УДК 539.3

© 2004 г. Д. В. Георгиевский, Б. Е. Победря

О ЧИСЛЕ НЕЗАВИСИМЫХ УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТНОСТИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Число независимых уравнений совместности в напряжениях, которые включаются в постановку задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях в $\mathbb{R}^n$, совпадает с числом уравнений совместности Сен-Венана в $\mathbb{R}^n$ и с числом независимых компонент тензоров Крёнера и Римана–Кристоффеля. Наличие тождеств Бьянки не уменьшает это число. Приводятся некоторые контрпримеры, показывающие невозможность сокращения числа уравнений Бельтрами–Мичелла с шести до трех в классической и новой постановках задачи в напряжениях для трехмерного тела.

1. Число независимых уравнений совместности Сен-Венана. Для записи уравнений совместности Сен-Венана [1] в компактном виде обычно вводят в рассмотрение тензор несовместности Крёнера [2]. В $\mathbb{R}^n$ это объект $\boldsymbol{\eta}^{\{2n-4\}} = \operatorname{Ink}\boldsymbol{\varepsilon}^{\{2\}}$ ранга $2n-4$ с декартовыми компонентами

$$\eta_{i_1\ldots i_{n-2}j_1\ldots j_{n-2}} = \epsilon_{i_1\ldots i_{n-2}kl}\epsilon_{j_1\ldots j_{n-2}mp}\varepsilon_{lm,\,kp} \tag{1.1}$$

где $\epsilon_{i_1\ldots i_n}$ – символ Леви-Чивиты в $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\{2\}}$ – тензор деформаций. Действительно, обращение в нуль всех компонент $\eta_{i_1\ldots i_{n-2}j_1\ldots j_{n-2}}$ представляет собой необходимое, а для односвязной области V и достаточное условие интегрируемости системы Коши

$$u_{i,\,j} + u_{j,\,i} = 2\varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

Таким образом, число N_n независимых компонент (1.1) совпадает с искомым числом независимых уравнений совместности деформаций.

Для $n = 2$ тензор Крёнера является скаляром ($N_2 = 1$), для $n = 3$ – симметричным тензором второго ранга ($N_3 = 6$). Из определения (1.1) видно, что для любого n тензор $\boldsymbol{\eta}^{\{2n-4\}}$ антисимметричен по всем парам из своих первых $n-2$ индексов, а также из $n-2$ последних. Умножая обе части равенства (1.1) на $\epsilon_{i_1\ldots i_{n-2}qs}\epsilon_{j_1\ldots j_{n-2}tr}$ и суммируя по повторяющимся $2n-4$ индексам, нетрудно прийти к эквивалентным (1.1) соотношениям

$$2R_{sqtr} \equiv \varepsilon_{st,\,qr} + \varepsilon_{qr,\,st} - \varepsilon_{sr,\,qt} - \varepsilon_{qt,\,sr} = 0 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{R}^{\{4\}}$ – тензор кривизны или тензор Римана–Кристоффеля, ранг которого равен четырем для любого n. Для его компонент имеют место классические виды симметрии

$$R_{sqtr} = -R_{qstr} = -R_{sqrt} = R_{trsq} \tag{1.4}$$

и тождества Риччи

$$R_{sqtr} + R_{strq} + R_{srqt} = 0 \tag{1.5}$$

Таким образом, тензор несовместности $\boldsymbol{\eta}^{\{2n-4\}}$ и тензор кривизны $\mathbf{R}^{\{4\}}$ – двойственные (дуальные) тензоры, а следовательно, имеют одинаковое число независимых компонент. Геометрический смысл уравнений совместности (1.3) состоит в том, что сплошная среда в недеформированном и деформированном состояниях принадлежит евклидову пространству, для которого $R_{sqtr} \equiv 0$.

В трехмерном случае шесть уравнений (1.3) были получены Сен-Венаном (1860 г.), а позже Буссинеск (1871), Бельтрами (1889) и Чезаро (1906) [3] доказали их достаточность для односвязной области V.

Видно, что в $\mathbb{R}^n$ равенства (1.3) могут быть разделены на три группы.

1°. Все свободные индексы s, q, t and r различны (этот случай реализуется, начиная с $n = 4$). Не будем выписывать получающиеся соотношения, а подсчитаем лишь их число N_{n1}. С учетом симметрий (1.4) и тождеств Риччи (1.5) имеем

$$N_{n1} = 3C_n^4 - C_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)/12$$

2°. Только один из пары свободных индексов s, q совпадает с одним из пары t, r ($n \geq 3$). Тогда

$$N_{n2} = 3C_n^3 = n(n-1)(n-2)/2$$

3°. Пары индексов s, q и t, r совпадают и

$$N_{n3} = b_n = n(n-1)/2$$

В итоге имеем

$$N_n = N_{n1} + N_{n2} + N_{n3} = n^2(n^2-1)/12 \tag{1.6}$$

Почти с момента вывода равенств (1.3) [4] периодически возобновляются дискуссии о выделении среди всех группы независимых уравнений и выражении остальных через эти независимые [5, 6] (см. также список литературы в [7]). Кажущимся аргументом служит то, что N_n при $n > 2$ больше степени переопределенности b_n системы Коши (1.2) ($N_2 = b_2 = 1$). Более того, $N_n \sim n^4$ с ростом n, в то время как $b_n \sim n^2$. На помощь часто привлекаются тождества Бьянки

$$R_{sqtr,\,p} + R_{sqrp,\,t} + R_{sqpt,\,r} = 0 \tag{1.7}$$

которые нетрудно переписать в терминах третьих производных от компонент ε_{ij}. Для $n = 3$ независимых тождеств (1.7) как раз три, что вроде бы устраняет невязку $N_3 - b_3 = 3$, поэтому их наличие отождествляется с зависимостью шести уравнений совместности деформаций.

Необходимо заметить, что с ростом n число тождеств Бьянки (1.7) растет как $C_n^2 C_n^3 \sim n^5$, что даже формально не разрешает невязку $N_n - b_n \sim n^4$. К тому же тождества (1.7) являются дифференциальными связями третьего порядка, наложенными на ε_{ij}, а не дополнительными уравнениями совместности.

Приведем иллюстрирующий пример. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет системе n дифференциальных уравнений

$$\varphi_1 \equiv \partial f/\partial x_1 = 0, \ldots, \varphi_n \equiv \partial f/\partial x_n = 0 \tag{1.8}$$

которая совместна и имеет решение $f \equiv \mathrm{const}$. Кроме того, все уравнения (1.8), очевидно, независимы (в том смысле, что вычеркивание хотя бы одного из них приводит к неэквивалентной системе). Степень переопределенности данной системы равна $n - 1$. При этом существуют $n(n-1)/2$ независимых тождеств $\varphi_{i,\,j} - \varphi_{j,\,i} = 0$, играющих роль тождеств (1.7), наличие которых не устраняет невязку $n - 1$ и не делает какие-либо из уравнений (1.8) зависимыми от других.

2. Постановка задачи теории упругости в напряжениях. С изложенным выше тесно связаны вопросы о различных постановках задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях. Положим ниже $n = 3$ и не будем писать вверху ранги тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}^{\{2\}}$, $\boldsymbol{\sigma}^{\{2\}}$ и $\boldsymbol{\eta}^{\{2\}}$.

Как известно [8], классическая постановка статической задачи изотропной теории упругости в напряжениях заключается в решении в трехмерной области тела V трех уравнений равновесия, записанных в векторном виде

$$\mathbf{S} \equiv \mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{r} \in V \tag{2.1}$$

шести уравнений совместности Сен-Венана

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{\eta}$ – тензор несовместности Крёнера с декартовыми компонентами

$$\eta_{ij} = \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmp}\varepsilon_{lm,\,kp} \tag{2.3}$$

следующими из соотношений (1.1), а также удовлетворении на границе $\Sigma = V$ трем статическим граничным условиям

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}^{(0)}, \quad \mathbf{r} \in \Sigma \tag{2.4}$$

Здесь $\rho\mathbf{F}$ и $\mathbf{P}^{(0)}$ – заданные объемные и поверхностные нагрузки, $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и малых деформаций, связанные между собой законом Гука

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E}[-3\nu\sigma\mathbf{I} + (1+\nu)\boldsymbol{\sigma}], \quad \sigma = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.5}$$

Система (2.1), (2.2) эквивалентна системе трех уравнений (2.1) и шести уравнений Бельтрами–Мичелла, записанных в тензорном виде

$$\mathbf{H} \equiv \Delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{3}{1+\nu}\mathrm{Grad}(\mathrm{grad}\sigma) + 2\rho\mathrm{Def}\mathbf{F} + \frac{\rho\nu}{1-\nu}(\mathrm{div}\mathbf{F})\mathbf{I} = 0, \quad \mathbf{r} \in V \tag{2.6}$$

Решение краевой задачи (2.1), (2.2), (2.4) (или (2.1), (2.6), (2.4)) единственно, если $E > 0$ и $-1 < \nu < 1/2$. Классической постановке (2.1), (2.6), (2.4) ставится в соответствие вариационная постановка для функционала Кастильяно. На этом вариационном принципе основан метод Филоненко-Бородича приближенного решения статической задачи теории упругости в напряжениях [9].

Со времени вывода Мичеллом (1900 г.) уравнений (2.6), а еще ранее Бельтрами (1892) этих же уравнений в случае отсутствия объемных сил, многие исследователи задавались вопросом о переопределенности классической постановки, так как число уравнений (2.1), (2.6) в области V на три больше числа неизвестных компонент тензора $\boldsymbol{\sigma}$. Вместе с тем граничных условий (2.4) на три меньше числа неизвестных функций. В связи с этим из девяти уравнений (2.1), (2.6) три (в различном сочетании) предлагалось снести на границу Σ.

Эти вопросы, разумеется, созвучны с обсуждавшимся в разд. 1 вопросом о числе независимых уравнений совместности Сен-Венана. Кажущуюся переопределенность устраняет новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях, предложенная одним из авторов [10, 11]. Применительно к изотропной теории упругости она заключается в нахождении шести компонент симметричного тензора $\boldsymbol{\sigma}$ из решения шести уравнений (2.6) в области V при удовлетворении на Σ трем граничным условиям (2.4) и трем условиям

$$\mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma \tag{2.7}$$

От классической данная постановка отличается тем, что выполнение уравнений равновесия требуется только на границе тела (в том числе на бесконечности, если тело неограниченно). Впервые доказана теорема существования решения задачи теории упругости в напряжениях, ее эллиптичность и сформулирован новый вариационный принцип для некоторого скалярного оператора, зависящего от градиента напряжений.

Однако существуют работы, в которых предпринимаются попытки из девяти уравнений (2.1), (2.6) в области V снести на границу вместо (2.7) другие тройки, составленные из уравнений Бельтрами–Мичелла (2.6). Среди них чаще всего встречаются тройки, соответствующие трем диагональным компонентам тензора $\mathbf{H}$ либо трем недиагональным.

3. Некоторые контрпримеры. Приведем примеры, иллюстрирующие неэквивалентность получающихся в таком случае постановок и классической постановки задачи теории упругости в напряжениях. Для определенности положим $\mathbf{F} \equiv 0$, выберем сферическую систему координат $\{r;\ \theta;\ \varphi\}$ и ограничимся случаем, когда поле напряжений не зависит от меридионального угла φ. Тогда

$$S_r = \sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}\sigma_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta)$$

$$S_\theta = \sigma_{r\theta,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta,\theta} + \frac{1}{r}((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\operatorname{ctg}\theta + 3\sigma_{r\theta})$$

$$S_\varphi = \sigma_{r\varphi,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\theta\varphi,\theta} + \frac{1}{r}(3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta)$$

$$\Delta\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{r^2}(r^2\sigma_{\alpha\beta,r})_{,r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\sigma_{\alpha\beta,\theta}\sin\theta)_{,\theta}, \quad \alpha, \beta = r, \theta, \varphi$$

Пример 1. Пусть задача заключается в решении шести уравнений в области тела

$$S_r = S_\theta = S_\varphi = 0, \quad H_{r\theta} = H_{\theta\varphi} = H_{r\varphi} = 0, \quad \mathbf{r} \in V \tag{3.1}$$

при удовлетворении шести условиям на границе: трем статическим (2.4), а также условиям

$$H_{rr} = H_{\theta\theta} = H_{\varphi\varphi} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma \tag{3.2}$$

Предъявим поле напряжений, которое будет решением задачи (3.1), (2.1), (3.2), но не будет решением задачи (2.1), (2.6), (2.4) (или (2.6), (2.4), (2.7)). Выберем

$$V = \{\mathbf{r}\colon r < R\}, \quad \Sigma = \{\mathbf{r}\colon r = R\} \tag{3.3}$$

$$P_r^0 = 3R^4, \quad P_\theta^0 = P_\varphi^0 = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma \tag{3.4}$$

и положим, например,

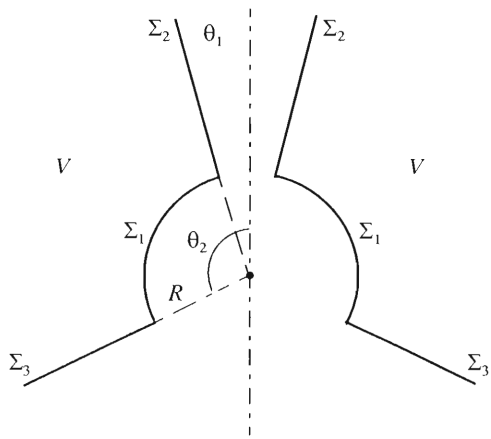
$$\begin{gathered} \sigma_{rr} = 3r^4 - 10Rr^3 + 10R^2r^2 \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = 9r^4 - 25Rr^3 + 20R^2r^2, \quad \sigma_{\alpha\beta} \equiv 0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнения (3.1) всюду в V и граничные условия (2.4) с нагрузками (3.4) на поверхности сферы (3.3) выполнены. Кроме того,

$$H_{rr} = 60(r-R)^2 + \frac{60}{1+\nu}(r-R)(7r-5R) \not\equiv 0$$

$$H_{\theta\theta} = H_{\varphi\varphi} = 60(r-R)(3r-2R) \not\equiv 0$$

что говорит о выполнении условий (3.2) и невыполнении условий (2.6).



Пример 2. Пусть задача заключается в решении шести уравнений в области тела

$$S_r = S_\theta = S_\varphi = 0, \quad H_{rr} = H_{\theta\theta} = H_{\varphi\varphi} = 0, \quad \mathbf{r} \in V \tag{3.6}$$

при удовлетворении трем статическим условиям (2.4), а также условиям

$$\begin{aligned} &H_{r\theta} = H_{\theta\varphi} = H_{r\varphi} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma \\ &H_{r\theta} = H_{\theta\varphi} = H_{r\varphi} = 0, \quad \mathbf{r} \in V, \quad r \to \infty \end{aligned} \tag{3.7}$$

Выберем (см. фигуру)

$$\begin{aligned} &V = \{\mathbf{r}\colon r > R,\ 0 < \theta_1 < \theta < \theta_2 < \pi\}, \quad \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \\ &\Sigma_1 = \{\mathbf{r}\colon r = R,\ \theta_1 < \theta < \theta_2\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &\Sigma_2 = \{\mathbf{r}\colon r > R,\ \theta = \theta_1\}, \quad \Sigma_3 = \{\mathbf{r}\colon r > R,\ \theta = \theta_2\} \\ &P_r^0 = P_\theta^0 = P_\varphi^0 = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma \end{aligned} \tag{3.9}$$

и предъявим поле напряжений, являющееся решением задачи (3.6), (2.4), (3.7), но не являющееся решением задачи (2.1), (2.6), (2.4).

Положим

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\theta} \equiv 0 \\ &\sigma_{r\varphi} = \frac{(r-R)^3}{r^3 \sin^2\theta} f', \quad \sigma_{\theta\varphi} = -\frac{3(r-R)^2}{r^2 \sin^2\theta} f \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $f(\theta)$ – некоторая дифференцируемая функция, тем самым удовлетворив уравнениям (3.6). Для выполнения условий (3.7) и (3.9) на поверхности Σ и на бесконечности достаточно взять, например,

$$f(\theta) = (\theta - \theta_1)^4 (\theta - \theta_2)^4 \tag{3.11}$$

Из-за громоздкости не будем приводить явные выражения для $H_{r\varphi} = \Delta\sigma_{r\varphi}$ и $H_{\theta\varphi} = \Delta\sigma_{\theta\varphi}$. Заметим, что компоненты $H_{r\varphi}$ и $H_{\theta\varphi}$, вычисленные по (3.11), ограничены в области V, так как вся полярная ось $\sin\theta = 0$ не принадлежит V, и обращаются в нуль на Σ_1, Σ_2, Σ_3 и бесконечности. При этом компоненты $H_{r\varphi}$ и $H_{\theta\varphi}$ тензора (2.6) не равны тождественно нулю в области V.

Таким образом, снесение на границу тела трех “диагональных" либо "недиагональных" уравнений Бельтрами–Мичелла делает постановку задачи в напряжениях неэквивалентной классической. Аналогично можно предъявить контрпримеры, иллюстрирующие недопустимость снесения на границу и всех других троек из девяти уравнений (2.1), (2.6) (за исключением тройки (2.1)).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00780).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Volterra V.* Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes // Ann. l'École Norm. Sup. 1907. V. 24. P. 401–507.
2. *Kröner E.* Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin: Springer, 1958. 179 s.
3. *Cesaro E.* Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche // Rendi. d. Acad. R. di Napoli. 1906. V. 12. P. 311–321.
4. *Beltrami E.* Osservazioni sulla nota precedente // Atti Accad. Lincei R. C. 1892. V. 1. P. 141–142.
5. *Washizu K.* Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1982 = *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 544 с.
6. *Hahn H.G.* Elastizitätstheorie. Stuttgart: Teubner, 1985 = *Хан Х.* Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.
7. *Победря Б.Е.* О статической задаче в напряжениях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2003. № 3. С. 61–67.
8. *Nowacki W.* Teoria sprężystošci. Warszawa: PWN, 1970 = *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
9. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. М.: Физматгиз, 1959. 364 с.
10. *Победря Б.Е.* Новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 2. С. 295–297.
11. *Победря Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Ташкент: Фан, 1988. 198 с.

Москва
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su
pobedria@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
30.IX. 2003