

УДК 532.5:534.1

© 2004 г. А. Б. Киселев, А. В. Кокорева, В. Ф. Никитин, Н. Н. Смирнов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ НА РЕГУЛИРУЕМЫХ ДОРОГАХ

Предлагается модель нестационарных однополосных автотранспортных потоков с учетом основных элементов регулирования дорожного движения (светофоры, “лежащие полицейские”), обладающая рядом коренных отличий от традиционно рассматриваемых в механике сплошной среды. Модель учитывает главное свойство автотранспортных потоков – свойство самоорганизации и позволяет правильно качественно и количественно описывать условия обеспечения максимальной пропускной способности, возникновение и эволюцию “подвижных пробок” на дорогах, воздействие элементов регулирования дорожного движения.

В отличие от первых математических моделей, описывающих движение автотранспорта [1–6], и соответствующих исследований, обобщенных в монографии [7], была предложена [8–10] модель автотранспортных потоков, которая содержит не только уравнение неразрывности, но и дифференциальное уравнение движения, учитывает ограничения скорости и ускорения транспортного потока, технические характеристики транспортных средств и особенности реакции водителя на изменение дорожной обстановки. Согласно такой модели задача движения автотранспортного потока не имеет прямой гидродинамической аналогии.

Ниже в развитие этой модели учитываются дополнительные дорожные условия: различные дальности видимости водителем дорожной обстановки впереди себя, наличие на дороге светофоров и “лежащих полицейских”.

1. Модель движения транспортного потока по автомагистрали. Рассмотрим однонаправленный поток машин по однополосной дороге. Пересечение с другими дорогами, наличие светофоров будет учитываться соответствующими граничными условиями. Введем эйлерову систему координат x вдоль автомагистрали в направлении движения потока и время t .

Среднюю плотность потока $\rho(x, t)$ определим как отношение площади полосы движения, занятой транспортными средствами, к площади всего рассматриваемого участка полосы движения

$$\rho = \frac{S_{tr}}{S} = \frac{hnl}{hL} = \frac{nl}{L}$$

где h – ширина полосы движения, L – длина контрольного участка дороги, l – средняя длина транспортного средства, n – количество транспортных средств на контрольном участке. Так введенная плотность потока – безразмерная величина, изменяющаяся от нуля до единицы.

Введем скорость потока $v(x, t)$, которая может изменяться в пределах от нуля до v_{\max}^0 – максимально разрешенной скорости движения на магистрали вне систем регулирования дорожного движения. Из определений следует, что максимальная плотность $\rho = 1$ соответствует ситуации, когда машины располагаются практически

вплотную (“бампер в бампер”). В этом случае естественно принять $v = 0$, т.е. на дороге образовалась “неподвижная пробка”.

Условно называя “массой”, сосредоточенной на участке длины L , величину

$$m = \int_0^L \rho dx$$

можно записать закон изменения массы на автомагистрали. Для непрерывного потока машин будет иметь место уравнение неразрывности

$$\partial \rho / \partial t + \partial(\rho v) / \partial x = 0 \quad (1.1)$$

Запишем уравнение динамики транспортного потока, точнее, уравнение изменения режима движения. Режим движения транспортных средств на дороге определяется следующими основными факторами: реакцией водителя на изменение дорожной обстановки и предпринимаемыми им активными действиями, откликом транспортного средства на действия водителя и техническими характеристиками транспортных средств. При разработке модели динамики транспортных средств были сделаны следующие основные предположения.

1°. В связи с тем что описывается усредненное движение множества транспортных средств, а не движение каждого автомобиля в отдельности, модель оперирует с усредненными характеристиками транспортных средств, не учитывая индивидуальных различий мощности, инерции, тормозного пути и т.п.

2°. Предполагается в среднем адекватная реакция всех водителей на изменение дорожной обстановки, а именно: предполагается, что, видя красный сигнал светофора или знак ограничения скорости, например перед “лежащим полицейским”, или скопление машин перед ним, водитель замедляет движение до последующей полной остановки или до допустимой скорости, а не продолжает ускоряться, чтобы впоследствии применить режим экстренного торможения.

3°. Предполагается, что все водители соблюдают правила дорожного движения, в частности не превышают максимально допустимого скоростного режима, разрешенного на дороге, и выдерживают безопасный интервал между транспортными средствами в зависимости от скорости движения.

Тогда уравнение изменения скорости запишется в виде

$$\frac{dv}{dt} = a; \quad a = \max\{-a^-, \min\{a^+, a'\}\} \quad (1.2)$$

$$a' = \sigma_0 a_p + (1 - \sigma_0) \int_0^y \omega(y) a_p(t, x + y) dy + \frac{V(\rho) - v}{\tau}, \quad a_p = -\frac{k^2 \partial \rho}{\rho \partial x}$$

Здесь a – ускорение транспортного потока, a^+ – максимально возможное ускорение разгона, a^- – ускорение экстренного торможения, величины a^+ и a^- положительны и определяются техническими характеристиками транспортного средства. Параметр $k > 0$ является, как было показано ранее [8–10], скоростью распространения малых возмущений (“скоростью звука”) в транспортном потоке. Параметр τ имеет смысл времени задержки, обусловленной конечностью скорости реакции водителя на изменение дорожной обстановки и техническими характеристиками транспортного средства. Этот параметр отвечает за стремление водителя привести скорость автомобиля в соответствие с максимально безопасной скоростью движения $V(\rho)$ для плотности потока ρ [8, 10]:

$$V(\rho) = \begin{cases} -k \ln \rho, & v < v_{\max}^0 \\ v_{\max}^0, & v \geq v_{\max}^0 \end{cases}$$

Скорость $V(\rho)$ определяется из условия зависимости скорости автомобиля v от плотности потока ρ для условий простой волны, возникающей при страгивании потока с места при условиях $\rho_0 = 1$ и $v = 0$ с учетом ограничения максимально допустимой скорости движения ($v \leq v_{\max}^0$). В зависимости от того, требуется для достижения максимально безопасной скорости $V(\rho)$ притормаживать или разогнаться, значение параметра τ может быть различным:

$$\tau = \begin{cases} \tau^+, & V(\rho) < v \\ \tau^-, & V(\rho) \geq v \end{cases}$$

Остальные параметры в формулах (1.2) имеют следующий смысл: $Y = \min\{Y_0, L - x\}$ – характерная видимость вдоль потока, зависящая от погодных условий, $\omega(y)$ – “вес” состояния потока перед автомобилем для принятия решения об изменении режима движения, который можно определить, например, следующим образом:

$$\omega(y) = \frac{\omega_0(y)}{\int_0^Y \omega_0(y) dy}, \quad \omega_0 = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq Y_0 \\ 0, & y < 0, y > Y_0 \end{cases}$$

σ_0 – безразмерный параметр ($0 \leq \sigma_0 \leq 1$), характеризующий “вес” локальной ситуации по сравнению с ситуацией на некотором расстоянии впереди автомобиля.

Таким образом, в выражении для ускорения транспортного потока (1.2) первое слагаемое отвечает за влияние локальной ситуации, второе – за влияние ситуации впереди на расстоянии, меньшем или равном характерной видимости Y , а третье – за подстройку скорости автомобиля к максимально безопасной для текущей плотности потока ρ .

Оценка величины скорости распространения малых возмущений k была сделана ранее [8, 10], исходя из следующих соображений. Пусть, начиная движение из состояния покоя ($v = 0, \rho = 1$) и ускоряясь до скорости v_{\max}^0 , поток достигает максимально допустимой плотности ρ_* , гарантирующей безопасность движения. Под безопасной плотностью понимается такая плотность, при которой расстояние между машинами не меньше тормозного пути $X(v)$. Тогда

$$\rho_* = (1 + X(v_{\max}^0)/l)^{-1}, \quad k = v_{\max}^0 \ln^{-1}(1 + X(v_{\max}^0)/l)$$

При $v_{\max}^0 = 80$ км/ч тормозной путь автомобиля типа ВАЗ составляет 45 м, что при средней длине автомобиля (с учетом минимального расстояния между остановленными автомобилями) $l = 5$ м дает скорость распространения слабых возмущений $k = 35$ км/ч. Для такой величины v_{\max}^0 максимально возможная безопасная плотность потока $\rho_* = 0.1$. Максимальные ускорения для автомобилей данного класса составляют $a^+ = 1.63$ м/с² и $a^- = 5.5$ м/с².

Оцененная таким образом “скорость звука” k хорошо согласуется с экспериментальными данными [3, 4].

Таким образом, для описания динамики автотранспортного потока по однополосной дороге из уравнений (1.1) и (1.2) получается система двух квазилинейных уравнений в частных производных в дивергентной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} = \rho a$$

Ускорение a определяется тремя последними формулами (1.2).

Сформулируем граничные условия на концах рассматриваемого участка магистрали $0 \leq x \leq L$. На входе потока при $x = 0$ возможны два варианта граничного условия:

1) в условиях отсутствия “пробки” задается плотность потока и скорость равная максимально безопасной для данной плотности:

$$\rho(0, t) = \rho_0, \quad v(0, t) = V(\rho_0)$$

2) в условиях подвижной или неподвижной “пробки”, примыкающей к входному участку дороги $x = 0$, ставится условие равенства нулю градиента плотности, а скорость равна максимально безопасной для данной плотности:

$$\partial \rho / \partial x|_{x=0} = 0, \quad v(0, t) = V(\rho)$$

Наличие или отсутствие “подвижной пробки”, примыкающей к левой границе расчетной области ($x = 0$), определяется после расчета очередного шага по времени по следующему критерию: если

$$\partial \rho / \partial x|_{x=0} > 0 \quad \text{и} \quad \rho > \rho_0$$

то имеется “подвижная пробка”.

На выходе потока при $x = L$ ставится условие “свободного выхода”

$$\partial \rho / \partial x = 0, \quad \partial v / \partial x = 0$$

В качестве начальных условий примем, что на участке длиной x_0 , считая от входа ($x = 0$), магистраль занята потоком машин плотности ρ_0 , движущимся со скоростью $V(\rho_0)$, а при $x_0 < x \leq L$ магистраль свободна от машин ($\rho = 0, v = 0$).

2. Модели систем регулирования дорожного движения. Рассмотрим два варианта регулирования движения автотранспорта, характерные для городских дорог: светофоры и так называемые “лежащие полицейские”.

Светофор. Основные параметры работы светофора – длительность сигналов: зеленого (ЗС) t_g , желтого (ЖС) t_y и красного (КС) t_r , соответственно. Для моделирования работы светофора предлагается следующий алгоритм.

1°. В момент переключения ЗС на ЖС вычисляется расстояние

$$x_r = (v_{\max}^0)^2 / (2a_r)$$

где a_r – штатное ускорение торможения, меньшее значения экстренного торможения a^- . Транспортные средства, находящиеся от светофора на расстоянии, меньшем x_r , не успевают остановиться до светофора со стандартным ускорением торможения a_r , поэтому они проезжают на ЖС, что отвечает правилам дорожного движения.

2°. Во время работы ЖС полагаем, что максимальная скорость равна

$$v_{\max}^e(x_l) = v_{\max}^0 t_{ys} / t_y$$

где t_{ys} – время, прошедшее с начала работы ЖС. При этом, x_l – точка, перемещающаяся к светофору по закону

$$x_l = L_1 - x_r t_{ys} / t_y$$

где L_1 – координата места расположения системы регулирования движения (в данном случае светофора). В результате этого к моменту переключения на КС машины останавливаются у светофора.

3°. В момент переключения с КС на ЗС максимально разрешенная скорость проезда светофора будет v_{\max}^0 , как и в остальных точках расчетного участка дороги.

“Лежащие полицейские”. Система ограничения скорости движения автотранспортного потока, которая обычно называется “лежащими полицейскими” (ЛП), моделируется заданием максимальной скорости движения v_{\max} в месте расположения ЛП, значительно меньшей, чем для основного участка дороги – v_{\max}^0 . В данной работе рассматривается случай двух ЛП на расстоянии d друг от друга, наиболее часто встречающийся на практике. Место расположения первого из них $x = L_1$. Тогда значение максимально разрешенной скорости на расчетном участке дороги $0 \leq x \leq L$ задается следующим образом:

$$v_{\max} = \begin{cases} v_p, & x \in \{L_1, L_1 + d\} \\ v_{\max}^0, & x \in [0, L] \setminus \{L_1, L_1 + d\} \end{cases}$$

где $v_p < v_{\max}^0$ и параметр v_p (максимальная скорость проезда) ЛП является одним из основных параметров модели.

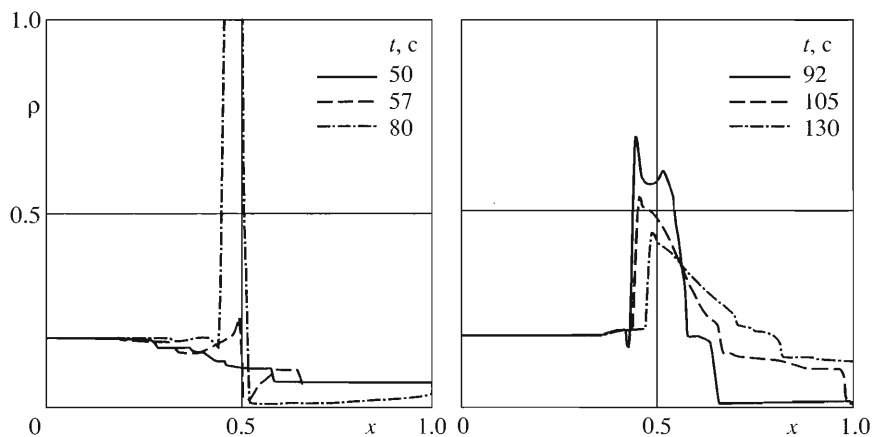
3. Результаты численных расчетов. Численное решение поставленных задач осуществляется методом TVD со вторым порядком точности [11]. Число узлов расчетной сетки равно 201.

При расчетах использованы следующие параметры: $L = 1000$ м – длина расчетной области, $x_0 = 100$ м – длина участка, занятого движущимся транспортом в начальный момент времени $t = 0$, $L_1 = 500$ м – место расположения систем регулирования дорожного движения (светофор или первый ЛП), $d = 50$ м – расстояние между двумя ЛП; $\rho_0 = 0.1 \dots 0.5$ – плотность потока автотранспорта на входе в расчетную область $x = 0$, $v_{\max}^0 = 25$ м/с – максимальная скорость движения на основном участке дороги, $v_p = 3$ м/с – максимальная скорость проезда ЛП, $k = 7.9$ м/с – скорость распространения малых возмущений в потоке автотранспорта, $a^+ = 1.5$ м/с² – максимальное ускорение потока, $a^- = 5$ м/с² – максимальное (экстренное) ускорение торможения потока; $a_r = 1.5$ м/с² – стандартное ускорение торможения, $Y_0 = 100$ м – характерная видимость вперед по потоку, $\sigma_0 = 0.7$ – “вес” локальной ситуации, $\tau^+ = 3.3$ с, $\tau^- = \infty$ – время задержки подстройки под безопасную скорость движения, $t_g = 40 \dots 300$ с, $t_y = 5$ с, $t_r = 30$ с – длительности сигналов светофора.

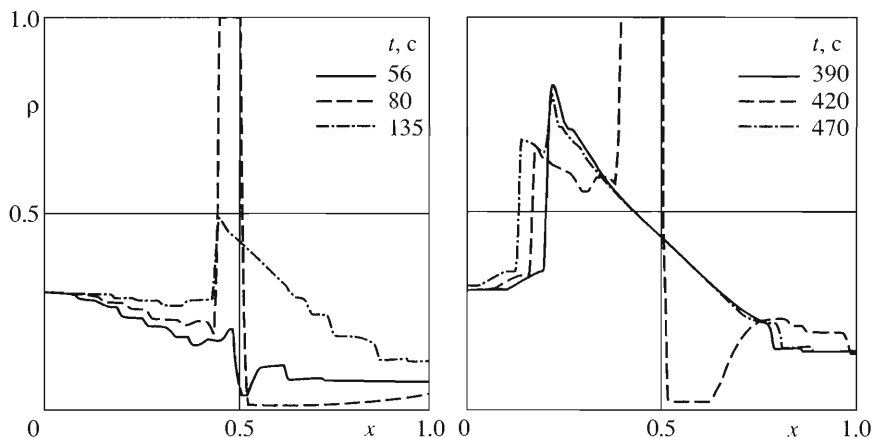
Таким образом, в расчетах варьировалась плотность входящего потока ρ_0 (а значит, и его скорость) и длительность работы ЗС t_g .

Результаты расчетов представлены на фиг. 1–4 и в таблице.

На фиг. 1, 2 даны распределения плотности транспортного потока ρ по координате расчетной области x в разные моменты времени, указанные на фигурах, в случае регулирования движения светофором. При этом длительность работы ЗС $t_g = 50$ с, а начальные плотности транспортного потока $\rho_0 = 0.18$ (фиг. 1) и $\rho_0 = 0.3$ (фиг. 2). Время на фиг. 1 соответствует следующим циклам работы и сигналам светофора: 50 с – первый цикл, конец ЗС, 57 с – первый цикл, ЖС, 80 с – первый цикл, конец КС, 92 с – второй цикл, ЗС, 105 с – второй цикл, ЗС, 130 с – второй цикл, конец КС. На фиг. 2: 56 с – первый цикл, ЖС, 86 с – первый цикл, конец КС, 135 с – второй цикл, конец ЗС, 390 с – пятый цикл, конец ЗС, 426 с – пятый цикл, конец КС, 476 с – шестой цикл, конец ЗС. Как видно из этих графиков, при $\rho_0 = 0.18$ “подвижная пробка” не образуется (фиг. 1), а в случае $\rho_0 = 0.3$ образуется подвижная пробка, перемещающаяся против потока, скорость движения автомобилей в которой существенно уменьшается. Результаты исследования зависимости величины предельной начальной плотности потока ρ_0^* , при



Фиг. 1



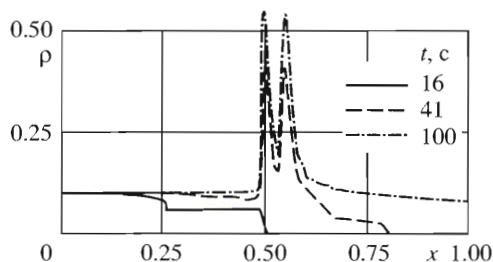
Фиг. 2

которой не образуется подвижная пробка, от длительности ЗС t_g , приведены в таблице. Остальные исходные параметры фиксированы. Зависимость ρ_0^* от t_g хорошо описывается формулой

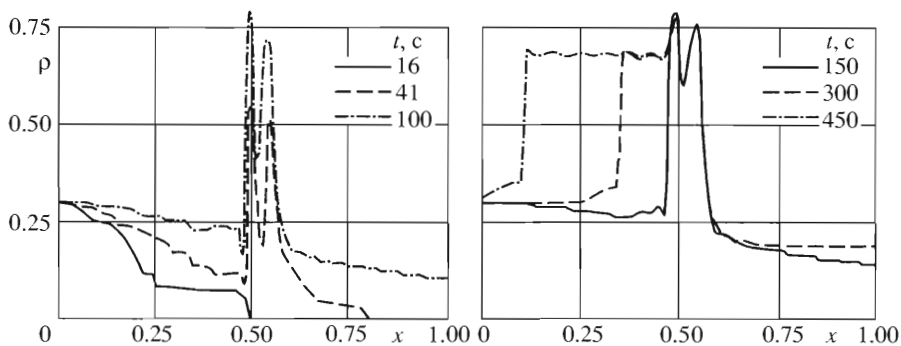
$$\rho_0^* = a \ln(bt_g) \quad (3.1)$$

где a, b – параметры, зависящие от многих факторов, включая длительность красного сигнала t_r . Для рассмотренных исходных данных $a = 0.054$, $b = 0.87$. Разность Δ предельных плотностей ρ_0^* , вычисленные по формуле (3.1), разность предельных плотностей ρ_0^* , вычисленных по формуле (3.1) и значений, полученных численным моделированием, также представлены в таблице. Среднее квадратичное отклонение равно 0.0116, а максимальная разность плотностей $\Delta = 0.0216$.

t_g, c	40	60	80	100	150	200	250	300
ρ_0^*	0.18	0.21	0.23	0.23	0.27	0.29	0.31	0.31
$\Delta \cdot 10^3$	11.68	3.56	-0.89	11.16	-6.95	-11.41	-19.36	-9.52



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3, 4 приведены профили плотностей транспортного потока ρ по координате расчетной области x для случая регулирования движения двумя ЛП в разные последовательные моменты времени, указанные на графиках, при начальной плотности потока $\rho_0 = 0.1$ (фиг. 3) и $\rho_0 = 0.3$ (фиг. 4).

Случай $\rho_0 = 0.1$ соответствует свободному движению транспортного потока через зону регулирования движения ЛП, а при $\rho_0 = 0.3$ образуется подвижная пробка, перемещающаяся против потока. Видно, что при прохождении потоком машин участка с ЛП образуются два участка повышенной плотности (фиг. 3, 4), что в случае $\rho_0 < 0.2$ не препятствует свободному прохождению потока через препятствия. Если же $\rho_0 \geq 0.2$, то перед ЛП подвижная пробка, появление которой приводит к тому, что с течением времени плотность ρ на входе в расчетную область $x = 0$ начинает превышать начальную плотность ρ_0 и движение перед зоной препятствий становится очень медленным (фиг. 4).

4. Заключение. Проведенные расчеты позволяют сделать вывод, что при небольших плотностях входящего потока автотранспорта “лежащие полицейские” позволяют регулировать необходимым образом скорость движения на участке, где они установлены, не создавая помех свободному движению автотранспорта. Однако с увеличением плотности входящего потока они создают “подвижную пробку”, перемещающуюся против потока транспорта, что в конечном счете приводит к затору на дороге. Регулирование дорожного движения с помощью светофора позволяет, подбирая оптимальные режимы работы (длительность сигналов различного цвета), значительно увеличить пропускную способность дороги.

Модель учитывает главное свойство автотранспортных потоков – свойство самоорганизации и позволяет правильно качественно и количественно описывать усло-

вия обеспечения максимальной пропускной способности, возникновение и эволюцию “подвижных пробок” на дорогах, воздействие основных элементов регулирования дорожного движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Москвы (ГА-91/02) и Правительства региона Брюсселя (RIB-2002/001).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M.G., Whitham G.B.* On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads // *Proc. Roy. Soc. London. Ser.A.* 1955. V. 229. № 1178. P. 317–345.
2. *Richards P.L.* Shock waves on the highway // *Operations Research.* 1956. V. 4. № 1. P. 42–51.
3. *Greenberg H.* An analysis of traffic flow // *Operations Research.* 1959. V. 7. № 1. P. 79–85.
4. *Whitham G.B.* *Linear and Non-linear Waves.* N.Y.: Wiley, 1974 = *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
5. *Prigogine I., Resibois P., Herman R., Anderson R.L.* On a generalized Boltzmann-like approach for traffic flow // *Bull. Cl. Sci., Acad. Roy. Belg.* 1962. V. 48. № 9. P. 805–814.
6. *Солдатов Г.П.* Момент образования ударной волны в двустороннем транспортном потоке // *ПММ.* 1970. Т. 34. Вып. 1. С. 135–137.
7. *Луканин В.Н., Буслаев А.П., Трофименко Ю.В., Яшина М.В.* *Автотранспортные потоки и окружающая среда.* М.: Инфра-М, 1998. 408 с.
8. *Смирнов Н.Н., Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Юмашев М.В.* Математическое моделирование автотранспортных потоков. М.: Мех.-мат. ф-т МГУ, 1999. 30 с.
9. *Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Смирнов Н.Н., Юмашев М.В.* Неустановившиеся движения автотранспорта на кольцевой магистрали // *ПММ.* 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 651–658.
10. *Смирнов Н.Н., Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Юмашев М.В.* Математическое моделирование автомобильных потоков на магистралях // *Вестн. МГУ. Сер. I. Математика, механика.* 2000. № 4. С. 39–44.
11. *Oran E., Boris J.* *Numerical Simulation of Reactive Flow.* N.Y.: Elsevier, 1987 = *Оран Э., Борис Дж.* Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. 661 с.

Москва
e-mail: akis@mech.math.msu.ru

Поступила в редакцию
12.III.2003