

УДК 539.3:534.1.11

© 2004 г. П. М. Белоцерковский

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЕСКОНЕЧНОГО РЯДА КОЛЕС
С ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИХСЯ
ПО РЕЛЬСОВОМУ ПУТИ**

Рассматривается периодическая модель рельсового пути в виде бесконечной балки Тимошенко, которая поддерживается массивными упруговязкими опорами с постоянным шагом. Поддрессоренная часть экипажа отделена от колеса упругой рессорой, поэтому ее воздействие на колесо в первом приближении представляется статической нагрузкой. Исследуются установившиеся вертикальные колебания рельса под действием бесконечного ряда колес, равномерно движущихся по рельсу. Расстояния между колесами одинаковы, все колеса имеют одну и ту же массу и несут одинаковый груз. Статическая жесткость пути над шпалой превосходит эту же жесткость в промежутке между шпалами. Поэтому каждое колесо под действием постоянного груза совершает вертикальные параметрические колебания с частотой прохождения шпал. Эти колебания являются обобщением параметрических колебаний, описываемых при помощи известных уравнений Матвея и Хилла.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение бесконечного ряда колес с шагом h по рельсовому пути с шагом шпал l . Каждое колесо имеет массу m_0 , несет постоянный груз a_0 и движется без отрыва от рельса с постоянной ненулевой скоростью v_0 . Между колесом и рельсом возникает упругое взаимодействие, которое моделируется при помощи линейной контактной пружины с жесткостью k_c . Обозначим x и t продольную координату и время. Совместим точку $x = 0$ с одной из шпал (фиг. 1). Пусть $t = 0$ соответствует прохождению “нулевого” колеса над точкой $x = 0$.

Сила, с которой колесо действует на рельс, имеет период l/v_0 . Положительное направление этой силы соответствует растяжению контактной пружины. Силы, действующие на колесо и на рельс, противоположны (фиг. 1). Представим периодическую силу, с которой нулевое колесо действует на рельс, в виде ряда Фурье

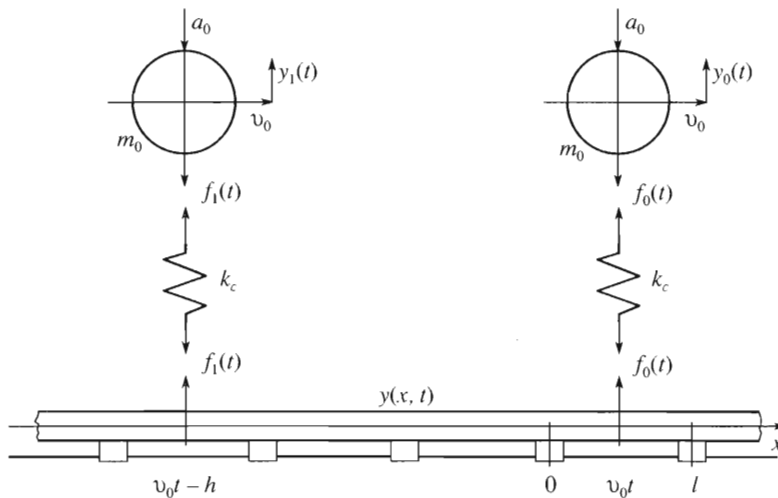
$$f_0(t) = -a_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m \exp\left(\frac{i2\pi m v_0 t}{l}\right), \quad f_0\left(t + \frac{l}{v_0}\right) = f_0(t) \tag{1.1}$$

Каждое слагаемое ряда имеет период l/v_0 . Безразмерные коэффициенты Фурье F_m подлежат определению.

Вертикальное отклонение нулевого колеса определяется дифференциальным уравнением

$$m_0 \frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = -a_0 + a_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m \exp\left(\frac{i2\pi m v_0 t}{l}\right) \tag{1.2}$$

Если $F_0 = 1$, то это уравнение имеет ограниченное периодическое решение.



Фиг. 1

Первое колесо следует за нулевым и проходит фиксированную точку рельса с запаздыванием, равным h/v_0 . Силы, с которыми эти два колеса действуют на рельс, связаны равенством $f_1(t) = f_0(t - h/v_0)$. Величина $f_0(t - nh/v_0)$ равна силе взаимодействия рельса и колеса, имеющего номер n . Таким образом, нагрузка на рельс от бесконечного ряда колес равна

$$q(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0(t - nh/v_0) \delta(x - v_0 t + nh) \quad (1.3)$$

Функция Дирака $\delta(x - v_0 t + nh)$ задает сосредоточенную силу в точке $x_n = v_0 t - nh$ контакта рельса и колеса с номером n .

Правая часть равенства (1.3) не изменяется при одновременной замене t на $t + h/v_0$ и n на $n + 1$, а также при одновременной замене t на $t + l/v_0$ и x на $x + l$. Таким образом, давление колес на рельс удовлетворяет следующим двум условиям периодичности:

$$q(x, t + h/v_0) = q(x, t), \quad q(x + l, t + l/v_0) = q(x, t) \quad (1.4)$$

2. Установившиеся колебания рельсового пути. Представим шпалу как сосредоточенную массу, поддерживаемую параллельными пружиной и демпфером, а рельс как балку Тимошенко с линейной плотностью ρ_0 . Обозначим $y(x, t)$ направленное вверх поперечное отклонение рельса. Уравнение вертикальных колебаний рельса имеет вид [1]

$$\begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho_0 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \rho_0 \left(\frac{J}{A} + \frac{EJ}{R} \right) \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_0^2 J}{RA} \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial t^4} = \\ = q(x, t) + \frac{\rho_0 J}{RA} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} - \frac{EJ}{R} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

EJ – изгибная жесткость рельса, E – модуль упругости, J – момент инерции поперечного сечения рельса. Величина $R = k'GA$ называется жесткостью сдвига, G – модуль сдвига, A – площадь поперечного сечения рельса, коэффициент k' учитывает нерав-

номерность распределения перерезывающей силы по поперечному сечению. Правая часть уравнения (2.1) удовлетворяет условиям (1.4). Следовательно, левая часть и решение уравнения также удовлетворяют этим условиям. Таким образом, поперечное отклонение рельса удовлетворяет двум условиям периодичности

$$y(x, t + h/v_0) = y(x, t), \quad y(x + l, t + l/v_0) = y(x, t) \quad (2.2)$$

Первое условие можно объяснить тем, что одинаковые колеса, имеющие равную скорость и несущие одинаковый груз, проходят над произвольной точкой рельса x через равные промежутки времени h/v_0 . В дальнейшем можно ограничиться промежутком времени $0 \leq t \leq h/v_0$. Второе условие – частный случай условия установившихся колебаний рельса, подробно рассмотренный ранее [1]. Если принять $h \geq l$, то в течение упомянутого выше промежутка времени на отрезке рельса $0 \leq x \leq l$, ограниченном двумя смежными шпалами, будет находиться только нулевое колесо. Следовательно, в правой части формулы (1.3) можно сохранить только одно ненулевое слагаемое $f_0(t)\delta(x - v_0t)$, соответствующее $n = 0$. Согласно формуле (1.1) можно принять в качестве нагрузки, приложенной к отрезку рельса, величину

$$q(x, t) = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m q_m(x, t), \quad q_m(x, t) = a_0 \exp\left(\frac{i2\pi m v_0 t}{l}\right) \delta(x - v_0 t) \quad (2.3)$$

Ввиду линейности рассматриваемой задачи представим поперечное отклонение рельса в виде

$$y(x, t) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n y_n(x, t) \quad (2.4)$$

где $y_n(x, t)$ – поперечное отклонение рельса под действием нагрузки $q_n(x, t)$, удовлетворяющее двум условиям (2.2). Величины $y_n(x, t)$ и $q_n(x, t)$ удовлетворяют уравнению (2.1).

Частные производные $\partial y(x, t)/\partial x$ и $\partial^3 y(x, t)/\partial x^3$ имеют разрывы в точках опирания рельса на шпалы. Поэтому второе условие (2.2) приводит к краевой задаче на отрезке $0 \leq x \leq l$ со следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial^j y(l, t + l/v_0)}{\partial x^j} = \frac{\partial^j y(0, t)}{\partial x^j} + \kappa_j k(t), \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

$$k(t) = \rho_1 l \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial t^2} + r l \frac{\partial y(0, t)}{\partial t} + u l y(0, t), \quad \kappa_0 = 0, \quad \kappa_1 = -R^{-1}, \quad \kappa_2 = 0, \quad \kappa_3 = (EJ)^{-1}$$

Значения упомянутых ранее частных производных берутся в точке $x = 0$ справа, а в точке $x = l$ слева. Величины $\rho_1 l$, $r l$ и $u l$ представляют собой массу шпалы, вязкость демпфера и жесткость пружины, выраженные через параметры соответствующего однородного упруговязкого основания. Решение краевой задачи, аналогичной задаче, исследованной в [1], распространяется на произвольные значения x и t при помощи условий периодичности (2.2). Граничные условия (2.5) теряют смысл при $v_0 = 0$.

Перейдем к безразмерному времени $T = v_0 t/l$ и безразмерной продольной координате $X = x/l$. Отметим, что безразмерная продольная координата нулевого колеса $X_0 = x_0/l = v_0 t/l$ совпадает с T . Учтем, что

$$\delta(l(X - T)) = \delta(X - T)/l, \quad \delta(X - T) = \delta(T - X)$$

Безразмерная величина $Y_n(X, T) = y_n(x, t)/l$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^4 Y_n(X, T)}{\partial X^4} + \alpha \frac{\partial^2 Y_n(X, T)}{\partial T^2} - (\beta + \gamma) \frac{\partial^4 Y_n(X, T)}{\partial X^2 \partial T^2} + \beta \gamma \frac{\partial^4 Y_n(X, T)}{\partial T^4} =$$

$$= A_0 \left(1 + \psi \left(\beta \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) \right) \exp(i2\pi n T) \delta(X - T), \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (2.6)$$

$$\alpha = \frac{\rho_0 v_0^2 l^2}{EJ}, \quad \beta = \frac{\rho_0 v_0^2}{EA}, \quad \gamma = \frac{\rho_0 v_0^2}{R}, \quad A_0 = \frac{a_0 l^2}{EJ}, \quad \psi = \frac{\gamma}{\alpha}$$

двум условиям периодичности

$$Y_n(X, T + H) = Y_n(X, T), \quad H = h/l, \quad Y_n(X + 1, T + 1) = Y_n(X, T) \quad (2.7)$$

и четырьмя граничными условиями

$$\frac{\partial^j Y_n(1, T + 1)}{\partial X^j} = \frac{\partial^j Y_n(0, T)}{\partial X^j} + K_j K(T), \quad K_0 = 0, \quad K_1 = -\psi, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 1$$

$$j = 0, 1, 2, 3; \quad K(T) = K_2 \frac{\partial^2 Y_n(0, T)}{\partial T^2} + K_1 \frac{\partial Y_n(0, T)}{\partial T} + K_0 Y_n(0, T) \quad (2.8)$$

$$K_0 = \frac{ul^4}{EJ}, \quad K_1 = \frac{rv_0 l^3}{EJ}, \quad K_2 = \frac{\rho_1 v_0^2 l^2}{EJ}$$

Согласно первому условию периодичности (2.7) величина $Y_n(X, T)$ может быть представлена в виде ряда Фурье

$$Y_n(X, T) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_{sn}(X) \exp(i\Phi_s T); \quad \Phi_s = \frac{2\pi s}{H} \quad (2.9)$$

с неизвестными коэффициентами $C_{sn}(X)$, которые удовлетворяют равенству

$$C_{sn}(X) = \frac{1}{H} \int_0^H Y_n(X, T) \exp(-i\Phi_s T) dT \quad (2.10)$$

3. Решение краевой задачи для $s \neq 0$. Вычислим коэффициенты Фурье $C_{sn}(X)$. Для этого умножим уравнение (2.6), четыре граничных условия (2.8), а также второе условие периодичности (2.7) на величину $\exp(-i\Phi_s T) dT/H$ и проинтегрируем от нуля до H . Отметим, что интегрирование первого условия (2.7) приводит к тождеству. Интегрируя по частям и принимая во внимание равенство (2.10), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 C_{sn}(X)}{dX^4} + (B + \Gamma) \frac{d^2 C_{sn}(X)}{dX^2} + (B\Gamma - A) C_{sn}(X) = \frac{A_0}{H} (1 + \psi(\Phi_{sn}^2 - B)) \exp(-i\Phi_{sn} X)$$

$$\Phi_{sn} = \Phi_s - 2\pi n, \quad A = \alpha \Phi_s^2, \quad B = \beta \Phi_s^2, \quad \Gamma = \gamma \Phi_s^2$$

Четыре граничных условия

$$\exp(i\Phi_s) \frac{d^j C_{sn}(1)}{dX^j} = \frac{d^j C_{sn}(0)}{dX^j} + K_j K_*(\Phi_s) C_{sn}(0), \quad j = 0, 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

$$K_*(\Phi_s) = -\Phi_s^2 K_2 + i\Phi_s K_1 + K_0$$

определяют на отрезке $0 \leq X \leq 1$ краевую задачу для этого уравнения. Интегрирование второго условия (2.7) приводит к равенству

$$\exp(i\Phi_s) C_{sn}(X+1) = C_{sn}(X) \tag{3.2}$$

Если целочисленная переменная s равна нулю, то $\Phi_s = 0$, а в левой части обыкновенного дифференциального уравнения сохраняется только первое слагаемое. Сначала решим эту задачу при условии, что $s \neq 0$. В этом случае

$$C_{sn}(X) = \frac{A_0}{H} (\exp(-i\Phi_{sn} X) - J(\Phi_s) N(X, \Phi_s)) P_{sn}, \quad P_{sn} = \frac{1 + \psi(\Phi_{sn}^2 - B)}{L_{sn}}$$

$$2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) N(X, \Phi_s) = \left((1 - \psi\sigma_2^2) \frac{\text{sh}(\sigma_1(1-X)) + \exp(-i\Phi_s) \text{sh}(\sigma_1 X)}{\sigma_1(\cos\Phi_s - \text{ch}\sigma_1)} - (1 + \psi\sigma_1^2) \frac{\sin(\sigma_2(1-X)) + \exp(-i\Phi_s) \sin(\sigma_2 X)}{\sigma_2(\cos\Phi_s - \cos\sigma_2)} \right), \quad J(\Phi_s) = \frac{1}{1/K_*(\Phi_s) + N(0, \Phi_s)}$$

$$2\sigma_{2,1}^2 = ((B - \Gamma)^2 - 4A)^{1/2} \pm (B + \Gamma), \quad L_{sn} = \Phi_{sn}^4 - (B + \Gamma)\Phi_{sn}^2 + B\Gamma - A$$

На отрезке $0 \leq X \leq 1$ имеет место следующее разложение в ряд Фурье:

$$\exp(i\Phi_s N) N(X, \Phi_s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Q_{sm} \exp(i2\pi m X), \quad Q_{sm} = \frac{1 + \psi((\Phi_{sm}^2 - B - \Gamma))}{L_{sm}}$$

используя которое приведем решение краевой задачи к виду

$$C_{sn}(X) = \frac{A_0}{H} \left(\exp(-i\Phi_{sn} X) - J(\Phi_s) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Q_{sm} \exp(-i\Phi_{sm} X) \right) P_{sn} \tag{3.3}$$

Правая часть равенства (3.3) удовлетворяет условию (3.2). Следовательно, решение краевой задачи в виде (3.3) можно использовать при любых значениях X .

4. Решение краевой задачи для $s = 0$. При $s = 0$ решение (3.3) теряет смысл, а обыкновенное дифференциальное уравнение, граничные условия (3.1) и равенство (3.2) приобретают вид

$$\frac{d^4 C_{0n}(X)}{dX^4} = \frac{A_0}{H} (1 + \psi(2\pi n)^2) \exp(i2\pi n X), \quad 0 \leq X \leq 1$$

$$\frac{d^j C_{0n}(1)}{dX^j} = \frac{d^j C_{0n}(0)}{dX^j} + K_j K_0 C_{0n}(0), \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad C_{0n}(X+1) = C_{0n}(X) \tag{4.1}$$

$$C_{0n}(X) = \frac{A_0}{H} P_{0n} (\exp(i2\pi n X) - 1), \quad P_{0n} = \frac{1 + \psi(2\pi n)^2}{(2\pi n)^4}, \quad n \neq 0$$

$$C_{00}(X) = \frac{A_0}{H} \left(\frac{1}{K_0} + \frac{\psi}{2} X + \frac{1 - 12\psi}{24} X^2 - \frac{1}{12} X^3 + \frac{1}{24} X^4 \right)$$

Коэффициент $C_{0n}(X)$ – периодическая функция. Следовательно, приведенное для него выражение справедливо при любом значении X . Коэффициент $C_{00}(X)$ принимает равные значения на концах отрезка, что согласуется с граничными условиями. Разлагая этот коэффициент в ряд Фурье, получим его представление в виде периодической функции

$$C_{00}(X) = \frac{A_0}{H} \left(\frac{1}{K_0} + \frac{\Psi}{12} + \frac{1}{720} - \sum_{m \neq 0} P_{0m} \exp(i2\pi mX) \right) \quad (4.2)$$

которое также справедливо при любом значении X .

5. Поперечное отклонение рельса. Подставим выражение (3.3), выражение $C_{0n}(X)$ из (4.1) и выражение (4.2) в равенство (2.9). Изменяя порядок суммирования, получим

$$Y_n(X, T) = \frac{A_0}{H} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(i2\pi mX) W(m, n, T-X) \quad (5.1)$$

$$W(m, n, T-X) = S(m, n, T-X), \quad m \neq n, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$$

$$W(n, n, T-X) = S(n, n, T-X) + P_{0n}, \quad W(0, n, T-X) = S(0, n, T-X) - P_{0n}, \quad n \neq 0$$

$$W(m, 0, T-X) = S(m, 0, T-X) - P_{0m}, \quad m \neq 0$$

$$W(0, 0, T-X) = \frac{1}{K_0} + \frac{\Psi}{12} + \frac{1}{720} + S(0, 0, T-X)$$

$$S(m, n, T-X) = \sum_{s \neq 0} (\Psi(m, n) - J(\Phi_s) Q_{sm}) P_{sn} \exp(i\Phi_s(T-X)), \quad \Psi(m, n) = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Величина $W(m, n, T-X)$ представляется рядом и вычисляется приближенно при помощи замены ряда $S(m, n, T-X)$ суммой конечного числа слагаемых.

Разделим обе части равенства (2.4) на l . Далее, заменим $Y_n(X, T)$ при помощи равенства (5.1). В результате получим безразмерное поперечное отклонение рельса

$$Y(X, T) = \frac{y(x, t)}{l} = -\frac{A_0}{H} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(i2\pi mX) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n W(m, n, T-X) \quad (5.2)$$

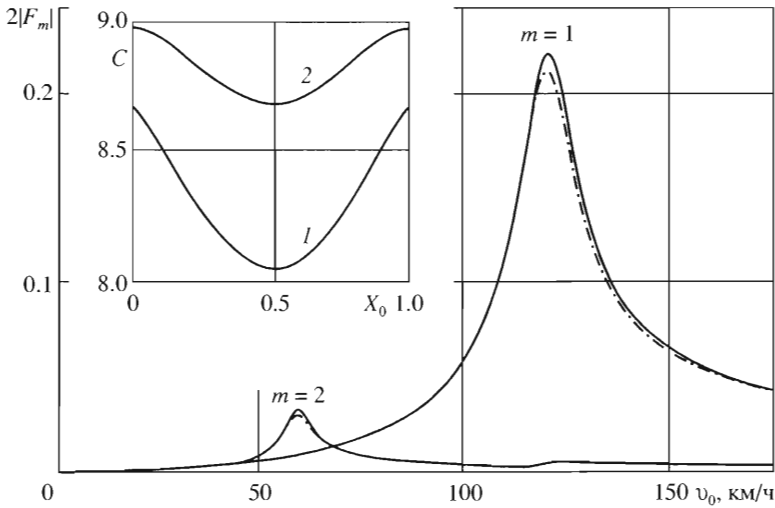
В равенстве (5.2) переменные X и T – произвольные числа. Заменяя X на T , получим безразмерное поперечное отклонение рельса в точке контакта с нулевым колесом

$$Y(T, T) = -\frac{A_0}{H} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(i2\pi mT) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n W(m, n, 0) \quad (5.3)$$

6. Взаимодействие колеса и рельса. Дважды интегрируя уравнение (1.2) и переходя к безразмерным переменным в результате интегрирования и формуле (1.1), получим безразмерное вертикальное отклонение нулевого колеса и безразмерную силу взаимодействия этого колеса и рельса

$$Y_0(T) = \frac{y_0(t)}{l} = -A_0 \sum_{m \neq 0} \frac{F_m \exp(i2\pi mT)}{M_0 (2\pi m)^2}, \quad M_0 = \frac{m_0 v_0^2 l}{EJ} \quad (6.1)$$

$$F_0(T) = \frac{f_0(t) l^2}{EJ} = -A_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m \exp(i2\pi mT) \quad (6.2)$$



Фиг. 2

Контактная пружина связывает колесо и рельс. Деформация пружины равна величине $f_0(t)/k_c$. Разность между вертикальными отклонениями нулевого колеса и рельса в точке его контакта с колесом равна этой величине. Соответствующие безразмерные величины, представленные в виде рядов Фурье (5.3), (6.1) и (6.2), связаны равенством

$$Y_0(T) = Y(T, T) + F_0(T)/K_c, \quad K_c = k_c l^3 / (EJ) \tag{6.3}$$

Равенство (6.3) имеет место, если равны коэффициенты при $\exp(i2\pi mT)$, где $m \neq 0$, в его левой и правой частях. Принимая также во внимание равенство $F_0 = 1$, получим бесконечную систему уравнений

$$\left(\frac{1}{K_c} - \frac{1}{M_0(2\pi m)^2} \right) F_m + \frac{1}{H} \sum_{n \neq 0} F_n W(m, n, 0) = -\frac{W(m, 0, 0)}{H}, \quad m \neq 0 \tag{6.4}$$

для определения бесконечного числа неизвестных коэффициентов F_m . Единственный способ решения бесконечной системы уравнений (6.4) заключается в ее приближении конечной системой уравнений. Принимая $1 \leq |m| \leq N$ и $1 \leq |n| \leq N$, получим систему $2N$ уравнений, содержащих $2N$ неизвестных коэффициентов. Решая конечную систему уравнений, вычислим эти коэффициенты. Увеличивая N и оценивая влияние этого увеличения на уже вычисленные коэффициенты, достигаем требуемой точности. Далее принимаем $N = 5$.

Коэффициенты F_m и F_{-m} – комплексно-сопряженные величины. Действительная величина $F_m \exp(i2\pi mT) + F_{-m} \exp(-i2\pi mT)$ определяет гармоническую составляющую силы взаимодействия колеса и рельса с номером m , имеющую безразмерную амплитуду $2|F_m|$. На фиг. 2 изображены результаты вычисления этой амплитуды ($m = 1, 2$) в зависимости от скорости v_0 для следующих параметров рельсового пути [2]:

$$EJ = 3.57 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2, \quad A = 0.006 \text{ м}^2, \quad \rho_0 = 48 \text{ кг/м}, \quad k' = 0.34, \quad l = 0.8 \text{ м}$$

$$u = 40 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2, \quad \rho_1 = 43.6 \text{ кг/м}, \quad r = 26 \cdot 10^3 \text{ Нс/м}^2$$

и массы колеса $m_0 = 700$ кг при шаге колес h , равном пяти шагам шпал l (сплошные кривые) и при $h = 10l$ (штриховые кривые). Различие между сплошными и штриховыми

ми кривыми – следствие динамического взаимодействия смежных колес. Движущееся колесо порождает в рельсе бегущие волны, которые воздействуют на соседние колеса. Эти волны затухают благодаря демпфированию шпал. Переход к случаю $h = 15l$ приводит к едва заметному изменению кривых. При дальнейшем увеличении шага колес кривые практически не изменяются. Таким образом, при $h = 15l$ взаимодействие колес пренебрежимо мало.

В рассматриваемой задаче безразмерная величина $H = h/l$ – произвольное положительное число. Если $H \rightarrow \infty$, то ряды, приведенные в предыдущем пункте, переходят в соответствующие несобственные интегралы, полученные ранее [1] при помощи интегрального преобразования Фурье и описывающие движение по рельсовому пути одного колеса. При достаточно большой величине H эти ряды служат приближением несобственных интегралов, которое сокращает вычисления в несколько раз. В дальнейших вычислениях принимается $H \geq 20$ и рассматривается движение одного колеса.

При численном исследовании динамики рельсового пути рассматривается конечный отрезок пути, концы которого закрепляются тем или иным способом. Волны, возникающие при взаимодействии колеса и пути, отражаются от концов отрезка пути. Отраженные волны искажают результаты численного исследования. Заменяв закрепление концов отрезка пути условием периодичности, Рипке [3] рассмотрел два случая таких условий:

$$\pm y(x, t + h/v_0) = y(x, t)$$

В первом случае граничные условия в начале отрезка и граничные условия на его конце принимались одинаковыми. Таким образом, отрезок пути, длина которого кратна шагу шпал, заменялся кольцом или “белчьим колесом”. Движение одного колеса по этому кольцу равносильно рассмотренному ранее движению бесконечного ряда колес с шагом, равным длине кольца, по бесконечному пути. Бегущие волны воздействуют на колесо. Численное исследование показало, что это воздействие пренебрежимо мало, если длина кольца $h \geq 15l$, что согласуется с приведенным выше исследованием. Во втором случае граничные условия на концах отрезка пути принимались противоположными по знаку. В этом случае путь представляется уложенным на известную поверхность Мёбиуса.

7. Изменение статической жесткости пути. Связь с уравнениями Матье и Хилла. Устойчивость движения. Заменяем в равенстве (5.3) безразмерное время T на безразмерную координату колеса $X_0 = v_0 t/l$. Зафиксируем X_0 . Пусть $v_0 \rightarrow 0$. Тогда безразмерный параметр $M_0 \rightarrow 0$, а время $t = X_0 l/v_0 \rightarrow \infty$. Кроме того, величины A , B и Γ стремятся к нулю, а L_{sm} , $K_*(\Phi_s)$ и $N(0, \Phi_s)$ соответственно переходят в Φ_{sm}^4 , K_0 и

$$\frac{1 - 6\psi}{12(\cos \Phi_s - 1)} + \frac{1}{4(\cos \Phi_s - 1)^2}$$

Если шаг колес h и шаг шпал l несоизмеримы, то величина Φ_{sm}^4 не обращается в нуль, что дает возможность использовать приведенные выше формулы. В результате предельного перехода получим, что $F_m = 0$ для всех ненулевых значений m . Кроме того, $F_0 = 1$. Таким образом, равенство (5.3) переходит в следующее равенство:

$$Y(X_0, X_0) = -\frac{A_0}{H} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(i2\pi m X_0) W(m, 0, 0) \quad (7.1)$$

а периодическая величина

$$C(X_0) = -A_0/Y(X_0, X_0) \quad (7.2)$$

представляет собой безразмерную жесткость пути в точке X_0 .

В левой части фиг. 2 показано изменение безразмерной жесткости пути $C(X_0)$ на периоде $0 \leq X \leq 1$. Кривая 1 соответствует результатам расчета при учете деформации сдвига в рельсе. Наибольшее значение величины $C(X_0)$, равное 8.669, достигается в точках 0 и 1, соответствующих смежным шпалам. Наименьшее значение 8.050 в точке 0.5 соответствует середине пролета между шпалами. Изменение жесткости, отнесенное к ее среднему значению, составляет малую величину, равную 0.0741. Кривая 2 – результат расчета без учета деформации сдвига в рельсе. Наибольшее значение 8.976 и наименьшее значение 8.678 безразмерной жесткости пути достигаются в тех же самых точках. Отсутствие деформации сдвига в рельсе приводит к незначительному увеличению средней жесткости пути, которая в основном определяется деформацией изгиба рельса. При этом относительное изменение жесткости, равное 0.0338, уменьшается более чем в два раза. Таким образом, периодическое изменение жесткости рельсового пути в основном связано с деформацией сдвига в рельсе.

К тем же результатом можно прийти другим путем. Сохраним ненулевое значение скорости колеса. Будем пренебрегать массой колеса, рельса и шпал, а также контактной жесткостью и вязким сопротивлением пути. Тогда вертикальные отклонения колеса и рельса совпадают, величины A , B , Γ и M_0 снова обращаются в нуль, и следовательно сохраняются равенства (7.1) и (7.2). Таким образом, поперечное отклонение рельса совпадает с его статическим отклонением, т.е. рассматриваемое движение рельса квазистатическое.

Вновь примем во внимание массу колеса и перейдем в равенстве (7.2) к размерным величинам. Движение колеса по рельсу приводит к периодическому изменению жесткости пути в точке контакта. В рассматриваемом квазистатическом приближении колебания колеса подобны колебаниям сосредоточенной массы, нагруженной постоянной силой и поддерживаемой невесомой пружиной с периодически изменяющейся жесткостью. Таким образом, вертикальное отклонение колеса $y_0(t)$ определяется обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$m_0 \frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} + \frac{EJ}{l^3} C\left(\frac{v_0 t}{l}\right) y_0(t) = -a_0 \tag{7.3}$$

с постоянной правой частью и периодическим коэффициентом при $y_0(t)$. Если разложить в ряд Фурье периодический коэффициент, то левая часть уравнения (7.3) совпадет с левой частью уравнения Хилла [4, 5]. Если в разложении Фурье сохранить только постоянное слагаемое и первую гармонику, то левая часть уравнения (7.3) совпадет с левой частью уравнения Матье [5, 6]. Отметим, что периодический коэффициент можно также определить, представляя реакции шпал при помощи ряда функций Дирихле с шагом l [7].

Учет демпфирования вертикальных колебаний колеса приводит к появлению производной первого порядка в уравнении (7.3). При малом демпфировании решения уравнений Хилла и Матье могут быть неустойчивыми [4, 5] и неограниченно возрастать. Вертикальные колебания массивного колеса, движущегося по рельсовому пути, также могут оказаться неограниченными. Отметим, что устойчивость периодической модели рельсового пути исследовалась асимптотически [8, 9]. Рассматривалось движение массы по балке, лежащей на периодически неоднородном вязкоупругом основании [9]. Численное исследование матрицы монодромии дифференциального уравнения (7.3) с демпфированием подтвердило устойчивость колебаний колеса для приведенных выше параметров пути и колеса [10]. Сделанные выводы относятся к случаю, когда неподдрессоренная часть экипажа представляется только одной массой m_0 . Если принять во внимание изгиб оси колесной пары и заменить одну массу двумя массами, отнесенными соответственно к колесу и буксе и связанными между собой пружиной,

то демпфирование одной из двух масс, представляющей буксу, может оказаться недостаточным, а вся система – неустойчивой.

Отметим, что устойчивость движения ненагруженного колеса по рельсу, поддерживаемому периодически расположенными шпалами, можно исследовать, записав второе равенство (2.2) в обобщенном виде

$$y_n(x+l, t+l/v_0) = R y_n(x, t)$$

где R – безразмерный комплексный коэффициент. В этом случае задача приводится к системе уравнений (6.4) с нулевыми правыми частями. Коэффициенты этой системы зависят от принятых параметров пути, массы и скорости движения колеса, а также от безразмерного коэффициента R . Если однородная система (6.4) имеет ненулевое решение при условии, что $|R| > 1$, то величина $y_n(x, t)$ возрастает экспоненциально, и движение ненагруженного колеса оказывается неустойчивым. Отметим, что в проведенном ранее исследовании движения неуравновешенного колеса по рельсовому пути [1] аналогичный комплексный коэффициент был равен единице по абсолютной величине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский П.М. Установившиеся колебания и сопротивление рельсового пути равномерному движению неуравновешенного колеса // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 864–876.
2. Belotserkovskiy P.M. Forced oscillations of infinite periodic structures. Applications to railway track dynamics // Vehicle System Dynamics Suppl. 1998. V. 29. P. 85–103.
3. Ripke B. Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleis-Dynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktdynamik // Fortschritt-Berichte VDI. Reihe 12. Nr. 249. Duesseldorf. VDI-Verlag, 1995.
4. Сейранян А.П. Области резонанса для уравнения Хилла с демпфированием // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 44–47.
5. Мышкис А.Д. Математика. Специальные курсы для ВТУЗов. М.: Наука, 1971. 632 с.
6. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
7. Jezequel L. Response of periodic systems to a moving load // Trans ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. 1981. V. 48. № 3. P. 613–618.
8. Весницкий А.И., Метрикин А.В. Параметрическая неустойчивость колебаний тела, равномерно движущегося по периодически неоднородной упругой системе // ПМТФ. 1993. № 2. С. 127–133.
9. Verichev S.N., Metrikine A.V. Instability of vibrations of a mass that moves uniformly along a beam on a periodically inhomogeneous foundation // J. Sound and Vibrat. 2003. V. 260. № 5. P. 901–925.
10. Белоцерковский П.М. Исследование вертикальных параметрических колебаний и устойчивости движения нагруженного колеса по рельсу // Транспорт: наука, техника, управление. 2000. № 2. С. 39–43.