

УДК 531.391

© 2004 г. В. Г. Вильке, И. Ф. Кожевников

**КАЧЕНИЕ КОЛЕСА С АРМИРОВАННОЙ ШИНОЙ
ПО ПЛОСКОСТИ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ**

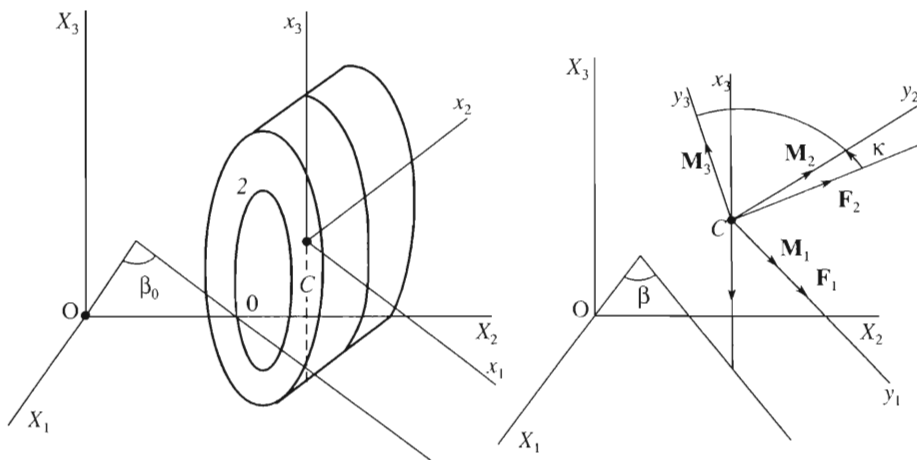
Рассматривается предложенная ранее [1] модель колеса с армированной шиной, при условии, что боковые части шины представлены армированными мембранами, состоящими из несжимаемой резины согласно модели Муни – Ривлина [2]. При деформациях бандажа учитываются точные нелинейные условия нерастяжимости армирующих волокон, в отличие от условий в линеаризованном виде, использованных ранее [1]. На основе ряда гипотез найден функционал потенциальной энергии деформированной шины в зависимости от деформаций срединной линии бандажа и перемещений диска колеса, имеющего шесть степеней свободы. Получена полная система уравнений и условия, налагаемые на скачки функций, описывающих деформации бандажа, в граничных точках заранее неизвестной зоны контакта бандажа с плоскостью при наличии проскальзывания с использованием модели сухого трения. Исследованы два стационарных режима движения заблокированного колеса: прямолинейное поступательное движение с постоянной скоростью и верчение вокруг оси, ортогональной плоскости качения колеса, с постоянной угловой скоростью.

Критерий перехода от режима качения колеса с проскальзыванием к режиму качения без проскальзывания был предложен в работе [3]. Исследовалось [4–7] динамическое взаимодействие деформируемых твердых тел с использованием модели сухого трения.

1. Моделирование колеса с армированной шиной. Предположим, что колесо с армированной шиной состоит из диска (0) (твердое тело), сочлененного с боковой поверхностью шины (1, 2), представленной частями двух торцов, и бандажа (3), армированного нерастяжимыми стальными нитями (кордом) (фиг. 1). Введем неподвижную систему координат $OX_1X_2X_3$ (колесо находится в контакте с плоскостью OX_1X_2) и подвижную систему координат $Cx_1x_2x_3$ с началом в центре масс диска точке C . Радиус-вектор точки бандажа определяется в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_3(\varphi, \xi, t) &= \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{l}_i + r \Gamma_3(\beta_0) \Gamma_2(\theta + \varphi) \left[\mathbf{e}_1 + lr^{-1} \xi \mathbf{e}_2 + \sum_{i=1}^3 U_i(\varphi, \xi, t) \mathbf{e}_i \right] \\
 \Gamma_2(\theta) &= \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix}, \quad \Gamma_3(\beta) = \begin{vmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} \varphi \bmod 2\pi \\ |\xi| \leq 1 \end{matrix}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где X_1, X_2, X_3 – координаты центра масс диска, \mathbf{l}_i – орты оси OX_i , β_0, θ – углы поворота относительно осей OX_3 и Cx_2 соответственно, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – орты цилиндрической системы координат, r и $2l$ – радиус и ширина бандажа, U_1, U_2, U_3 – компоненты вектора смещения точки бандажа в цилиндрической системе координат. Бандаж состоит из



Фиг. 1

резиновой ленты, армированной стальными нитями, для которых выполняются условия нерастяжимости, представленные равенствами

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}_3}{l \partial \xi} \right| = 1, \quad \left| \cos \gamma_0 \frac{\partial \mathbf{R}_3}{l \partial \xi} \pm \sin \gamma_0 \frac{\partial \mathbf{R}_3}{r \partial \varphi} \right| = 1, \quad \gamma_0 = \text{const}$$

эквивалентными равенствам

$$\begin{aligned} \left| l^{-1} \mathbf{R}_3^\circ \right| = 1 &\Rightarrow 2lr^{-1}U_2^\circ + \sum_{k=1}^3 U_k^{\circ 2} = 0; \quad (\cdot)^\circ = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} \\ \left| r^{-1} \mathbf{R}_3' \right| = 1 &\Rightarrow 2(U_1 - U_3') + (U_1 - U_3')^2 + U_2'^2 + (U_1' + U_3)^2 = 0 \\ \mathbf{R}_3^\circ \cdot \mathbf{R}_3' = 0 &\Rightarrow U_1^\circ(U_1' + U_3) + (lr^{-1} + U_2^\circ)U_2' - U_3^\circ(1 + U_1 - U_3') = 0; \quad (\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ранее [1] рассматривались линеаризованные соотношения (1.2), из которых были получены формулы, выражающие зависимость функций U_1, U_2, U_3 от перемещений срединной линии бандажа $u(\varphi, t), v(\varphi, t), w(\varphi, t)$, а именно,

$$U_1 = lr^{-1}\xi w'' + u, \quad U_2 = w, \quad U_3 = lr^{-1}\xi w' - v \tag{1.3}$$

Если соотношения (1.3) подставить в точные условия нерастяжимости и ортогональности нитей корда, то окажется, что функция w зависит только от времени и $w' = w'' = 0$, а функции u, v удовлетворяют условию нерастяжимости срединного волокна бандажа

$$2(u + v') + (u + v')^2 + (v - u')^2 = 0 \tag{1.4}$$

Таким образом, равенства (1.3) принимают вид

$$U_1 = u(\varphi, t), \quad U_2 = w(t), \quad U_3 = -v(\varphi, t) \tag{1.5}$$

Полученный результат выражает тот факт, что поверхность кругового цилиндра (недеформированного бандажа) при условии нерастяжимости и ортогональности волокон, соответствующих изменению координат ξ и φ , изометрична цилиндрической

поверхности с образующей, заданной деформированной плоской срединной линией бандажа, и семейством ортогональных к ней прямых. Поскольку бандаж шины находится в контакте с плоскостью OX_1X_2 , это семейство прямых линий параллельно плоскости OX_1X_2 и образует с осью OX_1 угол $\beta_0 + \pi/2$. В зоне контакта $L_1 = [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$ справедлива голономная связь

$$\mathbf{R}_3(\varphi, \xi, t) \cdot \mathbf{I}_3 = 0 \Rightarrow r^{-1}X_3 - (1+u)\sin\vartheta - v\cos\vartheta = 0, \quad \vartheta = \theta + \varphi \quad (1.6)$$

Условия (1.4) и (1.6) эквивалентны равенствам

$$u = \left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\vartheta + \frac{X_3}{r}\sin\vartheta - 1, \quad v = -\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)\sin\vartheta + \frac{X_3}{r}\cos\vartheta \quad (1.7)$$

Положение краев точек бандажа определяется векторным полем (1.1) при $\xi = (-1)^{j+1}$ ($j = 1, 2$)

$$\mathbf{R}_3(\varphi, (-1)^{j+1}, t) = \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{I}_i + r\Gamma_3(\beta_0)\Gamma_2(\vartheta)[(1+u)\mathbf{e}_1 + ((-1)^{j+1}lr^{-1} + w)\mathbf{e}_2 - v\mathbf{e}_3] \quad (1.8)$$

Свяжем с диском колеса систему координат $Cy_1y_2y_3$ и определим радиус-векторы точек боковых поверхностей шины соотношениями [1]

$$\mathbf{R}_j(\varphi, \psi, t) = \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{I}_i + \Gamma_3(\beta)\Gamma_1(\kappa)\Gamma_2(\vartheta) \left\{ (-1)^j a \mathbf{e}_2 + c \mathbf{e}_1 + b \Gamma_3(\psi) \left[\boldsymbol{\eta}_1 + \sum_{i=1}^3 V_i \boldsymbol{\eta}_i \right] \right\} \quad (1.9)$$

$$\psi \in I_j, \quad I_j = [(-1)^{j+1}\psi_j, (-1)^{j+1}\psi_{3-j}], \quad j = 1, 2, \quad \Gamma_1(\kappa) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \kappa & -\sin \kappa \\ 0 & \sin \kappa & \cos \kappa \end{vmatrix}$$

где $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ – орты тороидальной системы координат, a, b, c – постоянные величины (фиг. 1, 2). Углы поворота β, κ системы координат связанной с диском и угол β_0 в соотношениях (1.1) таковы, что величины $\beta - \beta_0, \kappa$ малы, поскольку они определяют смещение бандажа шины относительно диска за счет деформаций боковых поверхностей шины. Будем считать, что боковые поверхности шины представляются мембраной состоящей из несжимаемой резины (модель Муни – Ривлина [2]), армированной нерастяжимыми стальными нитями, соответствующими изменению угла ψ , т.е.

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}_j}{b \partial \psi} \right| = 1 \Rightarrow 2(V_1^* + V_1) + (V_2^* + V_1)^2 + (V_1^* - V_2)^2 + V_3^{*2} = 0, \quad (\cdot)^* = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \psi}$$

С точностью до членов первого порядка малости относительно компонент вектора \mathbf{V} и их производных последнее равенство представляется в форме

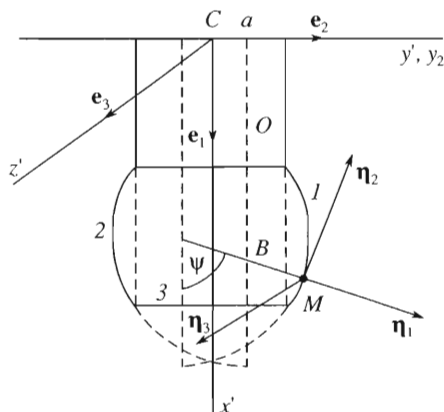
$$V_2^* + V_1 = 0 \quad (1.10)$$

Края боковой поверхности шины сочленяются с диском шины и с краями бандажа, откуда следуют равенства

$$\mathbf{V}(\varphi, (-1)^{j+1}\psi_2, t) = 0, \quad \mathbf{R}_3(\varphi, (-1)^{j+1}, t) = \mathbf{R}_j(\varphi, (-1)^{j+1}\psi_1, t), \quad j = 1, 2 \quad (1.11)$$

Последние два равенства при учете соотношений (1.1) и (1.8) имеют вид

$$r\Gamma_3(\beta_0)\Gamma_2(\vartheta)\{(1+u)\mathbf{e}_1 + [(-1)^{j+1}lr^{-1} + w]\mathbf{e}_2 - v\mathbf{e}_3\} = \Gamma_3(\beta)\Gamma_1(\kappa)\Gamma_2(\vartheta) \left[(-1)^j a \mathbf{e}_2 + c \mathbf{e}_1 + b \Gamma_3((-1)^{j+1}\psi_1) \left(\boldsymbol{\eta}_1 + \sum_{i=1}^3 V_i \boldsymbol{\eta}_i \right) \right] \quad (1.12)$$



Фиг. 2

В недеформированном состоянии края бандажа и боковых поверхностей шины совпадают и справедливо равенство

$$r\mathbf{e}_1 + (-1)^{j+1}l\mathbf{e}_2 = (-1)^j a\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_1 + b\Gamma_3((-1)^{j+1}\psi_1)\boldsymbol{\eta}_1$$

с учетом которого из соотношения (1.12) получим равенства

$$bV_1(\varphi, (-1)^{j+1}\psi_1, t) = (-1)^{j+1}r[w - (1+u)(\Delta\beta\cos\vartheta + \kappa\sin\vartheta) + v(\Delta\beta\sin\vartheta - \kappa\cos\vartheta)] - \frac{l}{2}[(\Delta\beta)^2 + \kappa^2]$$

$$bV_2(\varphi, (-1)^{j+1}\psi_1, t) = (-1)^j r\left[u - \frac{1}{2}(\Delta\beta\cos\vartheta + \kappa\sin\vartheta)^2\right] + \tag{1.13}$$

$$+ [(-1)^j r w - l](\Delta\beta\cos\vartheta + \kappa\sin\vartheta), \quad j = 1, 2$$

$$bV_3(\varphi, (-1)^{j+1}\psi_1, t) = (-1)^{j+1}l(\Delta\beta\sin\vartheta - \kappa\cos\vartheta) - rv, \quad \Delta\beta = \beta - \beta_0$$

При выводе равенств (1.13) учитывались конструктивные особенности шины, когда угол ψ_1 близок к $\pi/2$, и соответственно было принято $\cos\psi_1 \approx 0$, $\sin\psi_1 \approx 1$. В равенствах (1.13) сохранены члены второго порядка малости в первом и втором соотношениях, а третье соотношение содержит только линейные члены относительно малых величин $u, v, w, \Delta\beta, \kappa$. Учет членов второго порядка малости потребуется при вычислении работы давления на возможных перемещениях.

Потенциальная энергия растяжения резины в модели Муни – Ривлина представляется функционалом

$$E[\mathbf{V}] = b^2 \int_0^{2\pi} \int_{I_1 \cup I_2} [k_1(I_c - 3) + k_2(II_c - 3)] \left(\frac{c}{b} + \cos\psi\right) d\varphi d\psi, \quad III_c = 1 \tag{1.14}$$

где k_1, k_2 – постоянные положительные коэффициенты, I_c, II_c, III_c – инварианты тензора конечных деформаций Коши – Грина [2]. В случае двумерной сплошной среды тензор Коши-Грина S_2 определяется из соотношений

$$d\mathbf{R}_j^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi^2 + 2\frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \psi} d\varphi d\psi + b^2 d\psi^2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{B} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} (c + b \cos \psi) d\varphi \\ b d\psi \end{vmatrix}$$

Главные удлинения λ_1, λ_2 в этом случае удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = c_{11} + 1, \quad \lambda_1^2 \lambda_2^2 = c_{11} - c_{12}^2$$

После вычислений найдем

$$c_{11} = 1 + Y_1 + Y_2, \quad Y_1 = -\frac{2b}{c + b \cos \psi} [V_3' + V_2 \sin \psi - V_1 \cos \psi]$$

$$c_{12} = (V_2' - V_3 \sin \psi) \frac{b}{c + b \cos \psi} - V_3'$$

Y_2 – малая величина второго порядка относительно компонент вектора \mathbf{V} и их производных. В трехмерном случае тензор Коши – Грина равен $\mathbf{C} = (\partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{r})^T (\partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{r})$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$, а его инварианты связаны с главными удлинениями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соотношениями

$$I_c = \sum_{k=1}^3 \lambda_k^2, \quad II_c = \sum_{i < j} \lambda_i^2 \lambda_j^2, \quad III_c = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

В модели несжимаемой резины Муни – Ривлина

$$I_c = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad II_c = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad III_c = 1$$

Таким образом, функционал потенциальной энергии деформаций (1.14) примет вид

$$E[\mathbf{V}] = \int_0^{2\pi} \int_{I_1 \cup I_2} \frac{(k_1 + k_2) b^3}{c + b \cos \psi} \left[4(V_3' - V_1 \cos \psi + V_2 \sin \psi)^2 + \left(V_2' - V_3 \sin \psi - \left(\frac{c}{b} + \cos \psi \right) V_3' \right)^2 \right] d\varphi d\psi$$

В области I_1 угол ψ близок к $\pi/2$, а в области I_2 – к $-\pi/2$, и соответственно, $\cos \psi \approx 0$, а $\sin \psi \approx 1$ в I_1 и $\sin \psi \approx -1$ в I_2 . Эти приближения будут использованы при вычислении потенциальной энергии деформаций резины и работы давления на возможных перемещениях. В результате функционал потенциальной энергии деформаций боковых поверхностей шины представляется выражением

$$E[\mathbf{V}] = \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{I_j} k \left[4(V_3' - (-1)^j V_2)^2 + \left(V_2' + (-1)^j V_3 - \frac{c}{b} V_3' \right)^2 \right] d\varphi d\psi, \quad k = \frac{(k_1 + k_2) b^3}{c} \quad (1.15)$$

При вычислении интегралов в (1.15) следует использовать только линейные члены относительно малых величин в выражениях (1.13), поскольку подынтегральное выражение в (1.15) квадратично относительно малых компонент вектора перемещений.

Найдем работу давления на возможных перемещениях при деформациях боковых поверхностей шины и бандажа. Имеем

$$\delta A = \sum_{k=1}^3 \delta A_k, \quad \delta A_3 = p \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [\mathbf{R}'_3 \times \mathbf{R}_3^\circ] \delta \mathbf{R}_3 d\xi d\varphi \tag{1.16}$$

$$\delta A_k = p \int_{I_k} \int_0^{2\pi} [\mathbf{R}'_k \times \mathbf{R}_k^\circ] \delta \mathbf{R}_k d\psi d\varphi, \quad k = 1, 2$$

Здесь p – давление в шине, которое, как было показано ранее [8], можно считать постоянным при подсчете его работы в (1.16) с точностью до членов второго порядка малости включительно. Для бандажа из выражений (1.16) получим

$$\delta A_3 = plr^2 \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [\delta U_1 - r l^{-1} U_1^\circ \delta U_2 + (U_1' + U_3) \delta U_3] d\xi d\varphi$$

и далее с учетом соотношений (1.4) и (1.5) найдем

$$\delta A_3 = -2plr^2 \int_0^{2\pi} (u' - v) \delta u' d\varphi$$

Согласно соотношениям (1.16) работа давления при деформациях боковых поверхностей шины с точностью до членов второго порядка малости включительно относительно функций V_1, V_2, V_3 и их производных равна

$$\delta A_k = pb^3 \int_{I_k} \int_0^{2\pi} \left[\delta V_1 \left(\frac{c}{b} + \cos \psi - V_3' + V_1 \cos \psi - V_2 \sin \psi \right) - \delta V_2 \left(\frac{c}{b} + \cos \psi \right) (V_1' - V_2) + \right. \\ \left. + \delta V_3 (V_1' + V_3 \cos \psi) \right] d\varphi d\psi, \quad k = 1, 2$$

Функцию $V_3(\varphi, \psi, t)$ представим аналогично указанному ранее [1] с учетом соотношений (1.13) в виде первых двух членов разложения в ряд Тейлора

$$V_3(\varphi, \psi, t) = b^{-1} [(-1)^k r v + l(\Delta \beta \sin \vartheta - \kappa \cos \theta)] (\psi + (-1)^k \psi_2) (\psi_1 - \psi_2)^{-1}, \\ \psi \in I_k, \quad k = 1, 2$$

Учитывая соотношения (1.10), (1.13), представим функции V_1 и V_2 также в виде ограниченных разложений в ряды Тейлора в окрестностях точек $\psi = \pm \psi_2$

$$V_1 = -2(\psi + (-1)^j \psi_2) P_1 + 3(\psi + (-1)^j \psi_2)^2 P_2, \quad V_2 = (\psi + (-1)^j \psi_2)^2 P_1 - (\psi + (-1)^j \psi_2)^3 P_2$$

$$P_1 = -(-1)^j (\psi_1 - \psi_2)^{-1} V_1(\varphi, -(-1)^j \psi_1, t) + 3(\psi_1 - \psi_2)^{-2} V_2(\varphi, -(-1)^j \psi_1, t); \\ j = 1, \quad \psi \in I_1$$

$$P_2 = (\psi_1 - \psi_2)^{-2} V_1(\varphi, -(-1)^j \psi_1, t) - 2(-1)^j (\psi_1 - \psi_2)^{-3} V_2(\varphi, -(-1)^j \psi_1, t); \\ j = 2, \quad \psi \in I_2$$

В результате работа давления и вариация потенциальной энергии при деформациях боковых поверхностей и бандажа шины представляются в виде

$$\begin{aligned} \delta A - \delta E[\mathbf{V}] = & - \int_0^{2\pi} \left[n_0 \delta u + \frac{1}{2} n_{01} \delta u^2 + \frac{1}{2} n_{11} \delta u'^2 + \frac{1}{2} n_{02} \delta v^2 + \frac{1}{2} n_{12} \delta v'^2 + \right. \\ & \left. + m_{12} u' \delta v + m_{21} v' \delta u + m_{02} u \delta v' + m_{20} v \delta u' \right] d\varphi - \frac{r^2}{2} n_{03} \delta w^2 - \frac{1}{2} n_{05} \delta(\kappa^2 + \Delta\beta^2) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Коэффициенты в равенстве (1.17) определяются в результате вычислений определенных интегралов (интегрирование по ψ с учетом четности и нечетности соответствующих функций). Результаты этих вычислений не приводятся в виду их громоздкости. Заметим только, что выражение (1.17) при учете соотношения (1.4) определено отрицательно.

Площадка контакта шины с плоскостью OX_1X_2 представляется прямоугольником ширины $2l$ и длины $r(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))$. В области контакта введем силовое поле, описывающее взаимодействие шины с плоскостью. Поскольку бандаж шины в зоне контакта представляется гибкой плоской пластиной, на которую с внутренней стороны действует давление, естественно считать, что нормальная реакция (компонента по оси OX_3), описывающая взаимодействие шины с плоскостью, равна давлению p . Поле скоростей точек шины в зоне контакта, равно $\dot{\mathbf{R}}_3(\varphi, \xi, t)$ согласно соотношению (1.1), спроектируем на оси системы координат $Ox_1x_2x_3$, полученной поворотом системы координат $OX_1X_2X_3$ на угол β_0 вокруг оси OX_3 . Его проекция на ось Ox_3 равна нулю, а проекции на оси Ox_1 и Ox_2 представляются выражениями

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 = & \dot{X}_1 \cos \beta_0 + \dot{X}_2 \sin \beta_0 - r\dot{\beta}_0(w + lr^{-1}\xi) - \\ & - r\dot{\theta}[(1+u)\sin \vartheta + v\cos \vartheta] + r(\dot{u}\cos \vartheta - \dot{v}\sin \vartheta) \\ \dot{Z}_2 = & -\dot{X}_1 \sin \beta_0 + \dot{X}_2 \cos \beta_0 + r\dot{\beta}_0[(1+u)\cos \vartheta - v\sin \vartheta] + r\dot{w} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Работа сил кулоновского трения, действующих на точки площадки контакта, на возможных перемещениях дается в виде

$$\delta A_f = -fplr \int_{-l}^l \int_{-l}^l [\dot{Z}_1 \delta Z_1 + \dot{Z}_2 \delta Z_2] [\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_2^2]^{-1/2} d\varphi d\xi \quad (1.19)$$

Здесь f – коэффициент трения, а в выражениях $\delta Z_1, \delta Z_2$ скорости заменены на соответствующие вариации.

Представим соотношение (1.19) в форме

$$\begin{aligned} \delta A_f = & -fplr \int_{L_1}^1 \sum_{i=1}^7 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \int_{-1}^1 \dot{Z}(\varphi, \xi, \mathbf{q}, \mathbf{q}) \delta q_i d\xi d\varphi \\ \dot{Z} = & (\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_2^2)^{1/2}, \quad \mathbf{q} = (X_1, X_2, \beta_0, \theta, u, v, w) \end{aligned}$$

и далее

$$\delta A_f = - \int_{L_1}^1 \sum_{i=1}^7 \frac{\partial W(\varphi, \mathbf{q}, \mathbf{q})}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i d\varphi \quad (1.20)$$

$$W(\varphi, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \int_{-1}^1 fplr \dot{Z}(\varphi, \xi, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) d\xi = \frac{pfr}{\dot{\beta}_0} \left\{ \dot{Z}_1(1)\dot{Z}(1) - \dot{Z}_1(-1)\dot{Z}(-1) + \dot{Z}_2^2 \ln \frac{\dot{Z}_1(1) + \dot{Z}(1)}{\dot{Z}_1(-1) + \dot{Z}(-1)} \right\}$$

$$\dot{Z}_1(\pm 1) = \dot{Z}_1(\varphi, \pm 1, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}), \quad \dot{Z}(\pm 1) = \dot{Z}(\varphi, \pm 1, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$$

Соотношение (1.20) справедливо при $\dot{\beta}_0 \neq 0$. В противном случае функция W не существует, поскольку выражение в фигурных скобках и $\dot{\beta}_0$ в знаменателе дроби обращаются в нуль, и следует принять

$$W(\varphi, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = 2fplr \dot{Z} \Big|_{\dot{\beta}_0=0} \tag{1.21}$$

В этом случае площадка контакта совершает поступательное движение.

2. Уравнения движения. Кинетическая энергия колеса дается выражением

$$2T = m_d \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i^2 + J_{1d}(\dot{\kappa}^2 + \dot{\beta}^2 \cos^2 \kappa) + J_{2d}(\dot{\theta} + \dot{\beta} \sin \kappa)^2 + \rho r \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^3 \dot{Z}_i^2 d\varphi \tag{2.1}$$

где m_d, J_{1d}, J_{2d} – масса и моменты инерции диска относительно осей Cy_1, Cy_2 соответственно. Кинетическая энергия бандажа и боковых поверхностей шины в выражении (2.1) представлена последним членом в предположении, что вся масса шины равномерно распределена по срединной линии. Величины \dot{Z}_1, \dot{Z}_2 определены в (1.18), а

$$\dot{Z}_3 = \dot{X}_3 - r\dot{\theta}[(1+u)\cos\vartheta - v\sin\vartheta] - r(\dot{u}\sin\vartheta + \dot{v}\cos\vartheta) \tag{2.2}$$

Уравнения движения и условия на границе заранее неизвестной зоны контакта получим из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского. Для этого найдем выражения работы внешних сил и моментов, приложенных к диску колеса (фиг. 1), на возможных перемещениях, а именно,

$$\delta A_F = F(\beta)\delta X_1 + F(\beta - \pi/2)\delta X_2 - P\delta X_3 + M_1\delta\kappa + M_2\delta\theta + (M_2\sin\kappa + M_3\cos\kappa)\delta\beta$$

$$F(\beta) = F_1\cos\beta - F_2\sin\beta$$

В качестве связей для точек срединной линии бандажа l_0 примем условие ее нерастяжимости (1.4), представленное в виде

$$2Z_0 = (1 + u + v')^2 + (u' - v)^2 = 1 \tag{2.3}$$

Соответственно, при освобождении от этих связей следует принять во внимание их работу на возможных перемещениях

$$\delta N_0 = \int_0^{2\pi} \lambda(\varphi, t)\delta Z_0 d\varphi$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Представим вариационный принцип Гамильтона – Остроградского в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta T + \delta A_F + \delta A - \delta E + \delta A_f + \delta N_0 + \int_{L_1} \mu_3(\varphi, t)\delta Z_3 d\varphi \right] dt = 0 \tag{2.4}$$

Вариация δZ_3 соответствует голономной связи (1.6) или (2.2), а множитель $\mu_3(\varphi, t)$ представляет нормальную компоненту реакции связей, приведенную к единице длины бандажа в зоне контакта. Соответствующие переменные в равенстве (2.4) 2π -периодичны по переменной φ и область интегрирования $[t_1, t_2] \cup [\varphi_1, \varphi_1 + 2\pi]$ в соотношении (2.4) разбивается кривой $\varphi = \varphi_2(t)$ на две части $[t_1, t_2] \cup L_1$ и $[t_1, t_2] \cup L_2$ ($L_2 = [\varphi_2(t), 2\pi + \varphi_1(t)]$). К каждой из них применим формулу Грина и получим систему уравнений и условия, налагаемые на скачки в граничных точках зоны контакта,

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{x}_1}T - \int_{L_1}\nabla_{x_1}Wd\varphi + F(\beta) &= 0, & -\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{x}_2}T - \int_{L_1}\nabla_{x_2}Wd\varphi + F\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\
-\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{x}_2}T - P + \int_{L_1}\mu_3(\varphi, t)d\varphi &= 0 \\
-\frac{d}{dt}\nabla_{\beta}T + M_2\sin\kappa + M_3\cos\kappa - n_{05}\Delta\beta &= 0 \\
-\frac{d}{dt}\nabla_{\beta_0}T + n_{05}\Delta\beta - \int_{L_1}\nabla_{\beta_0}Wd\varphi = 0, & \quad \nabla_{\kappa}T - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\kappa}}T + M_1 - n_{05}\kappa = 0 \\
\nabla_{\theta}T - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\theta}}T + M_2 - \int_{L_1}\nabla_{\theta}Wd\varphi + \int_{L_1}\mu_3\frac{\partial Z_3}{\partial\theta}d\varphi &= 0 \\
\nabla_wT - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{w}}T - r^2n_{03}w - \int_{L_1}\nabla_wWd\varphi &= 0 \\
\nabla_uT - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{u}}T - n_0 - n_{01}u + n_{11}u'' - (m_{21} - m_{20})v' - \nabla_uW\chi(\varphi) + \\
+ \lambda(1 + u + v) - [\lambda(u' - v)]' - r\mu_3\chi(\varphi)\sin\vartheta &= 0 \\
\nabla_vT - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{v}}T - n_{02}v + n_{12}v'' - (m_{12} - m_{02})u' - \nabla_vW\chi(\varphi) - \\
- [\lambda(1 + u + v)]' - \lambda(u' - v) - r\mu_3\chi(\varphi)\cos\vartheta &= 0 \\
\rho r^3[\dot{u}]_k\phi_k + [n_{11}u' - \lambda(u' - v)]_k &= 0, \quad k = 1, 2 \\
\rho r^3[\dot{v}]_k\phi_k + [n_{12}v' - \lambda(1 + u + v)]_k &= 0, \quad k = 1, 2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $[f(\vartheta)]_k = f(\vartheta_k + 0) - f(\vartheta_k - 0)$, $\vartheta_k = \theta + \varphi_k$ – скачок функции в концевой точке зоны контакта. Функция $\chi(\varphi)$ принимает значение единица, если $\varphi \in L_1$, и нуль, если $\varphi \in L_2$. В последнем условии, связывающем скачки в (2.5), функция

$$v' \equiv -u \quad \text{и} \quad \dot{v} \equiv -\int_0^{\varphi} u d\varphi + \dot{v}(t, 0)$$

с точностью до малых первого порядка. Тогда $[v']_k = [\dot{v}]_k = 0$ и $[\lambda]_k = 0$, т.е. натяжение срединной линии бандажа не претерпевает скачков в граничных точках зоны контакта. Предпоследнее условие, связывающее скачки в (2.5), представим в виде

$$pr^3 \dot{\phi}_k [\dot{u}'_k] + (n_{11} - \lambda) [u']_k = 0, \quad k = 1, 2 \tag{2.6}$$

Оставшиеся 10 уравнений в (2.5) вместе с двумя условиями, налагаемыми на скачки (2.6), и голономными связями (1.6), (2.3), образуют замкнутую систему из 14 уравнений относительно 14 неизвестных: $X_1, X_2, X_3, \beta_0, \beta, \kappa, \theta, w, u, v, \varphi_1, \varphi_2, \lambda, \mu_3$.

3. Движение заблокированного колеса. Рассмотрим два простейших режима скольжения заблокированного колеса. Предположим, что площадка контакта колеса с плоскостью OX_1X_2 движется поступательно с постоянной скоростью, а именно, $\dot{X}_1 = V \cos \gamma, \dot{X}_2 = V \sin \gamma, X_3, \beta, \beta_0, \kappa, \theta, w, u(\varphi), v(\varphi), \varphi_1, \varphi_2, \lambda(\varphi), \mu_3(\varphi)$ – постоянные величины. Уравнения (2.5) в рассматриваемом случае становятся по сути условиями равновесия механической системы относительно системы координат, связанной с диском колеса и движущейся поступательно с постоянной скоростью. Эти условия получим из условий (2.5), подставив в них функции, соответствующие стационарному режиму. Заметим, что

$$\nabla_{\dot{q}_i} W = 2fplr \frac{\partial \dot{Z}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{2fplr}{V} \left[(\dot{X}_1 \cos \beta_0 + \dot{X}_2 \sin \beta_0) \frac{\partial \dot{Z}_1}{\partial \dot{q}_i} + (-\dot{X}_1 \sin \beta_0 + \dot{X}_2 \cos \beta_0) \frac{\partial \dot{Z}_2}{\partial \dot{q}_i} \right]$$

В результате получим систему уравнений

$$-2fplrV^{-1} \dot{X}_1(\varphi_2 - \varphi_1) + F_1 \cos \beta - F_2 \sin \beta = 0$$

$$-2fplrV^{-1} \dot{X}_2(\varphi_2 - \varphi_1) + F_1 \sin \beta + F_2 \cos \beta = 0$$

$$P = \int_{L_1} \mu_3(\varphi) d\varphi, \quad M_2 \sin \kappa + M_3 \cos \kappa = n_{05} \Delta \beta = 0, \quad M_1 = n_{05} \kappa$$

$$M_2 + 2fplrV^{-1} X_3 (\dot{X}_1 \cos \beta_0 + \dot{X}_2 \sin \beta_0) (\varphi_2 - \varphi_1) - \int_{L_1} \mu_3 r \cos \vartheta d\varphi = 0 \tag{3.1}$$

$$n_{03} w + 2fplrV^{-1} (-\dot{X}_1 \sin \beta_0 + \dot{X}_2 \cos \beta_0) (\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

$$N_1(u, v) - 2fplr^2 V^{-1} (\dot{X}_1 \cos \beta_0 + \dot{X}_2 \sin \beta_0) \chi(\varphi) \cos \vartheta + M_+(u, v) - r\mu_3 \chi(\varphi) \sin \vartheta = 0$$

$$N_2(u, v) + 2fplr^2 V^{-1} (\dot{X}_1 \cos \beta_0 + \dot{X}_2 \sin \beta_0) \chi(\varphi) \sin \vartheta - M_-(u, v) - r\mu_3 \chi(\varphi) \cos \vartheta = 0$$

$$(n_{11} - \lambda) [u']_k = 0, \quad k = 1, 2$$

Здесь

$$N_1(u, v) = -n_0 - n_{01}u + n_{11}u'' - (m_{21} - m_{20})v', \quad M_+(u, v) = \lambda(1 + u + v) - [\lambda(u' - v)']$$

$$N_2(u, v) = -n_{02}v + n_{12}v'' - (m_{12} - m_{02})u', \quad M_-(u, v) = [\lambda(1 + u + v)]' + \lambda(u' - v)$$

Из соотношений (3.1) следует, что угол $\beta = \beta_0$. Без ограничения общности примем $\beta = 0$. Тогда первые два соотношения системы (3.1) представятся в виде

$$F_1 = 2fplr(\varphi_2 - \varphi_1) \cos \gamma, \quad F_2 = 2fplr(\varphi_2 - \varphi_1) \sin \gamma$$

Далее

$$M_1 = n_{05}K, \quad M_3 = -M_2 \operatorname{tg} \kappa, \quad w = -2fpl \sin \gamma n_{03}^{-1} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Уравнения, определяющие компоненты вектора перемещений точек бандажа $u(\varphi)$ и $v(\varphi)$, в области контакта и вне ее принимают вид:

при $\varphi \in L_1$

$$N_1(u, v) + 2fplr^2 \cos \gamma \sin \varphi + M_+(u, v) - r\mu_3 \cos \varphi = 0 \quad (3.2)$$

$$N_2(u, v) + 2fplr^2 \cos \gamma \cos \varphi - M_-(u, v) + r\mu_3 \sin \varphi = 0$$

при $\varphi \in L_2$

$$N_1(u, v) + M_+(u, v) = 0, \quad N_2(u, v) - M_-(u, v) = 0 \quad (3.3)$$

В уравнениях (3.2) угол θ в стационарном режиме принят равным $\pi/2$. В уравнениях (3.3) положим $\lambda = n_0 + \lambda_1$, где λ_1 – малая величина, и линеаризуем полученную систему. Имеем

$$-n_{01}u + n_{11}u'' - (m_{21} - m_{20})v' + \lambda_1' - n_0(u' - v)' = 0 \quad (3.4)$$

$$-n_{02}v + n_{12}v'' - (m_{12} - m_{02})u' - \lambda_1' - n_0(u' - v) = 0, \quad u + v' = 0$$

Последнее уравнение в системе (3.4) есть линеаризованное условие нерастяжимости средней линии бандажа шины (2.3).

Исключим из уравнений (3.4) неизвестные u , λ_1 и получим уравнение

$$a_0 v^{(4)} + a_1 v'' + a_2 v = 0$$

$$a_0 = n_{11} - n_0 > 0, \quad a_1 = m_{21} + m_{02} - m_{20} - m_{12} - n_{01} - 2n_0 - n_{12}, \quad a_2 = n_{02} - n_0 > 0$$

общее решение которого на отрезке $L_2 = [\varphi_2, 2\pi + \varphi_1]$ имеет вид (всюду далее суммирование ведется от $k = 1$ до $k = 4$)

$$v_2(\varphi) = \sum_v(\varphi), \quad \sum_v(\varphi) = \sum C_k \exp(p_k \varphi), \quad p_{1, \dots, 4} = \pm \sqrt{\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}} \quad (3.5)$$

где C_1, \dots, C_4 – произвольные постоянные. Функция $u_2(\varphi)$ на отрезке L_2 равна

$$u_2(\varphi) = -v_2'(\varphi) = -\sum_u(\varphi), \quad \sum_u(\varphi) = \sum C_k p_k \exp(p_k \varphi) \quad (3.6)$$

В области контакта $L_1 = [\varphi_1, \varphi_2]$ функции $u_1(\varphi)$, $v_1(\varphi)$ определяются соотношениями (1.7), которые при учете равенства $\vartheta = \pi/2 + \varphi$ запишем в виде

$$u_1 = -\varphi \sin \varphi + X_3 r^{-1} \cos \varphi - 1, \quad v_1 = -\varphi \cos \varphi - X_3 r^{-1} \sin \varphi \quad (3.7)$$

Поскольку в области контакта угол φ мал, линеаризация соотношений (3.7) приводит к равенствам

$$u_1 = X_3 r^{-1} - 1, \quad v_1 = -\varphi(X_3 r^{-1} + 1) \quad (3.8)$$

Условия, связывающие скачки в граничных точках зоны контакта, имеют вид

$$u_1(\varphi_1) = u_2(2\pi + \varphi_1), \quad u_1(\varphi_2) = u_2(\varphi_2), \quad v_1(\varphi_1) = v_2(2\pi + \varphi_1), \quad v_1(\varphi_2) = v_2(\varphi_2)$$

и представляются при учете соотношений (3.5), (3.6), (3.8) в форме

$$\begin{aligned} X_3 r^{-1} - 1 &= -\sum_u (\varphi_2) \approx -\sum C_k p_k, & X_3 r^{-1} - 1 &= -\sum_u (2\pi + \varphi_1) \approx -\sum_u (2\pi) \\ -\varphi_2 (X_3 r^{-1} + 1) &= \sum_v (\varphi_2) \approx \sum C_k, & -\varphi_1 (X_3 r^{-1} + 1) &= \sum_v (2\pi + \varphi_1) \approx \sum_v (2\pi) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из уравнений (3.9) определим коэффициенты C_1, \dots, C_4 и, затем, функции $v_2(\varphi), u_2(\varphi)$ в виде

$$\begin{aligned} u_2(\varphi) &= \sum D_k \exp(p_k \varphi), & u_2(\varphi) &= -\sum D_k p_k \exp(p_k \varphi) \\ D_k &= d_{1k} \varphi_1 + d_{2k} \varphi_2 + d_{3k} (1 - X_3 r^{-1}) \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов d_{sk} ($s = 1, 2, 3; k = 1, \dots, 4$) не приводятся ввиду их громоздкости. Заметим только, что в левых частях уравнений (3.9) коэффициент $1 + X_3 r^{-1} \approx 2$. Из первого соотношения (3.4) найдем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= v'''(n_{11} - n_0) + v'(m_{21} - m_{20} - n_0 - n_{01}) = \\ &= \sum D_k p_k \exp(p_k \varphi) [(n_{11} - n_0) p_k^2 + (m_{21} - m_{20} - n_0 - n_{01})] \end{aligned}$$

Таким образом находится множитель Лагранжа $\lambda = n_0 + \lambda_1$, величина которого определяет натяжение срединной линии бандажа вне зоны контакта. Множители Лагранжа λ и μ_3 в зоне контакта колеса с плоскостью определяются из первых двух уравнений системы (3.2) при учете выражений (3.7) в виде

$$\begin{aligned} \lambda' &= -2fplr^2 \cos \gamma + [n_0 + 3n_{11} - 2(m_{21} - m_{20}) - 2n_{02} - 4n_{12} - 3(m_{12} - m_{02})] \varphi \\ r\mu_3 &= -n_0 - 3n_{11} + 2(m_{21} - m_{20}) + n_{01} (1 - X_3 r^{-1}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

В выражениях (3.10) сохранены члены нулевого и первого порядка малости после вычисления производных функций, представленных в (3.7). Множитель μ_3 , согласно (3.10), оказывается постоянным с точностью до членов порядка малости два, а натяжение бандажа в зоне контакта меняется по линейному закону. Силу P и момент M_2 , действующие на диск колеса, определим из системы (3.1) с точностью до малых первого порядка в виде

$$\begin{aligned} P &= r^{-1} [-n_0 - 3n_{11} + 2(m_{21} - m_{20})] (\varphi_2 - \varphi_1) \\ M_2 &= -rP (\varphi_2 + \varphi_1) / 2 - 2fplr X_3 \cos \gamma (\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Найденные соотношения позволяют определить все характеристики стационарного режима скольжения колеса с шиной, а именно, связи между силами, моментами, функциями, описывающими деформацию шины, и обобщенными координатами, характеризующими поступательное движение диска колеса.

Второе стационарное движение заблокированного колеса со скольжением определяется как верчение с постоянной угловой скоростью вокруг оси CX_3 , когда

$$X_1 = X_2 = 0, \quad X_3 = \text{const}$$

$$\dot{\beta}_0 = \dot{\beta} = \omega = \text{const}, \quad \kappa = \text{const}, \quad w = 0, \quad \theta = \pi/2, \quad \varphi_1 = -\varphi_2 = \text{const}, \quad \lambda(\varphi), \mu_3(\varphi)$$

В этом случае стационарного движения работа сил сухого трения на возможных перемещениях представляется в виде

$$\delta A_f = -fplr \int_{-\varphi_2-1}^{\varphi_2-1} \int [\mathbf{e}_3 \times (-r\varphi \mathbf{e}_1 + l\xi \mathbf{e}_2)] \frac{\delta Z_1 \mathbf{e}_1 + \delta Z_2 \mathbf{e}_2}{\sqrt{l^2 \xi^2 + r^2 \varphi^2}} d\varphi d\xi \text{sign } \dot{\beta}_0$$

$$\delta Z_1 = \delta X_1 \cos \beta_0 + \delta X_2 \sin \beta_0 - \delta \beta_0 l \xi - X_3 \delta \theta - \delta u r \sin \varphi - \delta v r \cos \varphi$$

$$\delta Z_2 = -\delta X_1 \sin \beta_0 + \delta X_2 \cos \beta_0 - \delta \beta_0 r \varphi + \delta w r$$

и далее

$$\delta A_f = -f p l r \int_{-\varphi_2-1}^{\varphi_2-1} \int \sqrt{l^2 \xi^2 + r^2 \varphi^2} d\varphi d\xi \delta \beta_0 \operatorname{sign} \dot{\beta}_0 \approx -2 f p l r \varphi_2 \sqrt{l^2 + r^2 \varphi_2^2} \delta \beta_0 \operatorname{sign} \dot{\beta}_0 \quad (3.11)$$

Интеграл в (3.11) равен сумме четырех интегралов, которые вычислены приближенно путем замены подынтегрального выражения на $\sqrt{l^2 + r^2 \varphi_2^2}/2$. Фактически эта замена означает, что поле сил трения в зоне контакта заменено на четыре силы трения, приложенные в точках с координатами $\xi = \pm 1/2$, $\varphi = \pm \varphi_2/2$.

Система уравнений (2.5) трансформируется в систему

$$\begin{aligned} F(\beta) = 0, \quad F\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad P = \int_{L_1} \mu_3(\varphi) d\varphi, \quad r^2 n_{03} w = 0 \\ M_2 \sin \kappa + M_3 \cos \kappa - n_{05} \Delta \beta = 0, \quad n_{05} \Delta \beta - 2 f p l r \varphi_2 \sqrt{l^2 + r^2 \varphi_2^2} \operatorname{sign} \dot{\beta}_0 = 0 \\ (J_{2d} - J_{1d}) \omega^2 \cos \kappa \sin \kappa + M_1 - n_{05} \kappa = 0, \quad M_2 - \int_{L_1} \mu_3 r \varphi d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \rho r^3 \omega^2 [(1+u) \sin^2 \varphi + v \sin \varphi \cos \varphi] - n_0 - n_{01} u + n_{11} u'' - (m_{21} - m_{20}) v' + \\ + \lambda(1+u+v) - [\lambda(u'-v)]' - r \mu_3 \chi(\varphi) \cos \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho r^3 \omega^2 [(1+u) \sin \varphi \cos \varphi + v \cos^2 \varphi] - n_{02} v + n_{12} v'' - (m_{12} - m_{02}) u' - \\ - [\lambda(1+u+v)]' - \lambda(u'-v) + r \mu_3 \chi(\varphi) \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

Из уравнений (3.12) определяются связи между параметрами движения, а также силы и моменты, необходимые для реализации верчения:

$$F_1 = F_2 = 0, \quad M_1 = n_{05} \kappa + (J_{1d} - J_{2d}) \omega^2 \sin \kappa \cos \kappa, \quad M_2 = 0$$

$$M_3 \cos \kappa = n_{05} \Delta \beta, \quad w = 0, \quad \Delta \beta = 2 f p l r n_{05}^{-1} \varphi_2 \sqrt{l^2 + r^2 \varphi_2^2} \operatorname{sign} \dot{\beta}_0$$

Далее заметим, что функции $\mu_3(\varphi)$, $\lambda(\varphi)$, $u(\varphi)$ – четные, а функция $v(\varphi)$ – нечетная. Из формул (1.7) в зоне контакта L_1 следуют приближенные равенства $u \cong r^{-1} X_3 - 1$, $u' \cong -3\varphi$, $u'' \cong -3$, $v \cong -2\varphi$, $v' \cong -2$, $v'' \cong 4\varphi$, используя которые найдем из последних двух уравнений системы (3.12)

$$r \mu_3 = -n_0 + n_{01} (1 - r^{-1} X_3) + 2(m_{21} - m_{20}) - 3n_{11}$$

$$\lambda' = [\rho r^3 \omega^2 - 2n_{02} - 4n_{12} - 3(m_{12} - m_{02}) + n_0 + 3n_{11} - 2(m_{21} - m_{20})] \varphi$$

С принятой выше точностью определим зависимость между величиной зоны контакта и вертикальной силой

$$P = 2\varphi_2\mu_3 = 2\varphi_2r^{-1}[-n_0 + 2(m_{21} - m_{20}) - 3n_{11}]$$

Для определения формы деформированного бандажа необходимо найти решение двух последних уравнений системы (3.12), учитывая условия, налагаемые на скачки в граничных точках зоны контакта $[\lambda]_k = 0$, $[v']_k = [u']_k = 0$. Решение этой задачи во многом аналогично решению задачи определения формы бандажа в режиме поступательного движения колеса с постоянной скоростью. Если в этих уравнениях положить $u = v = 0$ в членах, содержащих центробежные силы инерции (члены с ω^2), и принять $\lambda = n_0 - \rho r^3 \omega^2 + \lambda_1$, то после исключения u и λ_1 из полученной системы линейных уравнений выводим уравнение

$$b_0 v^{(4)} + b_1 v'' + b_2 v = \frac{3}{2} \rho r^3 \omega^2 \sin 2\varphi \tag{3.13}$$

$$b_0 = n_{11} - n_0 + \rho r^3 \omega^2$$

$$b_1 = m_{21} + m_{02} - m_{20} - m_{12} - n_{01} - n_{12} - 2n_0 + 2\rho r^3 \omega^2$$

$$b_2 = n_{02} - n_0 + \rho r^3 \omega^2$$

Частное решение уравнения (3.13) найдем в виде

$$v_p = \frac{3}{2} \rho r^3 \omega^2 (16b_0 - 4b_1 + b_2)^{-1} \sin 2\varphi$$

а общее решение однородного уравнения (3.13) v_g имеет вид (3.5) с модифицированными коэффициентами \tilde{p}_k и симметричными граничными условиями, когда $\varphi_1 = -\varphi_2$.

Соответственно, модифицированные коэффициенты $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_4$ определяются из системы уравнений типа (3.9)

$$1 - X_3 r^{-1} - 3\rho r^3 \omega^2 (16b_0 - 4b_1 + b_2)^{-1} \approx \sum \tilde{C}_k \tilde{p}_k \approx \sum \tilde{C}_k \tilde{p}_k \exp(2\pi \tilde{p}_k)$$

$$-\varphi_2 [2 + 3\rho r^3 \omega^2 (16b_0 - 4b_1 + b_2)^{-1}] \approx \sum \tilde{C}_k \approx -\sum \tilde{C}_k \exp(2\pi \tilde{p}_k)$$

в форме

$$\tilde{C}_k = e_{1k} \varphi_2 + e_{2k} [1 - X_3 r^{-1} - 3\rho r^3 \omega^2 (16b_0 - 4b_1 + b_2)^{-1}], \quad k = 1, \dots, 4$$

при условии, что

$$3\rho r^3 \omega^2 (16b_0 - 4b_1 + b_2)^{-1} \ll 2$$

Выражения для коэффициентов e_{sk} ($s = 1, 2; k = 1, \dots, 4$) не приводятся ввиду их громоздкости. Форма деформированного бандажа вне зоны контакта симметрична относительно плоскости Cy_1y_2 и описывается функциями

$$u_2(\varphi) = -v_2'(\varphi), \quad v_2(\varphi) = 3\rho r^3 \omega^2 (16b_0 - 4b_1 + b_2)^{-1} \sin \varphi \cos \varphi + \sum \tilde{C}_k \exp(\tilde{p}_k \varphi)$$

Поправка $\lambda_1(\varphi)$ к натяжению бандажа вне зоны контакта находится из предпоследнего уравнения системы (3.12) с учетом найденных выше функций $u_2(\varphi)$, $v_2(\varphi)$.

Тем самым завершается определение всех характеристик стационарного верчения и необходимые для его реализации силы и моменты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильке В.Г., Кожевников И.Ф. Качение колеса с армированной шиной по плоскости без проскальзывания // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 6. С. 944–957.
2. Oden J.T. Finite Elements in Nonlinear Continua. N.Y., etc.: McGraw-Hill, 1972 = Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир. 1976. 464 с.
3. Вильке В.Г. Условия качения колеса с армированной шиной без проскальзывания // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2002. Вып. 5. С. 38–42.
4. Ишлинский А.Ю. Механика. Идеи, задачи, приложения. М.: Наука. 1985. 623 с.
5. Duvaut G., Lions J.L. Les inéquations en mécanique et en physique. Paris: Dunod. 1972. = Г. Дюво, Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
6. Kalker J.J. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Dordrecht, etc.: Kluwer, 1990. 314 p.
7. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
8. Вильке В.Г., Дворников М.В. Качение колеса с пневматиком по плоскости // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 393–404.

Москва
e-mail: vano1979@online.ru

Поступила в редакцию
25.XII.2003