УДК 531.36

© 2004 г. Ю. П. Бычков

О КАТАНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ

При помощи методов, изложенных ранее [1–3], рассматривается в общей постановке задача о движении материальной системы, состоящей из несущего твердого тела, ограниченного поверхностью и катящегося по другой движущейся поверхности, и совокупности носимых материальных точек, положение которых относительно этого тела может быть задано конечным числом обобщенных координат.

1. Кинематические свойства движения. Изучение рассматриваемой материальной системы начнем с описания обозначений и рассмотрения кинематических свойств. Введем системы прямоугольных координат $Oxyz$ ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – единичные векторы осей), $O_cx^cy^cz^c$ ($\mathbf{i}_1^c$, $\mathbf{i}_2^c$, $\mathbf{i}_3^c$ – единичные векторы осей), неизменно связанные соответственно с несущим твердым телом и с поверхностью-основанием (все системы координат – левые). Это позволяет определять положение несущего тела относительно поверхности-основания S^c координатами x_0^c, y_0^c, z_0^c точки O в осях $O_cx^cy^cz^c$ и углами Эйлера φ, ψ, θ (чистое вращение, прецессия, нутация) между введенными осями, а положение системы носимых материальных точек M_i относительно несущего тела (относительно осей $Oxyz$) – некоторыми обобщенными координатами $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$. Проекции вектора скорости V_0 точки O и вектора угловой скорости несущего тела ω на оси $Oxyz$ обозначим через k, l, m и p, q, r. Условимся, что нижний индекс радиус-вектора, имеющего начало в точке O_a, O_c, O, C_r, и его проекций на оси $O_ax^ay^az^a$, $O_cx^cy^cz^c$, $Oxyz$, $C_rx^ry^rz^r$ соответственно – символ конца радиус-вектора, а верхний – символ его начала O_a, O_c, O, C_r (символ системы координат $O_ax^ay^az^a$, $O_cx^cy^cz^c$, $Oxyz$, $C_rx^ry^rz^r$).

Положим еще, что r_i^c, r_0^c – радиусы-векторы, фиксирующие положение точек M_i, O в осях $O_cx^cy^cz^c$, а r_i, r_C – радиусы-векторы, фиксирующие положение точек M_iC (центр инерции системы) в осях $Oxyz$; отсюда получаем

$$\mathbf{r}_i^c = \mathbf{r}_0^c(x_0^c y_0^c z_0^c) + \mathbf{r}_i(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$$

Теперь предположим[1], что поверхность-основание S^c движется, причем ее движение (движение неизменно связанной с ней системы координат $O_cx^cy^cz^c$) по отношению к неподвижной системе координат $O_ax^ay^az^a$ ($\mathbf{i}_1^a$, $\mathbf{i}_2^a$, $\mathbf{i}_3^a$ – ортонормированные векторы осей) известно, т.е. заданы как функции времени радиус-вектор $\mathbf{r}_{O_c}^a = \mathbf{i}_1^a x_{O_c}^a +$

[1] Более полное изложение дано в препринтах автора: *Бычков Ю.П.* О катании твердого тела по движущейся поверхности. Препринт. М.: РАН. 1995; *Бычков Ю.П.* К задаче о катании твердого тела по движущейся поверхности. Препринт. М.: Институт механики МГУ. 1998; Бычков Ю.П. О катании шара по движущейся плоскости. Препринт. М.: Изд-во МГУ, 2001.

$+ \mathbf{i}_2^a y_{O_c}^a + \mathbf{i}_3^a z_{O_c}^a$ точки O_c с началом в точке O_a и параметры (обобщенные координаты), определяющие ориентацию осей $O_c x^c y^c z^c$ относительно осей $O_a x^a y^a z^a$ (например, углы Эйлера φ_c, ψ_c, θ_c).

Далее, вводя для точек поверхности S, ограничивающей несущее тело, радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ с началом в точке O и гауссовы координаты q^1, q^2, будем задавать ее уравнение в виде

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(q^1, q^2) \ (\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3),$$

а коэффициенты первых двух квадратичных форм обозначать a_{11}, a_{22}, b_{11}, b_{22} (для простоты полагаем, что координатные линии поверхности являются линиями кривизны). В точке касания M к поверхности S присоединим подвижный репер Mq^1q^2n с единичными векторами, направленными по касательным к координатным линиям и нормали

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\boldsymbol{\rho}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\rho_2, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}(\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2) \quad \left(\boldsymbol{\rho}_\alpha = \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\boldsymbol{\rho}\right)$$

Проекции векторов $\mathbf{r}_C$, $\boldsymbol{\rho}$ на оси этого репера обозначим

$$\xi_C, \eta_C, \varepsilon_C, \xi = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\rho\frac{\partial\rho}{\partial q^1}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\rho\frac{\partial\rho}{\partial q^2}, \quad \varepsilon(\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

Введем еще косинусы углов между осями $O_a x^a y^a z^a$ и $O_c x^c y^c z^c$, между осями $O_c x^c y^c z^c$ и $Mq_c^1 q_c^2 n_c$, а также между осями Mq^1q^2n и $Oxyz$

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_1^c &= l_a^1\mathbf{i}_1^a + m_a^1\mathbf{i}_2^a + n_a^1\mathbf{i}_3^a, \quad & \mathbf{e}_1^c &= \alpha_c\mathbf{i}_1^c + \alpha'_c\mathbf{i}_2^c + \alpha''_c\mathbf{i}_3^c \\
\mathbf{i}_2^c &= l_a^2\mathbf{i}_1^a + m_a^2\mathbf{i}_2^a + n_a^2\mathbf{i}_3^a, \quad & \mathbf{e}_2^c &= \beta_c\mathbf{i}_1^c + \beta'_c\mathbf{i}_2^c + \beta''_c\mathbf{i}_3^c \\
\mathbf{i}_3^c &= l_a^3\mathbf{i}_1^a + m_a^3\mathbf{i}_2^a + n_a^3\mathbf{i}_3^a, \quad & \mathbf{e}_3^c &= \gamma_c\mathbf{i}_1^c + \gamma'_c\mathbf{i}_2^c + \gamma''_c\mathbf{i}_3^c
\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{i}_1 = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{i}_2 = \alpha'\mathbf{e}_1 + \beta'\mathbf{e}_2 + \gamma'\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{i}_3 = \alpha''\mathbf{e}_1 + \beta''\mathbf{e}_2 + \gamma''\mathbf{e}_3$$

Все сказанное здесь для поверхности S, ограничивающей несущее тело, имеет место и для поверхности-основания S^c (соответствующие величины обозначаются теми же буквами, но и с индексом). Далее, следуя Воронцу, будем определять положение несущего тела обобщенными координатами q^1, q^2, q_c^1, q_c^2, ϑ (первые четыре величины – гауссовы координаты точки M, ϑ – угол между осями q^1 и q_c^2 в той же точке), а положение всей системы, следовательно, – обобщенными координатами q^1, q^2, q_c^1, q_c^2, ϑ, α^1, …, α^n.

Проекции K_c, l_c, m_c скорости $\mathbf{v}_{O_c}$ точки O_c на оси $O_c x^c y^c z^c$ будут такими:

$$k_c \equiv \mathbf{i}_1^c \cdot \mathbf{v}_{O_c} = l_a^1\dot{x}_{O_c}^a + m_a^1\dot{y}_{O_c}^a + n_a^1\dot{z}_{O_c}^a \tag{1.2}$$

l_c, m_c получаем из соотношений (1.2) заменой верхнего индекса 1 на 2, 3, а проекции p_c, q_c, r_c вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_c$ поверхности-основания на оси $O_c x^c y^c z^c$ даются известными формулами ([3], формулы (2.9.3), где надо заменить φ, ψ, θ на φ_c, ψ_c, θ_c).

Для проекций скорости $\mathbf{j} = \mathbf{v}_{O_c} + \boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}^c$ точки поверхности основания S^c, совпадающей в данный момент с точкой касания M, на оси $\mathbf{i}_1^c$, $\mathbf{i}_2^c$, $\mathbf{i}_3^c$ и $\mathbf{e}_1^c$, $\mathbf{e}_2^c$, $\mathbf{e}_3^c$ соответственно получаем

$$\begin{aligned} f_1 &= k_c + q_c z^c - r_c y^c, \quad b_1 = \mathbf{e}_1^c \cdot \mathbf{j} = \alpha_c f_1 + a'_c f_2 + \alpha''_c f_3 \\ f_2 &= l_c + r_c x^c - p_c z^c, \quad b_2 = \mathbf{e}_2^c \cdot \mathbf{j} = \beta_c f_1 + \beta'_c f_2 + \beta''_c f_3 \\ f_3 &= m_c + p_c y^c - q_c x^c, \quad b_3 = \mathbf{e}_3^c \cdot \mathbf{j} = \gamma_c f_1 + \gamma'_c f_2 + \gamma''_c f_3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

причем $f_1, f_2, f_3, b_1, b_2, b_3$ – функции t, q_c^1, q_c^2. И, наконец, получаем как функции t, q_c^1, q_c^2, ϑ проекции j_1, j_2, j_3 вектора $\mathbf{j}$ на оси подвижного репера Mq^1q^2n (j_k войдут в уравнения движения)

$$j_1 = \pm b_1 \sin\vartheta + b_2 \cos\vartheta, \quad j_2 = \mp b_1 \cos\vartheta + b_2 \sin\vartheta, \quad j_3 = \pm b_3$$

Здесь использованы формулы

$$\mathbf{e}_1 = \pm \mathbf{e}_1^c \sin\vartheta + \mathbf{e}_2^c \cos\vartheta, \quad \mathbf{e}_2 = \mp \mathbf{e}_1^c \cos\vartheta + \mathbf{e}_2^c \sin\vartheta, \quad \mathbf{e}_3 = \pm \mathbf{e}_3^c \tag{1.4}$$

Выберем в качестве символа производной вектора по времени в осях $O_c x^c y^c z^c$ косой крест над вектором: $\overset{\times c}{\boldsymbol{\rho}}$ (аналогично поступал А.И. Лурье [3], вводя звездочку). Тогда абсолютная скорость точки контакта (см. [3], с. 81, 88) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_M^{\text{abs}} &= \mathbf{v}_{O_c} + \boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}^c + \overset{\times c}{\boldsymbol{\rho}}, \quad \overset{\times c}{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\rho}_\alpha^c \dot{q}_c^\alpha = \mathbf{e}_1^c \sqrt{a_{11}^c} \dot{q}_c^1 + \mathbf{e}_2^c \sqrt{a_{22}^c} \dot{q}_c^2 \\ \mathbf{v}_M^{\text{abs}} &= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}, \quad \overset{*}{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\rho}_\alpha \dot{q}^\alpha = \mathbf{e}_1 \sqrt{a_{11}} \dot{q}^1 + \mathbf{e}_2 \sqrt{a_{22}} \dot{q}^2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Это дает

$$\mathbf{v}_{O_c} + \boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}^c + \overset{\times c}{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \overset{*}{\boldsymbol{\rho}}$$

Введем вектор $\mathbf{U}$ в плоскости осей $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$

$$\overset{\times c}{\boldsymbol{\rho}} - \overset{*}{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}_{O_c} - \boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}^c = \bar{\mathbf{U}} \tag{1.6}$$

Отсюда ($\boldsymbol{\Phi} \equiv \mathbf{U} + \mathbf{j}$)

$$\mathbf{v}_0 = [\mathbf{U} + (\mathbf{v}_{O_c} + \boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}^c)] - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \tag{1.7}$$

Проскальзывания в точке M нет ($\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}_{O_c} - \boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}_c = 0$), отсюда получаем уравнения неголономной связи (вектор $\mathbf{U} = \overset{\times c}{\boldsymbol{\rho}} - \overset{*}{\boldsymbol{\rho}} = 0$ проектируем на оси $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$)

$$\begin{aligned} U^1 &= \pm \sqrt{a_{11}^c} \dot{q}_c^1 \sin\vartheta + \sqrt{a_{22}^c} \dot{q}_c^2 \cos\vartheta - \sqrt{a_{11}} \dot{q}^1 = 0 \\ U^2 &= \mp \sqrt{a_{11}^c} \dot{q}_c^1 \cos\vartheta + \sqrt{a_{22}^c} \dot{q}_c^2 \sin\vartheta - \sqrt{a_{22}} \dot{q}^2 = 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ несущего твердого тела и вектор бесконечно малого поворота $\boldsymbol{\theta}$ этого тела можно представить так ([1], с. 804):

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_c, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_c \tag{1.9}$$

У вектора $\boldsymbol{\omega}_c$ проекции p_c, q_c, r_c (как и φ_c, ψ_c, θ_c) – заданные функции времени, поэтому при фиксированном моменте времени вектор бесконечно малого поворота $\boldsymbol{\theta}_c = 0$.

Отсюда на основании формул (1.7), (1.8) работы [1] получаем выражения проекций угловой скорости несущего тела на оси $\mathbf{e}_i$ подвижного репера (здесь и далее верхний (нижний) знак отвечает случаю $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^c$ $(\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3^c)$)

$$U^3 \equiv \sigma = -\frac{b_{22}}{\sqrt{a_{22}}}\dot{q}^2 \pm \frac{b_{22}^c}{\sqrt{a_{22}^c}}\dot{q}_c^2\sin\vartheta - \frac{b_{11}^c}{\sqrt{a_{11}^c}}\dot{q}_c^1\cos\vartheta \pm$$

$$\pm(p_c\alpha_c + q_c\alpha_c' + r_c\alpha_c'')\sin\vartheta + (p_c\beta_c + q_c\beta_c' + r_c\beta_c'')\cos\vartheta$$

$$U^4 \equiv \tau = \frac{b_{11}}{\sqrt{a_{11}}}\dot{q}^1 - \frac{b_{11}^c}{\sqrt{a_{11}^c}}\dot{q}_c^1\sin\vartheta \mp \frac{b_{22}^c}{\sqrt{a_{22}^c}}\dot{q}_c^2\cos\vartheta + \tag{1.10}$$

$$+(p_c\beta_c + q_c\beta_c' + r_c\beta_c'')\sin\vartheta \mp (p_c\alpha_c + q_c\alpha_c' + r_c\alpha_c'')\cos\vartheta$$

$$U^5 = n = \frac{1}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial q^2}\dot{q}^1 - \frac{\partial a_{22}}{\partial q^1}\dot{q}^2\right) \mp \frac{1}{2\sqrt{a_{11}^c a_{22}^c}}\left(\frac{\partial a_{11}^c}{\partial q_c^2}\dot{q}_c^1 - \frac{\partial a_{22}^c}{\partial q_c^1}\dot{q}_c^2\right) -$$

$$-\dot{\vartheta} \pm (p_c\gamma_c + q_c\gamma_c' + r_c\gamma_c'')$$

Аналогично получаются проекции вектора $\boldsymbol{\theta} = \delta V^3\bar{e}_1 + \delta V^4\bar{e}_2 + \delta V^5\bar{e}_3$:

$$\delta V^3 = -\frac{b_{22}}{\sqrt{a_{22}}}\delta q^2 \pm \frac{b_{22}^c}{\sqrt{a_{22}^c}}\delta q_c^2\sin\vartheta - \frac{b_{11}^c}{\sqrt{a_{11}^c}}\delta q_c^1\cos\vartheta$$

$$\delta V^4 = \frac{b_{11}}{\sqrt{a_{11}}}\delta q^1 - \frac{b_{11}^c}{\sqrt{a_{11}^c}}\delta q_c^1\sin\vartheta \mp \frac{b_{22}^c}{\sqrt{a_{22}^c}}\delta q_c^2\cos\vartheta$$

$$\delta V^5 = \frac{1}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial q^2}\delta q^1 - \frac{\partial a_{22}}{\partial q^1}\delta q^2\right) \mp \frac{1}{2\sqrt{a_{11}^c a_{22}^c}}\left(\frac{\partial a_{11}^c}{\partial q_c^2}\delta q_c^1 - \frac{\partial a_{22}^c}{\partial q_c^1}\delta q_c^2\right) - \delta\vartheta$$

Используя уравнения связи (1.8), выражения (1.10) можно преобразовать к виду

$$\sigma = -\Delta_{12}\sqrt{a_{11}}\dot{q}^1 - \Delta_{22}\sqrt{a_{22}}\dot{q}^2 + A, \quad \tau = \Delta_{11}\sqrt{a_{11}}\dot{q}^1 + \Delta_{21}\sqrt{a_{22}}\dot{q}^2 + B$$
$$n = -\dot{\vartheta} + \Delta_1\sqrt{a_{11}}\dot{q}^1 - \Delta_2\sqrt{a_{22}}\dot{q}^2 + C \tag{1.11}$$

где

$$A = \pm\sigma_c\sin\vartheta + \tau_c\cos\vartheta, \quad \sigma_c = p_c\alpha_c + q_c\alpha_c' + r_c\alpha_c''$$

$$B = \mp\sigma_c\cos\vartheta + \tau_c\sin\vartheta, \quad \tau_c = \ldots$$

$$C = \pm n_c, \quad n_c = p_c\gamma_c + q_c\gamma_c' + r_c\gamma_c''$$

$$\Delta_{11} = \frac{b_{11}}{a_{11}} \mp \frac{b_{11}^c}{a_{11}^c}\sin^2\vartheta \mp \frac{b_{22}^c}{a_{22}^c}\cos^2\vartheta, \quad \Delta_{22} = \frac{b_{22}}{a_{22}} \mp \frac{b_{22}^c}{a_{22}^c}\sin^2\vartheta \mp \frac{b_{11}^c}{a_{11}^c}\cos^2\vartheta$$

$$2\Delta_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial \ln a_{11}}{\partial q^2} - \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{a^c_{22}}}\frac{\partial \ln a^c_{11}}{\partial q^2_c} \pm \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{a^c_{11}}}\frac{\partial \ln a^c_{22}}{\partial q^1_c}$$

$$2\Delta_2 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial \ln a_{22}}{\partial q^1} \mp \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{a^c_{11}}}\frac{\partial \ln a^c_{22}}{\partial q^1_c} - \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{a^c_{22}}}\frac{\partial \ln a^c_{11}}{\partial q^2_c}$$

$$\Delta_{12} \equiv \Delta_{21} = \mp\left(\frac{b^c_{22}}{a^c_{22}} - \frac{b^c_{11}}{a^c_{11}}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta$$

Укажем еще такие формулы:

$$p = \sigma\alpha + \tau\beta + n\gamma, \quad q = \sigma\alpha' + \tau\beta' + n\gamma', \quad r = \sigma\alpha'' + \tau\beta'' + n\gamma''$$

Определим далее из соотношений (1.8), (1.10) выражения $\dot q^1$, $\dot q^2$, $\dot q^1_c$, $\dot q^2_c$, $\dot\vartheta$ через квазискорости (члены с U^1, U^2 не выписываем)

$$\begin{aligned}
\dot q^1 &= \frac{1}{\sqrt{a_{11}}R}(\sigma\Delta_{12} + \tau\Delta_{22} - A\Delta_{12} - B\Delta_{22}), \quad \dot q^2 = -\frac{1}{\sqrt{a_{22}}R}(\sigma\Delta_{11} + \tau\Delta_{21} - A\Delta_{11} - B\Delta_{21})\\
\dot q^1_c &= \frac{1}{\sqrt{a^c_{11}}d}(\sigma c_{12} + \tau c_{22} - Ac_{12} - Bc_{22}), \quad \dot q^2_c = -\frac{1}{\sqrt{a^c_{22}}d}(\sigma c_{11} + \tau c_{21} - Ac_{11} - Bc_{21}) \qquad (1.12)\\
\dot\vartheta &= -n + \frac{(\sigma - A)}{R}(\Delta_{12}\Delta_1 + \Delta_{11}\Delta_2) - \frac{(\tau - B)}{R}(\Delta_{22}\Delta_1 + \Delta_{21}\Delta_2) + C
\end{aligned}$$

Здесь

$$d = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = \pm R, \quad R = \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta^2_{12}$$

$$\begin{aligned}
c_{12} &= \left(\frac{b_{11}}{a_{11}} \mp \frac{b^c_{22}}{a^c_{22}}\right)\cos\vartheta, \quad c_{11} = \left(\pm\frac{b_{11}}{a_{11}} - \frac{b^c_{11}}{a^c_{11}}\right)\sin\vartheta \qquad (1.13)\\
c_{22} &= \left(\frac{b_{22}}{a_{22}} \mp \frac{b^c_{22}}{a^c_{22}}\right)\sin\vartheta, \quad c_{21} = -\left(\pm\frac{b_{22}}{a_{22}} - \frac{b^c_{11}}{a^c_{11}}\right)\cos\vartheta
\end{aligned}$$

Наконец, получаем, согласно известным формулам (см. [3], с. 160) и формуле (1.6), выражение кинетической энергии T' рассматриваемой системы, выведенное без учета уравнений связи,

$$2T' = M\upsilon_0^2 + 2M\mathbf{v}_0\cdot(\boldsymbol\omega\times\mathbf{r}_C) + \boldsymbol\omega\cdot\boldsymbol\Theta^O\cdot\boldsymbol\omega + 2(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q}_r + \boldsymbol\omega\cdot\mathbf{K}^O_r) + \sum_{i=1} m_i\upsilon_i^2 =$$

$$= M\Phi^2 - 2M\boldsymbol\Phi\cdot(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol\rho) + \boldsymbol\omega\cdot\boldsymbol\Theta^O\cdot\boldsymbol\omega + M\rho^2\omega^2 - M(\boldsymbol\rho\cdot\boldsymbol\omega)^2 +$$

$$+ 2M\boldsymbol\Phi\cdot(\boldsymbol\omega\times\mathbf{r}_C) - 2M\mathbf{r}_C\cdot[\boldsymbol\rho\omega^2 - \boldsymbol\omega(\boldsymbol\omega\cdot\boldsymbol\rho)] +$$

$$+2\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{Q}_r + 2\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{Q}_r\times\boldsymbol{\rho}+\mathbf{K}_r^O) + \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = M[U^2 + 2\mathbf{U}\cdot\mathbf{j} + j^2] -$$

$$-2M[\mathbf{U}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}) + \mathbf{j}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})] + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{\Theta}^O\cdot\boldsymbol{\omega} + M\rho^2\omega^2 - M(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega})^2 +$$

$$+2M[\mathbf{U}\cdot(\bar{\boldsymbol{\omega}}\times\bar{\mathbf{r}}_C) + \mathbf{j}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_C)] - 2M\mathbf{r}_C\cdot[\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\omega}^2 - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho})] +$$

$$+2[\mathbf{U}\cdot\mathbf{Q}_r + \mathbf{j}\cdot\mathbf{Q}_r] + 2\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{Q}_r\times\boldsymbol{\rho}+\mathbf{K}_r^O) + \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2(\mathbf{v}_i = \overset{*}{\mathbf{r}}_i) \tag{1.14}$$

и это же выражение Θ', выведенное с учетом уравнений связи при $\mathbf{U} = 0$.

Вектор с проекциями $\partial\Theta'/\partial U^3$, $\partial\Theta'/\partial U^4$, $\partial\Theta'/\partial U^5$, на оси Mq^1q^2n обозначим через $\mathbf{m}'$. Выражения для кинетической энергии системы $T' = T + T''$, $\Theta' = \Theta + \Theta''$ и вектор $\mathbf{m}' = \mathbf{m} + \mathbf{m}''$ распадаются на два члена, где

$$2T'' = 2\mathbf{j}(M\mathbf{U} + \mathbf{Q}_r) + Mj^2 + 2M\mathbf{j}\cdot[(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_C) - (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})]$$

$$2\Theta'' = 2\mathbf{j}\cdot\mathbf{Q}_r + Mj^2 + 2M\mathbf{j}\cdot[(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_C) - (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})] \tag{1.15}$$

$$\mathbf{m}'' = -M(\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{j}) + M(\mathbf{r}_C\times\mathbf{j})$$

Выражение для $2T$ дано в статье [1] формулой (2.9), где надо заменить $\boldsymbol{\Omega}$ на новые обозначения: $\mathbf{U}$ и

$$\mathbf{m} = \mathbf{\Theta}^O\cdot\boldsymbol{\omega} + M\rho^2\boldsymbol{\omega} - M(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\rho} - 2M(\mathbf{r}_C\cdot\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega} +$$

$$+M(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}_C)\boldsymbol{\rho} + M(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho})\mathbf{r}_C + \mathbf{Q}_r\times\boldsymbol{\rho} + \mathbf{K}_r^O \tag{1.16}$$

Кстати, если даны векторы

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{i}_1 + \alpha'\mathbf{i}_2 + \alpha''\mathbf{i}_3$$

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i}_1 + q\mathbf{i}_2 + r\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{j} = j_x\cdot\mathbf{i}_1 + j_y\cdot\mathbf{i}_2 + j_z\cdot\mathbf{i}_3$$

то имеем

$$\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial x}{\partial q^\alpha}\mathbf{i}_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q^\alpha}\mathbf{i}_3, \quad \frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial\alpha}{\partial q^\alpha}\mathbf{i}_1 + \ldots + \frac{\partial\alpha''}{\partial q^\alpha}\mathbf{i}_3$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial p}{\partial q^\alpha}\mathbf{i}_1 + \ldots + \frac{\partial r}{\partial q^\alpha}\mathbf{i}_3, \quad \frac{\partial\mathbf{j}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial j_x}{\partial q^\alpha}\mathbf{i}_1 + \ldots + \frac{\partial j_z}{\partial q^\alpha}\mathbf{i}_3. \tag{1.17}$$

2. Уравнения движения. Теперь, принимая за квазискорости выражения (1.10), (1.8)

$$U^1 = a^1, \quad U^2 = a^2, \quad U^3 = \sigma, \quad U^4 = \tau, \quad U^5 = n, \quad \dot{\alpha}^1, \ldots, \dot{\alpha}^n$$

и обозначая соответствующие вариации квазикоординат δV^i, $\delta\alpha^k$, будем при помощи уравнений Эйлера–Лагранжа выводить уравнения движения рассматриваемой системы, следуя книге А.И. Лурье [3]. Действуя, как и ранее в статье [1], используя приведенные там обозначения и вычисления, находим, что отличны от нуля только следующие символы Γ, ε:

$$\Gamma_{35}^s = -\Gamma_{53}^s = \kappa_1^s, \quad \Gamma_{45}^s = -\Gamma_{54}^s = \kappa_2^s; \quad s = 1, 2$$

$$\varepsilon_3^s = \frac{\Delta_{s1}n_c}{d}, \quad \varepsilon_4^s = \frac{\Delta_{s2}n_c}{d}, \quad \varepsilon_5^s = -\kappa_1^s A - \kappa_2^s B \tag{2.1}$$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{35}^{3} = -\Gamma_{53}^{3} = q_1, \quad \Gamma_{45}^{3} = -\Gamma_{54}^{3} = -1+q_2, \quad \Gamma_{34}^{3} = -\Gamma_{43}^{3} = -r_1\\
&\Gamma_{35}^{4} = -\Gamma_{53}^{4} = 1-p_1, \quad \Gamma_{45}^{4} = -\Gamma_{54}^{4} = -p_2, \quad \Gamma_{34}^{4} = -\Gamma_{43}^{4} = -r_2\\
&\Gamma_{34}^{5} = -\Gamma_{43}^{5} = p_1+q_2-1 \quad \text{или} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} = \gamma_{\alpha+1,\,\beta+1}^{\varepsilon+1}\\
&\varepsilon_4^3 = -r_3, \quad \varepsilon_5^3 = q_3, \quad \varepsilon_3^4 = r_3, \quad \varepsilon_5^4 = -p_3, \quad \varepsilon_3^5 = -q_3, \quad \varepsilon_4^5 = p_3
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где κ_α^s – проекции $\mathbf{K}_\alpha = (\Delta_{\alpha 1}/R)\mathbf{e}_1 + (\Delta_{\alpha 2}/R)\mathbf{e}_2$ $(\alpha = 1, 2)$ на оси $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, γ_{bc}^{a} – трехиндексные символы из [1] и $d = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = \pm R$, p_k, q_k, r_k – коэффициенты в формулах

$$
\sigma_1 = p_1U^3 + p_2U^4 + p_3, \quad \tau_1 = q_1U^3 + q_2U^4 + q_3, \quad n_1 = r_1U^3 + r_2U^4 + r_3
$$

Хотя полученные здесь выражения для квазискоростей более сложные, чем у А.И. Лурье ([3], с. 35), символы Γ_{tq}^{s}, ε_q^s $(s, t, q = 1, \ldots, m = 5)$ по-прежнему определяются формулами (1.8.2), (1.8.5) из [3], где суммирование ведется от 1 до m, а, главное, равны нулю все символы Γ_{tq}^{s}, ε_q^s, в которых один из индексов превосходит $m = 5$, поэтому уравнения движения распадаются на группу уравнений Эйлера–Лагранжа для квазискоростей U^3, U^4, U^5 и группу уравнений Лагранжа для координат $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta'}{\partial U^k} + \sum_{r=1}^{5}\sum_{t=3}^{5}\Gamma_{tk}^{r}\frac{\partial T'}{\partial U^r}U^t + \sum_{r=1}^{5}\frac{\partial T'}{\partial U^r}\varepsilon_k^r - \frac{\partial\Theta'}{\partial V^k} = P_k' \tag{2.3}
$$

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta'}{\partial\dot\alpha^s} - \frac{\partial\Theta'}{\partial\alpha^s} = Q_s; \quad k = 3, 4, 5; \quad s = 1, \ldots, n \tag{2.4}
$$

Уравнения движения несущего тела (2.3) имеют вид $(Q_{rk} = \mathbf{Q}_r \cdot \mathbf{e}_k)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta'}{\partial\sigma} + (\tau-\tau_1)\frac{\partial\Theta'}{\partial n} - (n-n_1)\frac{\partial\Theta'}{\partial\tau} +\\
&+M[(\xi-\xi_C)\tau - (\eta-\eta_C)\sigma]\sqrt{a_{22}}\dot q^2 + (Mj_3+Q_{r3})\sqrt{a_{22}}\dot q^2 -\\
&-(Q_{r2}j_3 - Q_{r3}j_2) + M[(n\xi-\sigma\varepsilon)j_3 - (\sigma\eta-\tau\xi)j_2] -\\
&-M[(n\xi_C-\sigma\varepsilon_C)j_3 - (\sigma\eta_C-\tau\xi_C)j_2] = P_3'\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta'}{\partial\tau} + (n-n_1)\frac{\partial\Theta'}{\partial\sigma} - (\sigma-\sigma_1)\frac{\partial\Theta'}{\partial n} -\\
&-M[(\xi-\xi_C)\tau - (\eta-\eta_C)\sigma]\sqrt{a_{11}}\dot q^1 - (Mj_3+Q_{r3})\sqrt{a_{11}}\dot q^1 -\\
&-(Q_{r3}j_1 - Q_{r1}j_3) + M[(\sigma\eta-\tau\xi)j_1 - (\tau\varepsilon-n\eta)j_3] -\\
&-M[(\sigma\eta_C-\tau\xi_C)j_1 - (\tau\varepsilon_C-n\eta_C)j_3] = P_4'\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta'}{\partial n} + (\sigma-\sigma_1)\frac{\partial\Theta'}{\partial\tau} - (\tau-\tau_1)\frac{\partial\Theta'}{\partial\sigma} + M(\varepsilon-\varepsilon_C)(\sqrt{a_{11}}\dot q^1\sigma + \sqrt{a_{22}}\dot q^2\tau) -\\
&-M[(\xi-\xi_C)\sqrt{a_{11}}\dot q^1 + (\eta-\eta_C)\sqrt{a_{22}}\dot q^2]n - (Mj_1+Q_{r1})\sqrt{a_{22}}\dot q^2 +
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$+(Mj_2+Q_{r2})\sqrt{a_{11}}\dot{q}^1-(Q_{r1}j_2-Q_{r2}j_1)+$$

$$+M[(\tau\varepsilon-n\eta)j_2-(n\xi-\sigma\varepsilon)j_1]-M[(\tau\varepsilon_C-n\eta_C)j_2-(n\xi_C-\sigma\varepsilon_C)j_1] = P'_5$$

Возможное перемещение любой точки M_i системы будет ([3], с. 428)

$$\delta\mathbf{r}_i^a = \delta\mathbf{r}_0^a+\delta\mathbf{r}_i = \delta\mathbf{r}_0^a+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial\alpha^s}\delta\alpha^s+\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r}_i$$

Элементарная работа всех активных сил, приложенных как к несущему, так и к носимым телам, на возможном перемещении точек системы равна

$$\delta'W = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i^a = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i(\delta\mathbf{r}_0^a+\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r}_i)+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\alpha^s}\delta\alpha^s\right) =$$

$$= \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}_0^a+\mathbf{m}^O\cdot\boldsymbol{\theta}+\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\alpha^s}\right)\delta\alpha^s$$

где $\mathbf{F}$ – главный вектор, $\mathbf{m}^0$ – главный момент всех активных сил относительно полюса O. В общем случае каждая сила $\mathbf{F}_i$ – сумма потенциальной силы $\mathbf{F}_{ip}$ и непотенциальной силы $\mathbf{F}_{in}$.

Учитывая уравнение неголономной связи, из формул (1.6), получаем

$$\delta\mathbf{r}_0^a+\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\rho}-\delta\mathbf{r}_{O_c}^a-\boldsymbol{\theta}_c\times\boldsymbol{\rho}^c = 0 \tag{2.6}$$

Так как $\boldsymbol{\theta}_c = 0$, $\delta\mathbf{r}_{O_c}^a = 0$, имеем $\delta\mathbf{r}_0^a = \boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\theta}$, отсюда

$$\delta'W = \mathbf{F}\cdot(\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\theta})+\mathbf{m}^O\cdot\boldsymbol{\theta}+\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\alpha^s}\right)\delta\alpha^s =$$

$$= (\mathbf{m}^O-\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{F})\cdot(\delta V^3\mathbf{e}_1+\delta V^4\mathbf{e}_2+\delta V^5\mathbf{e}_3)+\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\alpha^s}\right)\delta\alpha^s \tag{2.7}$$

С другой стороны, $\delta'W$ выражается через обобщенные силы, отнесенные к квазикоординатам V^3, V^4, V^5 и к обобщенным координатам α^k:

$$\delta'W = \sum_{k=3}^{5}P'_k\delta V^k+\sum_{s=1}^{n}Q_s\delta\alpha^s \tag{2.8}$$

Сравнивая выражения (2.7) и (2.8), находим, что величины P'_3, P'_4, P'_5 – проекции на оси Mq^1q^2n главного момента активных сил (приложенных как к несущему, так и к носимым телам) относительно точки касания M

$$P'_{2+k} = \mathbf{m}^M\cdot\mathbf{e}_k(k = 1, 2, 3;\ \mathbf{m}^M = \mathbf{m}^O-\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{F}),\quad Q_s = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\alpha^s}$$

Проделав указанные выше вычисления отдельно для сил $\mathbf{F}_{ip}$ (и сил $\mathbf{F}_{in}$), получим, что величины $\partial U/\partial V^3$, $\partial U/\partial V^4$, $\partial U/\partial V^5$, имеющие вид (2.14) ([1], с. 809) (и обобщенные силы P'_{3n}, P'_{4n}, P'_{5n}, порожденные непотенциальными силами $\mathbf{F}_{in}$), являются соответственно проекциями на оси Mq^1q^2n главного момента активных потенциальных сил (активных непотенциальных сил) относительно точки касания M. И еще $P'_k = \partial U/\partial V^k + P'_{kn}$ $(k = 3, 4, 5)$.

При неподвижной поверхности S^c ($\mathbf{j} = 0$) уравнения движения несущего тела (2.5) совпадают с уравнениями (2.12), (2.13) из [1]. В векторной форме эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{\Theta}^O\cdot\boldsymbol{\omega}+M\rho^2\boldsymbol{\omega}-M(\rho\cdot\boldsymbol{\omega})\rho-2M(r_C\cdot\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega}+M(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho})\mathbf{r}_C+$$
$$+M(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}_C)\boldsymbol{\rho}+\mathbf{Q}_r\times\boldsymbol{\rho}+\mathbf{K}_r^O-M(\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{j})+M(\mathbf{r}_C\times\mathbf{j})]+$$
$$+\overset{*}{\boldsymbol{\rho}}\times M[(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}_C)\times\boldsymbol{\omega}+\overset{*}{\mathbf{r}}_C+\mathbf{j}]-(M\overset{*}{\mathbf{r}}_C\times\mathbf{j})+M[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}_C)]\times\mathbf{j} = \mathbf{m}^M \tag{2.9}$$

Итак, если движение носимых тел относительно несущего тела задано или относительных движений вообще нет, для определения обобщенных координат q^1, q^2, ϑ, q_c^1, q_c^2 и величин σ, τ, n как функций времени получена замкнутая система восьми дифференциальных уравнений (1.8), (1.10), (2.5). В общем случае указанная система не замкнута, и для полного решения задачи – для определения обобщенных координат q^1, q^2, ϑ, q_c^1, q_c^2, α^1, …, α^n и величин σ, τ, n как функции времени к уравнениям (1.8), (1.10), (2.5) нужно присоединить уравнения движения носимых тел (2.4). Опуская вывод, который можно восстановить по книге [3, с. 433], сразу запишем уравнения (2.4) в преобразованном виде:

$$\varepsilon_s(T_r) = Q_s-M[(\mathbf{j}+\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\omega})^*+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{j}+\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\omega})]\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_C}{\partial\alpha^s}+$$
$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Theta}^O}{\partial\alpha^s}\cdot\boldsymbol{\omega}-\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\frac{\partial\mathbf{K}_r^O}{\partial\dot{\alpha}^s}-\boldsymbol{\omega}\cdot\varepsilon_s^*(\mathbf{K}_r^O),\quad s = 1,\ldots,n \tag{2.10}$$

Если движение поверхности S^c задано, а совокупность носимых материальных точек – твердое тело, уравнения движения носимого тела будут ($s = 1, 2, 3$; $k = 4, 5, 6$; [1], с. 811 и [3], с. 454–458)

$$M_r\mathbf{W}_{C_r}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_{C_r}}{\partial\alpha^s} = Q_s\left(\mathbf{v}_0=\mathbf{j}+\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\omega}_r=\sum_{k=4}^{6}\mathbf{e}'_k\dot{\alpha}^k,\ \boldsymbol{\Theta}^O=\boldsymbol{\Theta}_0^O+\boldsymbol{\Theta}_r^O\right)$$

$$\mathbf{e}'_k\cdot\left[\boldsymbol{\Theta}_r^{C_r}\cdot\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}_r+\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{\Theta}_r^{C_r}\cdot\boldsymbol{\omega}_r+\boldsymbol{\Theta}_r^{C_r}\cdot\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Theta}_r^{C_r}\cdot\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{\omega}_r\times\left(\boldsymbol{\Theta}_r^{C_r}-\frac{1}{2}\mathbf{E}\vartheta_r^{C_r}\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\right] = Q_k$$

$$\boldsymbol{\Theta}_r^O = \boldsymbol{\Theta}_r^{C_r}+M_r(\mathbf{E}\mathbf{r}_{C_r}\cdot\mathbf{r}_{C_r}-\mathbf{r}_{C_r}\mathbf{r}_{C_r})$$

$\boldsymbol{\Theta}_0^O$ – тензор инерции несущего тела в точке O, а $\boldsymbol{\Theta}_r^O$ – тензор инерции носимого тела в точке O, $\boldsymbol{\Theta}_r^{C_r}$ – тензор инерции носимого тела в его центре инерции, $\vartheta_r^{C_r}$ – сумма диагональных составляющих тензора $\boldsymbol{\Theta}_r^{C_r}$, $\mathbf{W}_{C_r}$ – абсолютное ускорение центра инерции C_r носимого тела, $\boldsymbol{\omega}_r$ – вектор угловой скорости прямоугольных осей координат $C_r x^r y^r z^r$, связанных с носимым телом, относительно осей $Oxyz$.

Действуя, как и А.И. Лурье ([3], с. 159), найдем кинетический момент $\mathbf{K}^O$ системы (несущее тело плюс носимые точки) относительно движущегося полюса O в абсолютном движении (в случае, рассмотренном А.И. Лурье, был неподвижный полюс)

$$\mathbf{K}^O = M\mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\Theta}^O \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_r^O$$

Если полюс O – центр инерции C, то $\mathbf{K}^O = \boldsymbol{\Theta}^O \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_r^O$.

Далее определим кинетический момент относительно точки касания M системы, состоящей из несущего тела и носимых точек, в абсолютном движении относительно неподвижных осей $O_a x^a y^a z^a$

$$\mathbf{K}^M = \mathbf{K}^O + \mathbf{Q} \times \overline{\mathbf{OM}} = M\mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\Theta}^O \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_r^O +$$
$$+ [M(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C) + \mathbf{Q}_r] \times \boldsymbol{\rho},$$
$$\mathbf{Q}_r = M\overset{*}{\mathbf{r}}_C$$

Подставив сюда $\mathbf{v}_0 = \mathbf{j} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$, получим $\mathbf{K}^M = \mathbf{m}'$, т.е. $\partial\Theta'/\partial\sigma$, $(\partial\Theta'/\partial\tau)$, $\partial\Theta'/\partial n$ – проекции на оси $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ кинетического момента $\mathbf{K}^M$.

Автор благодарит за помощь Д.Е. Охоцимского.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бычков Ю.П.* К задаче о катании твердого тела по неподвижной поверхности // Инж. журн. 1965. Т. 5. Вып. 5. С. 803–811.
2. *Woronetz P.* Über die Bewegungsgleichungene eines starren Körpers // Math. Ann. 1912. Bd. 71. S. 392–403.
3. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.I.2004