УДК 531.8

© 2004 г. А.П. Леутин

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ СИСТЕМ СОЕДИНЕННЫХ ТЕЛ

Исследуется основанное на принципе наименьшего принуждения экстремальное свойство сил и моментов реакций в шарнирах механических систем, состоящих из носителя и соединенных с ним тел. Задача минимизации функционала от линейных и угловых ускорений тел с учетом голономных удерживающих связей, в которых действует трение, решена методом неопределенных множителей. Показано, что их значения, реализующиеся при действительном движении тел, совпадают с силами и моментами реакций связей, и определена наименьшая величина принуждения. Дается интерпретация полученных результатов с позиций теории упругости. На основе принципа наименьшего принуждения рассматривается процесс разделения ступеней ракет.

Известным примером системы, состоящей из центрального тела и соединенных с ним периферийных тел, является ракета-носитель "Союз": четыре ускорителя прикреплены по бокам к центральной ступени и в процессе разделения происходит их отвод в стороны. Аналогично происходит отделение боковых ускорителей от центрального блока ракеты "Энергия", подвесных грузов от самолетов-носителей и т.д. [1, 2].

1. Основные соотношения принципа Гаусса. Согласно принципу Гаусса [3, 4] действительное движение системы с идеальными связями выделяется среди кинематически возможных (совместимых со связями) тем, что в каждый момент времени на нем достигается наименьшее значение принуждения Z, которое представляет собой взвешенную сумму квадратов отклонений ускорений материальных точек системы от их ускорений при отсутствии связей (в свободном движении):

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n\left(\dot{\mathbf{V}}_n - \frac{\mathbf{F}_{an}}{m_n}\right)^2 \tag{1.1}$$

где m_n – масса n-й материальной точки системы ($n = 1, \ldots, N$), $\dot{\mathbf{V}}_n$ – вектор абсолютного ускорения точки, $\mathbf{F}_{an}$ – заданный вектор активной внешней силы, действующей на n-ю точку. Смысл принципа Гаусса состоит в том, что несвободная система совершает движение, наиболее близкое к свободному, которое считается известным; принуждение (1.1) представляет собой меру этой близости.

Наряду с формулировкой принципа Гаусса, основанной на сравнении связанного и освобожденного движений тел системы, возможна также его силовая трактовка. Поскольку $m_n\dot{\mathbf{V}}_n = \mathbf{F}_{an} + \mathbf{R}_n$, где $\mathbf{R}_n$ – суммарная сила реакции в связях n-й точки, то

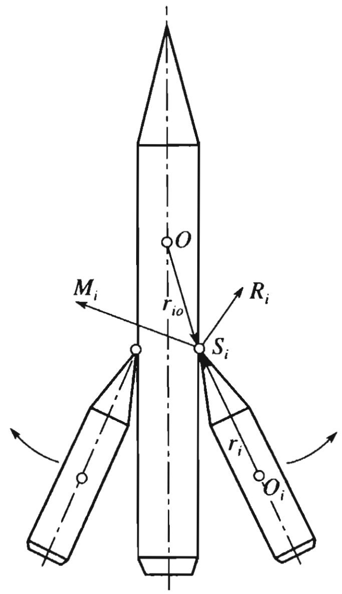
$$Z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{\mathbf{R}_n^2}{m_n} \tag{1.2}$$

Таким образом, условие минимальности принуждения для действительного движения системы материальных точек приводит к экстремальному свойству реакций –

функционал (1.2) в любой момент времени достигает условного (при выполнении наложенных на систему связей) минимума.

При устранении части связей наименьшее значение принуждения системы уменьшается. При полном освобождении точек, когда ускорения определяются только действующими на них активными силами, достигается безусловный минимум принуждения: $\min Z = 0$.

В принуждение системы твердых тел входят, в частности, принуждения отдельных тел [5, 6]



$$Z = S - \dot{\mathbf{V}}\mathbf{F}_a - \dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{M}_a + \ldots \tag{1.3}$$

$$S = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\mathbf{v}}_n^2 = \frac{1}{2}(m\dot{\mathbf{V}}^2 + \dot{\boldsymbol{\omega}}I\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega}\times I\boldsymbol{\omega}) + \ldots$$

где S – энергия ускорений тела, определяемая аналогично кинетической энергии тела с заменой скоростей точек на ускорения, m – масса тела, I – матрица моментов инерции тела относительно его центра масс в связанных с ним осях, $\dot{\mathbf{V}}$ – вектор абсолютного ускорения центра масс, $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ – векторы абсолютной угловой скорости и ускорения тела; $\mathbf{F}_a$, $\mathbf{M}_a$ – главный вектор и главный момент (относительно центра масс) активных внешних сил, действующих на тело; многоточием обозначены члены, зависящие от ускорений, вызываемых действием активных сил и моментов, а также от угловых скоростей тела, которые считаются заданными. Два первых члена в соотношении для энергии ускорений соответствуют формуле Кёнига для кинетической энергии тела с заменой скоростей точек на соответствующие им ускорения [3]. Слагаемые $\dot{\mathbf{V}}\mathbf{F}_a + \dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{M}_a$ представляют собой зависящую от ускорений часть мощности активных сил и моментов на перемещениях тела в составе системы, где на него действуют как активные силы и моменты, так и реакции связей с соседними телами и силы трения.

2. Принуждение для системы "носитель плюс грузы". Рассмотрим систему тел со структурой "дерева", состоящую из центрального носителя и произвольного количества L грузов (фигура). Связи предполагаются голономными, удерживающими и неидеальными: в них действует трение. Частными случаями являются скольжение груза без вращения или вращение без скольжения и, наконец, относительный покой [1]. Ниже трение условно считается активным фактором, т.е. силы и моменты трения предполагаются, как и другие активные силы и моменты, непрерывными при освобождении тел от связей. Это позволяет свести поставленную задачу к определению движения системы с идеальными связями и, в конечном итоге, к минимизации функционала принуждения при наличии ограничений (действие трения затем определяется с помощью итераций [2]).

Ускорения тел системы можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_{ia} &= \dot{\mathbf{V}}_i + \Delta\dot{\mathbf{V}}_i, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ia} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \\ \dot{\mathbf{V}}_{a0} &= \dot{\mathbf{V}}_0 + \Delta\dot{\mathbf{V}}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{a0} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Индексом a отмечены ускорения центров масс тел и их угловые ускорения, вызываемые действием активных сил и моментов. Векторы

$$\Delta\dot{\mathbf{V}}_i = -m_i^{-1}\mathbf{R}_i, \quad \Delta\dot{\mathbf{V}}_0 = m_0^{-1}\sum_{i=1}^{L}\mathbf{R}_i$$

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = -I_i^{-1}(\mathbf{M}_i + \mathbf{r}_i\times\mathbf{R}_i), \quad \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = I_0^{-1}\sum_{i=1}^{L}(\mathbf{M}_i + \mathbf{r}_{i0}\times\mathbf{R}_i)$$

представляют собой приращения ускорений грузов и носителя, приобретаемые ими после освобождения вследствие прекращения действия суммарных сил $\mathbf{R}_i$ и моментов $\mathbf{M}_i$ реакций связей; $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_{i0}$ – радиус-векторы полюсов шарниров S_i, проведенные из центров масс грузов O_i и носителя O. Принято, что силы $\mathbf{R}_i$ и моменты $\mathbf{M}_i$ реакций соответствуют действию носителя на грузы. Величины, относящиеся к носителю и i-му грузу, отмечены индексами 0 и i ($i = 1, \ldots, L$).

Используя соотношения (1.3) и (2.1), получим, что выражение (1.1) для принуждения принимает вид

$$Z = \Delta Z + Z_a$$

$$\Delta Z = \frac{1}{2}(m_0\Delta\dot{\mathbf{V}}_0^2 + \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 I_0\Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{L}(m_i\Delta\dot{\mathbf{V}}_i^2 + \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_i I_i\Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_i) \tag{2.2}$$

Здесь ΔZ – переменная (варьируемая) часть принуждения, наименьшее значение которой реализуется при действительном движении системы. Эта часть принуждения равна энергии ускорений тел, приобретаемых ими при полном освобождении. Действительно, при этом линейные ускорения точек каждого тела изменяются на $\Delta\dot{\mathbf{v}}_n =$ $= \Delta\dot{\mathbf{V}} + \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_n$, где $\mathbf{r}_n$ – радиус-вектор n-й точки тела относительно его центра масс. Тогда из формулы [5] для энергии ускорений тел следует выражение (2.2). При полном освобождении тел $\Delta Z = 0$. Вторая часть принуждения Z_a зависит только от заданных угловых скоростей и ускорений тел, вызванных действием активных сил и моментов, поэтому она не варьируется, и ниже ее не рассматриваем.

3. Минимизация принуждения с учетом условий связи. При определении действительных ускорений связанных тел приходим к задаче минимизации квадратичного функционала ΔZ (2.2) при наличии линейных ограничений типа равенств. Для ее решения методом Лагранжа введем расширенный функционал, учитывающий наличие удерживающих связей с помощью неопределенных множителей,

$$G = \Delta Z + \sum_{i=1}^{L}(\boldsymbol{\lambda}_{i\upsilon}\mathbf{f}_{i\upsilon} + \boldsymbol{\lambda}_{i\omega}\mathbf{f}_{i\omega}) \tag{3.1}$$

где $\mathbf{f}_{i\upsilon}$, $\boldsymbol{\lambda}_{i\upsilon}$, $\mathbf{f}_{i\omega}$, $\boldsymbol{\lambda}_{i\omega}$ – векторы, определяющие условия связи грузов с носителем, и соответствующие им множители. При записи условий связи движение носителя по отношению к грузам рассматривается как переносное.

Вектор $\mathbf{f}_{i\upsilon}$ задает условия отсутствия перемещения полюса шарнира S_i относительно носителя по заданным направлениям (поперек направляющей линии или плоскости на носителе) или, в частном случае, условия относительной неподвижности полюса

$$\mathbf{f}_{i\upsilon} = \Delta\dot{\mathbf{V}}_i + \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_i\times\mathbf{r}_i - \Delta\dot{\mathbf{V}}_0 - \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_0\times\mathbf{r}_{i0} - \delta\dot{\mathbf{v}}_{ia} = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

где $\delta\dot{\mathbf{v}}_{ia} = \dot{\mathbf{v}}_{ia} - \dot{\mathbf{v}}_{a0} - \mathbf{w}_{ic}$ – относительное ускорение полюса S_i под действием активных сил и моментов, которое реализуется при исчезновении связи в данном узле, $\mathbf{w}_{ic}$ – кориолисово ускорение полюса.

Вектор $\mathbf{f}_{i\omega}$ задает условия отсутствия относительного разворота i-го груза перпендикулярно его оси вращения или условия его относительного покоя:

$$\mathbf{f}_{i\omega} = \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 - \delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ia} = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

где $\delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ia} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ia} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{a0} + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\omega}_0$ – относительное угловое ускорение груза под действием активных сил и моментов.

Из необходимых условий минимума функционала (3.1) получим зависимости приращений ускорений тел от неопределенных множителей:

$$\Delta\dot{V}_i = -m_i^{-1}C_i^T B_{i\upsilon}\lambda_{i\upsilon}, \quad \Delta\dot{V}_0 = m_0^{-1}\sum B_{i\upsilon}\lambda_{i\upsilon} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\omega}_i &= -I_i^{-1}(\tilde{r}_i C_i^T B_{i\upsilon}\lambda_{i\upsilon} + C_i^T B_{i\omega}\lambda_{i\omega}) \\ \Delta\dot{\omega}_0 &= I_0^{-1}\sum(\tilde{r}_{i0}B_{i\upsilon}\lambda_{i\upsilon} + B_{i\omega}\lambda_{i\omega}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

При матричной записи векторы задаются как столбцы координат в системах, жестко связанных с телами. Ортогональная матрица C_i задает преобразование координат от осей носителя к осям i-го груза. Условия связи (3.2), (3.3) грузов с носителем проектируются на соответствующие направления с помощью матриц $B_{i\upsilon}$, $B_{i\omega}$ (они составлены из координат ортов осей, по которым отсутствуют относительные перемещения и вращения данного груза [2]; в зависимости от вида относительного движения грузов матрицы имеют размеры 3×1, 3×2 и 3×3). Здесь и ниже $\tilde{a}$ – кососимметричная матрица, используемая для записи векторных произведений с вектором $\mathbf{a}$.

Как видим, соотношения (3.4), (3.5) являются уравнениями движения носителя и грузов (см. (2.1)), где вместо векторов суммарных сил R_i и моментов M_i реакций, выраженных в осях, на которые проектируются условия связи, стоят соответственно неизвестные множители $\lambda_{i\upsilon}$, $\lambda_{i\omega}$. Подставляя выражения (3.4), (3.5) в условия связи (2.4) и (2.5), получаем для экстремальных значений множителей $\lambda_{i\upsilon}^*$ и $\lambda_{i\omega}^*$, соответствующих действительному движению тел, ту же самую систему уравнений, которая получается при прямом расчете сил и моментов реакций непосредственно из условий связи [1, 2]:

$$Ax^* = b \tag{3.6}$$

Здесь $A = \|A_{ij}\|$ – блочная матрица системы ($i, j = 1, \ldots, L$), $x^* = \|x_i^*\|$ – объединенный вектор-столбец экстремальных значений реакций, $b = \|b_i\|$ – столбец правых частей уравнений, задающих условия связи тел, где

$$b_i = -\begin{Vmatrix} B_{i\upsilon}^T\ \delta\dot{\upsilon}_{ia} \\ B_{i\omega}^T\ \delta\dot{\omega}_{ia} \end{Vmatrix}, \quad x_i^* = \begin{Vmatrix} R_i^* \\ M_i^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_{i\upsilon}^* \\ \lambda_{i\omega}^* \end{Vmatrix}$$

Векторы $\delta\dot{\upsilon}_{ia}$, $\delta\dot{\omega}_{ia}$ заданы в осях носителя.

Диагональные симметричные подматрицы

$$A_{ii} = \begin{Vmatrix} A'_{ii} & B_{ii} \\ B_{ii}^T & D_{ii} \end{Vmatrix}$$

задают взаимодействие через узел связи i-го груза с носителем

$$A'_{ii} = \tilde{m}_i^{-1}E_i - B_{i\upsilon}^T(C_i\tilde{r}_iI_i^{-1}\tilde{r}_iC_i^T + \tilde{r}_{r0}I_0^{-1}\tilde{r}_{i0})B_{i\upsilon}$$

$$B_{ii} = -B_{i\upsilon}^T(C_i\tilde{r}_iI_i^{-1}C_i^T + \tilde{r}_{i0}I_0^{-1})B_{i\omega}$$

$$D_{ii} = B_{i\omega}^T(C_iI_i^{-1}C_i^T + I_0^{-1})B_{i\omega}$$

где $\tilde{m}_i = m_im_0/(m_i + m_0)$ – приведенная масса носителя и i-го груза, E_i – единичная матрица, соответствующая по размерности вектору силы реакции в i-м узле (в частности, матрица может выродиться в обычную единицу). Недиагональные блочные подматрицы

$$A_{ij} = \begin{Vmatrix} T_{ij} & Q_{ij} \\ W_{ij} & P_{ij} \end{Vmatrix}$$

определяют действие j-го груза на i-й груз ($j \neq i$), которое осуществляется через носитель,

$$T_{ij} = m_0^{-1}B_{i\upsilon}^TB_{j\upsilon} - B_{i\upsilon}^T\tilde{r}_{r0}I_0^{-1}\tilde{r}_{j0}B_{j\upsilon}, \quad Q_{ij} = -B_{i\upsilon}^T\tilde{r}_{i0}I_0^{-1}B_{j\omega}$$

$$P_{ij} = B_{i\omega}^TI_0^{-1}B_{j\omega}, \quad W_{ij} = Q_{ji}^T$$

В общем случае матрицы A_{ij} не квадратные, так как размерности векторов сил и моментов реакций в различных узлах неодинаковы. Из структуры подматриц следует, что $A_{ij}^T = A_{ji}$, т.е. матрица A – квадратная и симметричная (а также положительно определенная, см. ниже). В простейшем случае одного груза в A остается лишь диагональная матрица, $i = L = 1$.

Отметим, что при записи уравнений связей тел в форме (3.2), (3.3) экстремальные значения множителей Лагранжа совпадают с действительными значениями сил и моментов реакций связей.

Как отмечено выше, в правой части линейной системы уравнений (3.6) содержатся силы и моменты трения, нелинейным образом зависящие от сил и моментов реакций. Поэтому решение уравнений осуществляется итерационным путем. На первом шаге связи полагаются идеальными – без трения. На последующих шагах силы и моменты трения в связях вычисляются по значениям сил и моментов реакций, определенных на предыдущем шаге. В результате происходит изменение первоначальных "идеальных" реакций, вызванное действием трения. Численное моделирование движения реальных систем "носитель плюс грузы" показывает, что для твердых антифрикционных покрытий (кулоново трение), используемых в шарнирных соединениях авиакосмических систем, итерационные процессы сходятся достаточно быстро: точность ~1% достигается за 3–5 итераций [2].

4. Функционал, зависящий от сил и моментов реакций. На основе расширенного функционала (3.1) для принуждения можно получить функционал от сил и моментов реакций, который можно интерпретировать с позиций теории упругости. С этой целью подставляем экстремальные значения множителей $\lambda_{i\upsilon}^*$, $\lambda_{i\omega}^*$ в (3.1) и выражаем ускорения, приобретаемые телами при освобождении, через варьируемые значения сил $\mathbf{R}_i$ и моментов $\mathbf{M}_i$ реакций (2.1). После тождественных преобразований получаем квадратичный функционал

$$G(x) = \frac{1}{2}x^TAx + \lambda^{*T}f(x) = \frac{1}{2}x^TAx + b^TA^{-1}(-Ax + b) = \frac{1}{2}x^TAx - b^Tx + \dots \quad (4.1)$$

Здесь $\lambda^* = \|\lambda_i^*\|$ – объединенный вектор-столбец экстремальных значений множителей Лагранжа, соответствующих условиям связи (3.3), (3.4), $x = \|x_i\|$ – вектор-столбец, задающий силы и моменты реакций, $f(x) = \|f_i\|$ – вектор левых частей уравнений связи всех тел системы, где

$$\lambda_i^* = \left\| \begin{matrix} \lambda_{i\upsilon}^* \\ \lambda_{i\omega}^* \end{matrix} \right\|, \quad x_i = \left\| \begin{matrix} R_i \\ M_i \end{matrix} \right\|, \quad f_i = \left\| \begin{matrix} f_{i\upsilon} \\ f_{i\omega} \end{matrix} \right\|$$

Приравнивая нулю производную по варьируемому вектору x, получаем известное решение $x^* = A^{-1}b$. Напротив, функционал (4.1) формально получается из условия минимума (3.6) путем его интегрирования по переменной x.

Таким образом, экстремальное свойство реакций связей системы "носитель плюс грузы" состоит в том, что при ее действительном движении в каждый момент времени реализуются значения сил и моментов реакций $\mathbf{R}_i^*$, $\mathbf{M}_i^*$ во всех узлах связи ($i = 1, \ldots, L$), которые доставляют условный минимум функционалу принуждения ΔZ и безусловный минимум расширенному функционалу G, причем эти силы и моменты совпадают с соответствующими экстремальными значениями множителей Лагранжа. В результате достигается наименьшее значение функционала принуждения

$$\min\Delta Z = \frac{1}{2}x^{*T}Ax^* = \frac{1}{2}b^TA^{-1}b \tag{4.2}$$

Эта величина может быть вычислена также с использованием известного из теории оптимизации равенства $\lambda^{*T} = d(\min\Delta Z)/db$ [7]. Тогда

$$\min\Delta Z = \int_0^b \lambda^{*T}\,db = \frac{1}{2}b^TA^{-1}b$$

Величина принуждения является мерой близости связанного и освобожденного движений системы тел и реализуется при мгновенном исчезновении связей (например, в случае разделения ступеней летательных аппаратов – разд. 5). Из положительности $\min\Delta Z$ следует положительная определенность матриц A, A^{-1}; это гарантирует однозначность решения уравнений (3.6) и, следовательно, единственность движения систем тел.

Полученные выше соотношения по своей структуре аналогичны основным соотношениям теории упругости [8, 9]. Скалярное произведение в (4.1)

$$-b^Tx = \sum(R_i^TB_{i\upsilon}^T\delta\dot{\upsilon}_{ia} + M_i^TB_{i\omega}^T\delta\dot{\omega}_{ia})$$

представляет собой мощность сил и моментов реакций на перемещениях грузов относительно носителя, вызванных действием активных сил и моментов в соответствующих узлах связи. Положительно определенную квадратичную форму $x^TAx/2$ можно рассматривать как потенциальную энергию сил и моментов реакций связей тел. Действительно, энергия идеально упругих деформаций конструкции равна $U = Q^TCQ/2$, где Q – объединенный вектор активных внешних сил и моментов (обобщенных сил), действующих на конструкцию; C – матрица влияния. Таким образом, можно трактовать соотношение (3.6) как аналог теоремы Кастильяно, определяющей необходимое условие минимума потенциальной энергии, из которого определяется действительное распределение деформаций (принцип минимума потенциальной энергии). Согласно этой теореме, частная производная энергии деформаций идеально упругой конструкции по обобщенной силе равна перемещению точки приложения силы по ее направлению: $\partial U/\partial Q = q^T$, где q – объединенный вектор перемещений, соответствующих заданным обобщенным силам.

Минимальность принуждения системы тел означает, что потенциальная энергия реакций связей в их действительном движении также принимает наименьшее возможное значение.

5. Движение ступеней летательных аппаратов после разрыва их связей.

Как правило, при разделении ступеней (частей) летательных аппаратов изменяются только их ускорения, а скорости остаются неизменными [1]. В этом случае для анализа разделения естественно применить принцип Гаусса (при разрыве связей трение в узлах "исчезает", а не остается неизменным, как это условно принято выше).

Пусть в некоторый момент времени происходит мгновенный разрыв всех связей между носителем и L грузами, до этого жестко скрепленными в единое целое. Перед разрывом $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^- = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^-$, $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_0$ и линейные ускорения центров масс связаны через кинематику системы как твердого тела. Разделение производится обычно при управляемом сбалансированном полете: перед разрывом связей вращение носителя отсутствует – $\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^- = 0$, вследствие чего $\dot{\mathbf{V}}_i^- = \dot{\mathbf{V}}_0^-$.

Тогда, используя формулу (1.3) для энергии ускорений тела и представление ускорений после разрыва связей (обозначены индексом плюс) через ускорения непосредственно перед их разрывом (индекс минус)

$$\dot{\mathbf{V}}_i^+ = \dot{\mathbf{V}}_i^- + \Delta\dot{\mathbf{V}}_i', \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^+ = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^- + \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_i'$$

$$\dot{\mathbf{V}}_0^+ = \dot{\mathbf{V}}_0^- + \Delta\dot{\mathbf{V}}_0', \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^+ = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^- + \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_0'$$

получим соотношение между энергиями ускорений системы до и после разрыва связей тел

$$S^+ - S^- = \Delta S + m_0\dot{\mathbf{V}}_0^-\Delta\dot{\mathbf{V}}_0' + \sum m_i\dot{\mathbf{V}}_0^-\Delta\dot{\mathbf{V}}_i' \tag{5.1}$$

где

$$S = S_0(\dot{\mathbf{V}}_0, \dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \boldsymbol{\omega}_0) + \sum S_i(\dot{\mathbf{V}}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \boldsymbol{\omega}_0)$$

$$\Delta S = \Delta Z(\Delta\dot{\mathbf{V}}_0', \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_0', \Delta\dot{\mathbf{V}}_i', \Delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_i')$$

S – энергия ускорений системы тел, ΔS – энергия ускорений, приобретенных телами при полном разрыве связей, см. (2.2).

Из соотношения (2.1) следует равенство

$$m_0\Delta\dot{\mathbf{V}}_0' + \sum m_i\Delta\dot{\mathbf{V}}_i' = \mathbf{0}$$

означающее независимость ускорения центра масс системы от ее внутренних сил и моментов. Тогда из равенства (5.1) получим аналог второй теоремы Карно, согласно которой при ударном исчезновении связей приращение кинетической энергии системы равно энергии приобретенных скоростей тел [10]:

$$S^+ - S^- = \Delta S$$

Поскольку процесс разделения ступеней представляет собой управляемый распад единой системы на отдельные тела, это соотношение можно интерпретировать как своеобразный переход потенциальной энергии, накопленной в связях перед их разрывом, в энергию приобретенных ускорений освобожденных тел. Узлы связи, натянутые силами реакций, после разрыва действуют подобно сжатым пружинам, отталкивающим тела друг от друга [1].

При отсутствии трения в узлах связи энергия ускорений, приобретенных телами при полном разрыве связей, равна величине принуждения системы (4.2) перед их разрывом: $\Delta S = \min \Delta Z^{-}$. Для летательных аппаратов это равенство выполняется приближенно и тем точнее, чем меньше вклад трения, которое на практике уменьшают путем использования специальных материалов.

Автор благодарит А.П. Маркеева за внимание к работе и помощь в ознакомлении с литературой по рассмотренному вопросу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демешкина В.В., Ильин В.А., Леутин А.П.* Некоторые особенности процесса разделения летательных аппаратов вблизи момента разрыва связей // Учен. зап. ЦАГИ. 1980. Т. 11. № 4. С. 90–101, № 5. С. 61–75.
2. *Леутин А.П.* Аналитическое приведение динамических уравнений систем связанных тел к нормальной форме // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 5. С. 19–24.
3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414 с.
4. *Маркеев А.П.* О принципе Гаусса // Сб. научно-методических статей. Теоретическая механика. М.: Изд-во МГУ, 2000. Вып. 23. С. 29–44.
5. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
6. *Lilov L., Lorer M.* Dynamic analysis of multirigid-body system based on the Gauss-principle // ZAMM. 1982. Bd. 62. H. 10. S. 539–545.
7. *Bryson A.E., Ho Yu-Chi.* Applied Optimal Control. Waltham: Blaisdell, 1969 = *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
8. *Работнов Ю.Н.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 455 с.
9. *Bisplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.L.* Aeroelasticity. Cambridge: Addison-Wesley Publ., 1955 = *Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л.* Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 799 с.
10. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977. 223 с.

Жуковский
e-mail: filatyev @ tsagi. ru

Поступила в редакцию
24. IX. 2002