{(1,\,l)}$ только при $|l| \leq 2$.

Когда $l = 0$, система (3.28) сводится к уравнениям $\partial_3\breve{P}_{i3}^{(2,\,0)} = 0$, из которых следует, что $\breve{P}_{i3}^{(2,\,0)} = \mathrm{const}$. Постоянные интегрирования полагаются равными нулю, чтобы удовлетворить условиям (3.29) и условию отсутствия напряжений при $\xi_3 \to \pm\infty$. Из уравнений $\breve{P}_{i3}^{(2,\,0)} = 0$ вычисляются смещения $\mathbf{v}^{(1,\,0)}$

$$\begin{aligned}
&\bar{\upsilon}_3^{(1,\,0)} = -\frac{8\epsilon_1 k_0^2}{(\gamma+1)^3}\int_0^{\xi_3^{\pm}}|\chi^{(0,\,1)}|^2\{\gamma^2+1+2(\gamma+\alpha_1)[(\gamma-1)|k_0\xi_3|+2(k_0\xi_3)^2]+ \\
&+(\gamma-1)^2(\alpha_2+1)\}d\xi_3 \\
&\bar{\upsilon}_1^{(1,\,0)} = 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{\breve{A}+2\breve{B}}{\breve{\lambda}+\breve{\mu}}, \quad \alpha_2 = \frac{3\breve{B}+2\breve{C}+\breve{A}/2}{\breve{\lambda}+\breve{\mu}} \\
&\chi^{(0,\,1)} = \tilde{u}_3^{(0,\,1)}\exp(-|k_0|\xi_3)
\end{aligned}$$

Для дальнейшего анализа полезно ввести векторы $\mathbf{v}^{(n,\,l)} = (\bar{\upsilon}_1^{(n,\,l)}, \bar{\upsilon}_3^{(n,\,l)})$ и матричный оператор

$$\hat{\mathbf{H}}_l = \left\| \begin{matrix} \breve{\mu}\partial_3^2-(\breve{\lambda}+2\breve{\mu})(k_0 l)^2 & (\breve{\lambda}+\breve{\mu})i(k_0 l)\partial_3 \\ (\breve{\lambda}+\breve{\mu})i(k_0 l)\partial_3 & (\breve{\lambda}+2\breve{\mu})\partial_3^2-\breve{\mu}(k_0 l)^2 \end{matrix} \right\| \tag{3.31}$$

Тогда при $l = 1$ систему (3.28) можно представить в форме

$$\hat{\mathbf{H}}_1\mathbf{v}^{(1,\,1)} - i\epsilon_1(\partial_{k_0}\hat{\mathbf{H}}_1)\partial_X\mathbf{v}^{(0,\,1)} = 0$$

Нетрудно показать, что

$$\mathbf{v}^{(1,1)} = -i\epsilon_1\partial_{k_0}\partial_X\mathbf{v}^{(0,1)}; \quad \breve{P}_{ij}^{(2,1)} = -i\epsilon_1\partial_{k_0}\partial_X\breve{P}_{ij}^{(1,1)} \tag{3.32}$$

Значения $\breve{P}_{33}^{(2,1)}\Big|_{\xi_3^\pm=0}$ были использованы в предыдущем разделе при анализе динамики пластины.

При $l = 2$ система (3.28) имеет вид

$$\hat{\mathbf{H}}_2\mathbf{v}^{(1,2)} = \mathbf{f}^{(1,2)}; \quad \mathbf{f}^{(1,2)} = -\frac{1}{\epsilon_1}\begin{Vmatrix}2ik_0\pi_{11}^{(2,2)} + \partial_3\pi_{13}^{(2,2)}\\ 2ik_0\pi_{31}^{(2,2)} + \partial_3\pi_{33}^{(2,2)}\end{Vmatrix}$$

где $\pi_{ij}^{(2,2)}$ – нелинейная часть тензора $\breve{P}_{ij}^{(2,2)}$, которая выражается через уже известные поля ($\pi_{ij}^{(2,2)} \sim [\chi^{(0,1)}]^2$). Решение, удовлетворяющее условиям (3.29) и требованию $\mathbf{v}^{(1,2)} \to \infty$ при $|\xi_3| \to \infty$, имеет вид

$$\begin{Vmatrix}\bar{\upsilon}_1\\ \bar{\upsilon}_3\end{Vmatrix}^{(1,2)} = -\frac{\epsilon_1 k_0(\gamma + Q)}{(\gamma+1)^2}[\chi^{(0,1)}]^2\begin{Vmatrix}i[1 + 2|k_0\xi_3^\pm|]\\ -2k_0\xi_3^\pm\end{Vmatrix} \tag{3.33}$$

где

$$Q = \gamma^2 + 2\gamma - 2 - (\gamma-1)^2\alpha_2 + (\gamma-1)\alpha_1$$

Из соотношений (3.33), (1.4) определяется функция $\breve{P}_{33}^{(2,2)}$ и ее граничные значения

$$\breve{P}_{33}^{(2,2)}\Big|_{\xi_3^\pm=0} = 2\frac{\breve{\lambda}+\breve{\mu}}{(\gamma+1)^2}(\epsilon_1 k_0)^2(\tilde{u}_3^{(0,1)})^2\{2Q + (\gamma-1)^2(\alpha_2+1)\}$$

которые необходимы при формулировке краевых условий в следующем порядке теории возмущений.

Для построения модели изгибов пластины осталось вычислить граничные значения функции $\breve{P}_{33}^{(3,1)}$. Замечательно, что для этого необязательно рассчитывать смещения $\mathbf{v}^{(2,1)}$.

Чтобы найти $\breve{P}_{33}^{(3,1)}\Big|_{\xi_3^\pm=0}$, обратимся к уравнениям третьего порядка теории возмущений с $l = 1$

$$\hat{\mathbf{H}}_1\mathbf{w} + \frac{1}{\epsilon_1}(ik_0\mathbf{a} + \partial_3\mathbf{b}) = 0 \tag{3.34}$$

где

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}^{(2,1)} + \frac{1}{2}\epsilon_1^2\partial_{k_0}^2\partial_X^2\mathbf{v}^{(0,1)}, \quad \mathbf{a} = (\pi_{11}^{(3,1)}, \pi_{31}^{(3,1)})^T, \quad \mathbf{b} = (\pi_{13}^{(3,1)}, \pi_{33}^{(3,1)})^T$$

$\pi_{ij}^{(3,1)}$ – нелинейная часть тензора $\breve{P}_{ij}^{(3,1)}$, которая выражается через уже найденные поля ($\pi_{ij}^{(3,1)} \sim |\chi^{(0,1)}|^2\chi^{(0,1)}$).

Скалярно умножим уравнение (3.34) слева на вектор-функцию $\mathbf{p} = \mathbf{s}^T\boldsymbol{\sigma}_3 = (s_1, -s_3)$ (см. соотношение (3.27)), которая является решением сопряженной краевой задачи (удовлетворяет уравнению $\mathbf{p}\hat{\mathbf{H}}_1^+ = 0$, где $\hat{\mathbf{H}}_1^+$ – оператор, эрмитово сопряженный к $\hat{\mathbf{H}}_1$). Проинтегрируем результат по области $\Gamma^+ = \{\xi_3^+ \geq 0\}$ ($\Gamma^- = \{\xi_3^- \leq 0\}$). После простых преобразований с учетом равенства

$$\partial_{k_0}\mathbf{v}^{(0,1)}\Big|_{\xi_3^\pm = 0} = \partial_{k_0}^2\mathbf{v}^{(0,1)}\Big|_{\xi_3^\pm = 0} = 0$$

получаем интегральное представление для граничных значений функции $\breve{P}_{33}^{(3,1)}$

$$\breve{P}_{33}^{(3,1)}\Big|_{\xi_3^\pm = 0} = \pm\left\{\int_{\Gamma^\pm}[\partial_3\mathbf{p}\cdot\mathbf{b} - ik_0(\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})]\mathrm{d}\xi_3 + i\,\mathrm{sign}\,k_0\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\breve{P}_{13}^{(3,1)}\Big|_{\xi_3^\pm = 0} - \right.$$
$$\left. - \frac{\breve{\lambda}' + 2\breve{\mu}}{2}\epsilon_1|k_0|\bar{v}_3^{(2,1)}\Big|_{\xi_3^\pm = 0}\right\} \quad (3.35)$$

В правую часть равенства (3.35) входят уже вычисленные поля. В частности, компоненты $\breve{P}_{13}^{(3,1)}\Big|_{\xi_3^\pm = 0}$ определяются из условий (2.3), а $\bar{v}_3^{(2,1)}\Big|_{\xi_3^\pm = 0}$ – из условий (2.1) и соотношений (3.9).

В конечном итоге, из условий (2.4) и (3.35) следует формула (3.23), которая использовалась в предыдущем разделе при анализе динамики пластины. Параметр $g_s^{(4)}$ в соотношении (3.23) определяется из равенства

$$\frac{\epsilon_1\epsilon_2 g_s^{(4)}}{2} = 4(\breve{\lambda} + \breve{\mu})\frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)^3}\left[Q - \frac{5}{4}(\gamma-1)^2 + 2\gamma\right](\epsilon_1|k_0|)^3 +$$
$$+ \int_{\Gamma^\pm}\frac{(\partial_3\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}) - ik_0(\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})}{\left|\tilde{u}_3^{(0,1)}\right|^2\tilde{u}_3^{(0,1)}}\mathrm{d}\xi_3 \quad (3.36)$$

Явная зависимость $g_s^{(4)}$ от упругих модулей трехслойной среды имеет вид

$$\frac{\epsilon_1\epsilon_2 g_s^{(4)}}{2} = 2\frac{\breve{\lambda} + \breve{\mu}}{(\gamma+1)^5}(\epsilon_1|k_0|)^3\left[-\left\{\frac{9}{2} + 4\alpha_2 + \beta_3\right\}(\gamma-1)^5 + \right.$$
$$+ 2\{(3 + \alpha_2(3 + 3\alpha_2)) - \beta_3\}(\gamma-1)^4 + 2\{18 + Q + 4\alpha_1 + \alpha_2(2 - Q + 2\alpha_1) - \beta_2\}(\gamma-1)^3 +$$
$$+ 2\{35 + Q(7 - 2\alpha_2 + \alpha_1) + 2\alpha_2(1 + \alpha_1) + \alpha_1(11 + \alpha_1) - 2\beta_2\}(\gamma-1)^2 +$$
$$\left. + \{31 + 4Q(6 + \alpha_1) + 2\alpha_1(13 + 3\alpha_1) - 6\beta_1\}(\gamma-1) + 2\{4Q + 3\alpha_1^2 - 6\beta_1\}\right] \quad (3.37)$$

где

$$\beta_1 = \frac{\breve{H}}{\breve{\lambda} + \breve{\mu}}, \quad \beta_2 = \frac{\breve{F} + \breve{H} + 2\breve{M}}{\breve{\lambda} + \breve{\mu}}, \quad \beta_3 = \frac{\breve{F} + \frac{3}{2}\breve{H} + 6\breve{M} + 2\breve{N}}{\breve{\lambda} + \breve{\mu}}$$

4. Солитоны гофрировки среднего слоя. Будем искать решение системы (3.14), (3.24), (3.25) в виде

$$\tilde{u}_1^{(0,0)} = \frac{T_{11}^{\text{lin}}}{\varepsilon_1^2(\lambda' + 2\mu)}X - k_0^2\int^{X+VT} A^2(X')\mathrm{d}X' \tag{4.1}$$

$$\tilde{u}_3^{(0,1)} = A(X+VT)\exp(i\Omega T + i\kappa X + i\phi_0)$$

где V, κ, Ω, ϕ_0 – вещественные параметры. Из уравнений (3.14), (3.24) получаем

$$\sigma_{11}^{(4,0)} = c^{(4)} - \left|\tilde{u}_3^{(0,1)}\right|^2[(\epsilon_1\epsilon_2)^2 q + \mu\epsilon_1^4(k_0 V)^2] \tag{4.2}$$

Постоянная интегрирования $c^{(4)}$ определяется краевыми условиями. В частности, когда деформации пластины однородны на бесконечности, из соотношений (3.26) следует

$$c^{(4)} = [T_{11}^{\text{ext}}]^{(4)} - \left\{\frac{1}{2\mu} + \frac{3a_1 + a_2}{\lambda' + 2\mu}\right\}[T_{11}^{\text{lin}}]^2$$

После подстановки выражения (4.2) в (3.25) находим связь между параметрами V, κ, Ω

$$\kappa = \frac{V\Omega}{V_{\text{cr}}^2}, \quad V_{\text{cr}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_2 k_0}{\epsilon_1}\right)^2\left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu}\right) \tag{4.3}$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение для определения A, которое допускает первый интеграл

$$(\partial_X A)^2 = \alpha A^2 + \frac{\beta}{2}A^4 + c \tag{4.4}$$

Здесь

$$\alpha = -k_0^2[\mu\epsilon_1^4(V^2 - V_{\text{cr}})^2]^{-1}\left\{(\epsilon_2 k_0)^4\left(p - \frac{\lambda' + 2\mu}{48\mu}\right) + \mu\epsilon_1^4\left(\frac{\Omega}{V_{\text{cr}}k_0}\right)^2(V^2 - V_{\text{cr}}^2) + c^{(4)}\right\}$$

$$\beta = [\mu\epsilon_1^4(V^2 - V_{\text{cr}}^2)]^{-1}\{g_{\text{sv}}^{(4)} + (k_0\epsilon_1\epsilon_2)^2 q + \mu(\epsilon_1^2 V k_0^2)^2\}$$

c – постоянная интегрирования.

В случае однородных на бесконечности граничных условий (3.26) локализованное решение уравнения (4.4) существует при $c = 0$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$ и представляет солитон поперечной гофрировки пластины

$$A = \frac{\sqrt{2\alpha/|\beta|}}{\cosh(\sqrt{\alpha}[X + VT])} \tag{4.5}$$

Согласно выражению (4.5) изгибы пластины отличны от нуля в области с характерным размером порядка $\alpha^{-1/2}$, которая движется со скоростью V. При $\Omega = \kappa = 0$ поперечные смещения пластины имеют вид

$$\bar{u}_3^{(1)} = A\cos(k_0\xi_1 + \phi_0)$$

Пусть для определенности $q, g_{\text{sv}}^{(4)} > 0$. Тогда солитон (4.1), (4.5) формируется при нагрузках T_{11}^{ext}, меньших некоторого критического значения (близкого к T_{11}^{lin}):

$$\left|T^{\text{ext}}\right| < \left|T^{\text{lin}}\right|\left\{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{\epsilon_2 k_0}{2}\right)^2\left[\frac{17}{5} + \frac{\lambda'}{\mu} + \frac{3a_1 + a_2}{\lambda' + 2\mu}\right]\right\} + \mu\left[\frac{\Omega\epsilon_1^2}{V_{\text{cr}}k_0}\right]^2(V^2 - V_{\text{cr}}^2) \tag{4.6}$$

и движется со скоростью, не превышающей $V_{cr}(V^2 < V_{cr}^2)$. В частности, такие солитоны могут быть и неподвижными. Они являются концентраторами напряжений и одновременно предвестниками последующей пластической деформации материала.

При $c > 0$, $0 > c > -\alpha/(2|\beta|)$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$ существуют ограниченные решения, которые описывают, в частности, структуры типа цепочек из солитонов гофрировки

$$A = A_+\mathrm{dn}\left\{A_+\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}(X+VT), k\right\}, \quad k^2 = \frac{A_+^2 - A_-^2}{A_+^2}, \quad 0 > c > -\frac{\alpha^2}{2|\beta|} \tag{4.7}$$

$$A = A_+\mathrm{cn}\left\{\frac{A_+}{k}\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}(X+VT), k\right\}, \quad k^2 = \frac{A_+^2}{A_+^2 + |A_-|^2}, \quad c > 0 \tag{4.8}$$

Здесь

$$A_\pm = \sqrt{(\alpha \pm D)/|\beta|}, \quad D = \sqrt{\alpha^2 + 2c|\beta|}$$

Обсудим характер решения (4.7) при значениях параметра k, близких к единице. Воспользуемся представлением

$$\mathrm{dn}(Y, k) = \frac{\pi}{2K'}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}\left[\frac{\pi}{2K'}(Y - 2Kn)\right] \tag{4.9}$$

где $K = K(k)$, $K' = K(k')$ – полные эллиптические интегралы первого рода, $k' = \sqrt{1-k^2}$ ($k' \ll 1$), n – целые числа. Соотношение (4.9) доказывается сравнением разложений на простые дроби [6] левой и правой частей формулы (4.9). Аддитивная постоянная фиксируется условием нормировки: $\mathrm{dn}(Y = 0, k) = 1$ и оказывается равной нулю.

Согласно соотношениям (4.7), (4.9) при $k' \ll 1$ изменения функции A локализованы вблизи точек с координатами $X = (2Kn/A_+)\sqrt{2/|\beta|}$. В окрестности каждой из таких точек, в области с характерным размером $l_0 = (2K'/(\pi A_+))\sqrt{2/|\beta|}$ решение (4.1), (4.7) выглядит как солитон гофрировки. Вне указанных областей деформации материала малы.

Когда $\alpha < 0$, $\beta > 0$, ограниченные "квазипериодические" (4.1) решения существуют при $0 < c \le \alpha^2/(2\beta)$:

$$A = A_-\mathrm{sn}\left\{A_+\sqrt{\frac{\beta}{2}}(X+VT), k\right\}, \quad k = \frac{A_-}{A_+} \tag{4.10}$$

Здесь

$$A_\pm = \sqrt{(|\alpha| \pm D)/\beta}, \quad D = \sqrt{\alpha^2 - 2c\beta}$$

Простейшее из решений получается при $c = \alpha^2/(2\beta)$ и представляет так называемый "темный" солитон

$$A = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{|\alpha|}{2}}[X+VT]\right) \tag{4.11}$$

Решению (4.1), (4.11) соответствует возбужденное состояние пластины с асимптотикой типа поперечной волны

$$\tilde{u}_3^{(1)} \sim \cos(k_0\xi_1 + \kappa X + \Omega T + \phi_0), \quad X \to \pm\infty$$

"Темный" солитон (4.11) описывает модуляцию этой волны. При $q, g_{sv}^{(4)} > 0$ "темные" солитоны образуются ниже порога нестабильности пластины и движутся со скоростями V, превышающими по абсолютной величине $|V_{cr}|$.

5. Заключение. Трудность теоретического описания нелинейно-упругой динамики трехслойной среды связана не только с нелинейностью материала. Значительно осложняет задачу нелокальный характер взаимодействия между слоями. Кроме того, для слоистой среды важен аккуратный учет краевых условий, поскольку они определяют дисперсию среды, а значит и условия формирования солитоноподобных возбуждений. Долгоживущие нелинейно-упругие солитоны перспективны для диагностики структурно-неоднородных материалов, поскольку несут полезную информацию как о напряженном состоянии среды, так и о геометрических размерах и материальных параметрах ее отдельных слоев.

Выше был рассмотрен простейший случай, когда внешнее напряжение и граничные условия в плоскости x_1Ox_2 приводят к квазиодномерной гофрировке одного из слоев материала, которая является результатом взаимодействия нейтрально-устойчивой линейной моды $\sim\exp(ik_0\xi_1)$ с близкими неустойчивыми модами. В общем случае следует учитывать взаимодействия нескольких групп волн, чтобы описать изгибы слоев в нескольких направлениях. При других краевых условиях и материальных параметрах слоистой среды теорию возмущений следует модифицировать. Это приведет к изменению эффективной модели, однако схема ее построения принципиально не изменится.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00366, 04-01-96107).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Губернаторов В.В., Соколов Б.К., Гервасьева И.В., Владимиров Л.Р.* О формировании полосовых структур в структурно-однородных материалах при деформации //Физ. мезомеханика. 1999. Т. 2. Вып. 1, 2. С. 157–162.
2. *Murnaghan F.D.* Finite Deformation of an Elastic Solid. New York: Willey; London: Chapman and Hall, 1951. 140 p.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
4. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
5. *Долгих Д.В., Киселев В.В.* Двумерная модель динамики сильных изгибов нелинейно-упругой пластины // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 300–314.
6. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.

Екатеринбург
e-mail : kiseliev@imp.uran.ru

Поступила в редакцию
9.XII.2002