УДК 531.36

© 2004 г. А. А. Буров

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ, РЕАЛИЗУЕМЫМИ БОЛЬШИМИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ СИЛАМИ

Для систем, стесненных связями, реализуемыми большими потенциальными силами, исследуется вопрос о необходимых условиях устойчивости установившихся движений. Для изучения собственных значений линеаризованной системы вводится расширенная матрица, аналогичная расширенной матрице, возникающей в условиях знакоопределенности ограничения квадратичных форм на линейное многообразие. На примере обсуждается вопрос о корректности реализации односторонних связей в особенных случаях нулевой реакции.

Как известно, метод Рауса [1, 2] и его модификации (см., например, [3–5]) позволяют эффективно решать не только задачу о существовании установившихся движений механических систем, стесненных связями или обладающих первыми интегралами, но и исследовать достаточные условия их устойчивости и неустойчивости. В то же время для систем, стесненных односторонними связями, исследование необходимых условий устойчивости затруднено определенными сложностями, связанными с составлением уравнений возмущенного движения. Ниже обсуждается один из возможных путей преодоления таких трудностей в случае, когда механическая природа связи известна.

1. Уравнения движения механической системы, стесненной связью, реализуемой большой потенциальной силой. Рассмотрим движение механической системы, для которой выражения для кинетической и потенциальной энергии имеют вид

$$T = T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad U = U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n \tag{1.1}$$

Предположим, что на систему также действует дополнительная сила с потенциалом (ср. [6, 5])

$$U_N = \frac{1}{2}N\varphi(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

зависящим от положительного параметра N, где

$$\varphi(\mathbf{x}) = f^2(\mathbf{x}) \tag{1.3}$$

или (1.4)

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} f^2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathscr{E}_+ \cup \mathscr{E} \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathscr{E}_- \end{cases} \tag{1.5}$$

Области $\mathscr{E}_\pm$ и поверхность $\mathscr{E}$ определены соотношениями

$$\mathscr{E}_- = \{\mathbf{x}:\ f(\mathbf{x}) < 0\}, \quad \mathscr{E}_+ = \{\mathbf{x}:\ f(\mathbf{x}) > 0\}, \quad \mathscr{E} = \{\mathbf{x}:\ f(\mathbf{x}) = 0\} \tag{1.6}$$

соответственно. Предполагается, что $f(\mathbf{x})$ – гладкая функция в R^n, причем гладкая поверхность $\mathscr{E}$ разделяет n-мерные области $\mathscr{E}_-$ и $\mathscr{E}_+$.

Будем считать, что для достаточно больших значений параметра N сила с потенциалом (1.2), (1.3) реализует двустороннюю связь

$$f(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^n \tag{1.7}$$

а силы с потенциалом (1.2), (1.4) реализуют одностороннюю связь

$$f(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \mathbf{x} \in R^n \tag{1.8}$$

Так как все введенные выше функции гладкие, уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial U_N}{\partial \mathbf{x}}, \quad L = T - U \tag{1.9}$$

2. Установившиеся движения. Согласно теории Рауса [1–5], установившиеся движения рассматриваемой системы можно найти как критические точки потенциала

$$W(\mathbf{x}; N) = U(\mathbf{x}) + U_N(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

Они определяются соотношениями

$$W_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; N) = U_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + Nf(\mathbf{x})f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.2}$$

имеющими место как для потенциала (1.2), (1.3), так и для потенциала (1.2), (1.4) в области $\mathscr{E} \cup \mathscr{E}_+$. Для потенциала (1.2), (1.4) в области $\mathscr{E}_-$ уравнения установившихся движений имеют вид

$$W_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; N) = U_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0$$

Введем переменную

$$\lambda = Nf(\mathbf{x})$$

как это было сделано ранее [5]. Тогда система (2.2), состоящая из n уравнений относительно n переменных, оказывается эквивалентной системе

$$U_{\mathbf{x}} + \lambda f_{\mathbf{x}} = 0, \quad f(\mathbf{x}) = \varepsilon\lambda, \quad \varepsilon = N^{-1} \tag{2.3}$$

состоящей из $n + 1$ уравнения относительно $n + 1$ неизвестных. При $\varepsilon \to 0$ второе уравнение преобразуется в уравнение (1.5) поверхности $\mathscr{E}$.

Решение системы (2.3), представленное в виде формального ряда по отношению к параметру ε, имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{x}_1 + \ldots, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \ldots \tag{2.4}$$

причем величины $\mathbf{x}_0$, λ_0 удовлетворяют системе

$$U_{\mathbf{x}}^0 + \lambda_0 f_{\mathbf{x}}^0 = 0, \quad f^0 = 0 \tag{2.5}$$

$$f^0 = f(\mathbf{x}_0), \quad f_{\mathbf{x}}^0 = f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0), \quad U_{\mathbf{x}}^0 = U_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$$

Если матрица

$$\mathbf{A} = U_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}_0) + \lambda_0 f_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}_0) \tag{2.6}$$

невырожденна, то величины $\mathbf{x}_1$, λ_1 могут быть представлены в виде

$$\mathbf{x}_1 = \lambda_0(\mathbf{A}^{-1}f_{\mathbf{x}}^0, f_{\mathbf{x}}^0)^{-1}\mathbf{A}^{-1}f_{\mathbf{x}}^0, \quad \lambda_1 = -\lambda_0(\mathbf{A}^{-1}f_{\mathbf{x}}^0, f_{\mathbf{x}}^0)^{-1}$$

в случае, когда связь напряженная. Так как

$$f(\mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{x}_1 + \ldots) = f^0 + \varepsilon(f^0_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_1) + \ldots = \varepsilon\lambda_0 + \ldots$$

и $\varepsilon > 0$, при $\lambda_0 > 0$ критическая точка располагается внутри области $\mathscr{E}_+$, и связь напряжена вне зависимости от того, является она односторонней или двусторонней. При $\lambda_0 < 0$ критическая точка, удовлетворяющая соотношениям (2.5), располагается внутри области $\mathscr{E}_-$, чего при реализации односторонней связи в рамках сделанных выше предположений быть не может. Наконец, случай $\lambda_0 = 0$ требует рассмотрения более высоких приближений.

3. Необходимые условия устойчивости. Достаточные условия устойчивости найденных установившихся движений в рамках теории Рауса при $N \to \infty$, т.е. при $\varepsilon \to 0$, были установлены ранее [5]. Обратимся к исследованию необходимых условий устойчивости. Прежде всего с помощью введенных выше обозначений представим уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \lambda\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \quad f(\mathbf{x}) = \lambda\varepsilon \tag{3.1}$$

Эти уравнения справедливы всюду, если реализуемая связь – двусторонняя, и в области $\mathscr{E} \cup \mathscr{E}_+$, если реализуемая связь односторонняя. Рассмотрим случай, когда выполнено любое из этих условий. Тогда уравнения движения (3.1), линеаризованные в малой окрестности найденного установившегося движения, имеют вид

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}\delta\ddot{x}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial x_j}\delta\dot{x}_j = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x}_j}\delta\dot{x}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\delta x_j - \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta\lambda - \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\delta x_j \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_j = \varepsilon\delta\lambda \tag{3.3}$$

Все частные производные, входящие в уравнения (3.2), (3.3), вычислены в критической точке ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_\varepsilon$, $\dot{\mathbf{x}} = 0$, $\lambda = \lambda_\varepsilon$). Подстановка разложений (2.4) в уравнения (3.2), (3.3) в пределе при $\varepsilon \to 0$ позволяет представить эти соотношения в виде

$$\mathbf{P}\delta\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\delta\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{F}\delta\lambda = 0, \quad (\mathbf{F}, \delta\mathbf{x}) = 0 \tag{3.4}$$

(ср. [7], гл. 5, с. 38). Тогда характеристическое уравнение представимо в виде

$$\det\mathbf{J}(\mu) = 0, \quad \mathbf{J}(\mu) = \left\| \begin{matrix} \mathbf{H}(\mu) & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{H}(\mu) = \mathbf{P}\mu^2 + \mathbf{G}\mu + \mathbf{A} \tag{3.5}$$

Матрица $\mathbf{J}(0)$ совпадает с расширенной матрицей второй вариации потенциала, известной из [4] для систем, стесненных двусторонней связью, и из [5] для систем, стесненных односторонней связью.

На самом деле подстановка соотношений

$$\delta\mathbf{x} = e^{\mu t}\delta\mathbf{x}_0, \quad \delta\lambda = e^{\mu t}\delta\lambda_0 \tag{3.6}$$

в уравнение (3.4) дает

$$\mathbf{H}(\mu)\delta\mathbf{x}_0 + \mathbf{F}\delta\lambda_0 = 0, \quad (\mathbf{F}, \delta\mathbf{x}_0) = 0 \tag{3.7}$$

откуда и следует сформулированное утверждение. Более того, так как

$$\delta\mathbf{x}_0 = -\mathbf{H}^{-1}(\mu)\mathbf{F}\delta\lambda_0$$

из второго соотношения (3.7) имеем

$$(\mathbf{F}, \mathbf{H}^{-1}(\mu)\mathbf{F}) = 0 \qquad (3.8)$$

В простейшей ситуации, когда имеются лишь две степени свободы, из соотношения (3.8) следует немедленно утверждение [7] о возможной стабилизации системы при наложении новой связи.

Замечание. Разлагая определитель (3.5) по последнему столбцу, получаем многочлен степени $2(n-1)$. Это означает, что применение расширенной матрицы позволяет заранее исключить пару нулевых корней, получающихся при прямом вычислении определителя нерасширенной матрицы.

4. Структура характеристического многочлена системы с тремя степенями свободы, на которую наложена одна связь. Пусть

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}, \quad G = \begin{Vmatrix} 0 & g_3 & -g_2 \\ -g_3 & 0 & g_1 \\ g_2 & -g_1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{F} = \operatorname{col}(f_1, f_2, f_3)$$

Тогда характеристическое уравнение определено соотношением

$$\begin{vmatrix} \mu^2 + a_1 & g_3\mu & -g_2\mu & f_1 \\ -g_3\mu & \mu^2 + a_2 & g_1\mu & f_2 \\ g_2\mu & -g_1\mu & \mu^2 + a_3 & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.1)$$

Функция в левой части равенства (4.1) четна по μ. Следовательно, полагая $\nu = \mu^2$ и меняя знак, получаем

$$a\nu^2 + b\nu + c = 0$$
$$a = \sum_{(1,2,3)} f_1^2, \quad b = \sum_{(1,2,3)} f_1^2(a_2 + a_3) + \left[\sum_{(1,2,3)} f_1 g_1\right]^2, \quad c = \sum_{(1,2,3)} f_1^2 a_2 a_3 \qquad (4.2)$$

Более того, так как найденное установившееся движение предполагается неособым, можем считать, что

$$a = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1 \qquad (4.3)$$

Необходимые условия устойчивости оказываются выполненными, если оба корня уравнения (4.2) вещественны и отрицательны. В силу последнего предположения эти условия имеют вид

$$b^2 - c > 0, \quad b > 0, \quad c > 0 \qquad (4.4)$$

Замечание. Вообще говоря, рассмотренная задача выглядит как более простая по отношению к задаче о существовании и устойчивости периодических решений систем, стесненных односторонними связями. По публикациям на данную тему, восходящим, вероятно, к [8–11], имеются подробные обзоры [12–15].

5. Обобщенная задача трех тел. Чтобы проиллюстрировать полученные результаты, рассмотрим плоскую задачу о движении тросовой связки двух массивных точек, взаимодействующих с третьей массивной точкой силами ньютоновского притяжения. Эта задача была рассмотрена [15] (см. также [16]) в предположении о том, что точки связаны нерастяжимым безмассовым стержнем и образуют гантель; было, в частности, показано, что в пространстве параметров имеются области, такие, что для соответствующих значений этих параметров оказывается возможной гироскопическая стабилизация "треугольных" установившихся движений.

В качестве обобщения этих результатов условия существования и устойчивости стационарных движений были рассмотрены для широкого класса возможных потенциалов взаимодействия между точками, образующими гантель [17].

Чтобы применить полученные результаты к задаче, описанной выше, оказывается достаточно исследовать знак силы, реализующей соответствующую связь. Если r_1 и r_2 – расстояния от точки m_0 соответственно до точек m_1 и m_2, образующих гантель, α – угол между m_0m_1 и m_0m_2, то приведенный потенциал имеет вид [17]

$$W = \frac{p^2}{2J} + \Pi + E(l), \quad l = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha)^{1/2} \tag{5.1}$$

где $\Pi = -\gamma m_0(m_1/r_1 + m_2/r_2)$ – ньютоновский потенциал, E – потенциал взаимодействия между точками m_1 и m_2, p – постоянная циклического интеграла. Функция

$$J = \frac{1}{m}[m_1(m_0+m_2)r_1^2 + m_2(m_0+m_1)r_2^2 - 2m_1m_2r_1r_2\cos\alpha], \quad m = m_0 + m_1 + m_2$$

описывает момент инерции всей системы относительно ее центра масс.

Уравнения критических точек приведенного потенциала (5.1), т.е. уравнения установившихся конфигураций, имеют вид [17]

$$\frac{\partial W}{\partial r_1} = -\frac{p^2}{mJ^2}[m_1(m_0+m_2)r_1 - m_1m_2r_2\cos\alpha] + \gamma\frac{m_0m_1}{r_1^2} +$$

$$+ \frac{r_1 - r_2\cos\alpha}{l}E'(l) = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2) \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \left[-\frac{p^2}{mJ^2}m_1m_2\sin\alpha + \frac{E'(l)}{l}\right]r_1r_2\sin\alpha = 0 \tag{5.3}$$

Согласно уравнениям (5.3), имеется класс "треугольных движений" таких, что

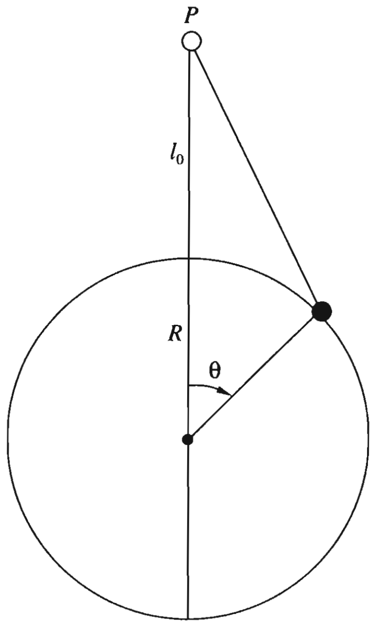
$$E'(l) = \frac{p^2 l}{mJ^2}m_1m_2\sin\alpha \tag{5.4}$$

Предположим, что сопротивление троса на растяжение задается потенциалом

$$E(l) = \begin{cases} N(l-l_0)^2/2, & l \ge 0 \\ 0, & l < 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Тогда в силу выражений (5.4), (5.5) на классе треугольных движений трос растянут, и результаты, касающиеся существования и устойчивости установившихся движений, полученные ранее [15, 16] для связи, реализованной с помощью стержня, остаются справедливыми и для связи, реализованной с помощью троса.

6. О реализации односторонних связей в особенных случаях. Использование больших потенциальных сил для моделирования односторонних связей в особенных



случаях требует определенных предосторожностей. В качестве примера рассмотрим движение тяжелой бусинки, свободно скользящей по вертикальному обручу в виде окружности радиуса R. Пусть θ – угол отклонения бусинки от восходящей вертикали (фигура), бусинка связана безмассовым тросом с точкой P, расположенной над вертикальным диаметром окружности на расстоянии $\rho = R + l_0$ от ее центра, l_0 – длина троса в нерастянутом состоянии.

Найдем положения равновесия системы и исследуем их устойчивость в случае, когда потенциал упругих сил имеет вид

$$U_E = \frac{N}{2}\varphi(l), \quad \varphi(l) = \begin{cases} 0, & l < l_0 \\ (l - l_0)^2, & l \geq 0 \end{cases}$$

где l – длина растянутого троса. В силу теоремы косинусов

$$l = [\rho^2 - 2\rho R\cos\alpha + R^2]^{1/2}, \quad \partial l/\partial\theta = \rho R\sin\theta/l$$

Так как потенциальная энергия однородного гравитационного поля равна $U_N = mgR\cos\theta$, равновесия определяются из уравнения

$$\partial U/\partial\theta = \varphi(\theta)\sin\theta = 0, \quad U = U_N + U_E, \quad \varphi(\theta) = -mgR + N(l - l_0)\rho R/l$$

Рассматриваемая система имеет четыре различных равновесия. Верхнему равновесию соответствует $\theta = 0$, нижнему – $\theta = \pi$. Также имеются два наклонных симметричных равновесия, для которых длина троса определена как

$$l = Nl_0\rho/(N\rho - mg)$$

Наклонные равновесия стремятся к верхнему при $N \to \infty$. Они существуют при $N > N^*$, где

$$N^* = mg(R + \rho)/(2R\rho)$$

При $N = N^*$ наклонные равновесия совпадают с нижним, а при $N < N^*$ трос оказывается ненатянутым.

Чтобы исследовать устойчивость найденных равновесий, вычислим вторую производную потенциала. Она имеет вид

$$\partial^2 U/\partial\theta^2 = \varphi'(\theta)\sin\theta + \varphi(\theta)\cos\theta$$

На верхнем и нижнем равновесиях первое слагаемое в правой части обращается в нуль. На наклонных равновесиях в нуль обращается второе слагаемое. Кроме того, на верхнем равновесии

$$\partial^2 U(0)/\partial\theta^2 = -mgR$$

и оно неустойчиво при всех значениях упругой постоянной N. На нижнем равновесии

$$\partial^2 U(\pi)/\partial\theta^2 = 2(N - N^*)R^2\rho/(R + \rho)$$

Оно неустойчиво при $N > N^*$ и устойчиво при $N < N^*$. Исследование промежуточной ситуации требует вычисления более высоких производных.

Таким образом, полученные результаты несколько удручают. На самом деле единственное кинематически возможное положение системы с нерастяжимым тросом оказывается неустойчивым, т.е. физически нереализуемым при любом, сколь угодно большом значении упругой постоянной. При этом устойчивыми, физически реализуемыми, оказываются наклонные равновесия, которые исчезают в случае, когда упругая постоянная принимает сколь угодно большие значения.

Рассмотренный пример показывает, что имеет смысл введение понятия подвижности системы, основанное на энергетическом критерии. За основу возьмем понятие области возможного движения (см., например, [18]).

Определение. Пусть механическая система, совершающая движение под действием активных сил с потенциалом $U(\mathbf{x})$ и под действием сил с потенциалом $U_N(\mathbf{x})$, реализующих связь в пределе при $N \to \infty$, допускает первый интеграл энергии – Пэнлеве–Якоби

$$\mathcal{J} = T(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) + U(\mathbf{x}) + U_N(\mathbf{x}) = h$$

где $T \geq 0$, причем условие $T = 0$ влечет за собой выполнение равенства $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Область конфигурационного пространства $\mathcal{A}_{N,h} = \{\mathbf{x}: U + U_N \leq h\}$ назовем областью подвижности (ОП) системы на уровне h интеграла энергии Пэнлеве–Якоби. Область конфигурационного пространства, к которой стремится ОП при $N \to \infty$, назовем предельной областью подвижности (ПОП) на уровне h интеграла $\mathcal{J}$.

В рассмотренном выше примере для значений $h < mgR$ ОП оказывается пустой при достаточно больших значениях параметра N. При этих значениях параметра N движение оказывается невозможным при указанных значениях интеграла энергии. В этом случае ПОП также оказывается пустой. Однако при $h \geq mgR$ ОП не пуста при всех значениях параметра N, и движение оказывается возможным. При этом ПОП состоит ровно из одной точки, как и было показано выше.

Ясно, что структура ОП в общем случае существенно зависит от структуры потенциала активных сил.

Автор благодарен Х. Трогеру и Институту механики технического университета Вены за предоставленную возможность плодотворной работы, М. Робертсу за предоставленную возможность участия в Международном коллоквиуме “Геометрия, симметрия и механика. II”, во время работы которого были получены результаты,

составляющие последнюю часть работы, и К. Валле за предоставленную возможность завершения работы над публикацией.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00196), Федеральной целевой программы "Интеграция", а также программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2000.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Routh E.J.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. L.: MacMillan, 1877. 108 p.
2. *Routh E.J.* The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. L.: MacMillan, 1884. 343 p.
3. *Salvadori L.* Un'osservazione su di un criterio di stabilita del Routh // Rend. Accad. Sci. fis. e math. Soc. naz. lett. ed arti. Napoli. 1953. V. 20. № 1–2. P. 269–272.
4. *Рубановский В.Н., Степанов С.Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функций Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904–912.
5. *Буров А.А.* О существовании и устойчивости равновесий механических систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами // ПММ. 2003. Т. 67. № 2. С. 222–230.
6. *Дерябин М.В., Козлов В.В.* К теории систем с односторонними связями // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 531–539.
7. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 535 с.
8. *Rubin H., Ungar P.* Motions under a strong constraining force // Communs Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. № 1. P. 65–87.
9. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Computer methods in Appl. Math. and eng. 1972. V. 1. № 1. P. 1–16.
10. *Козлов В.В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550–554.
11. *Иванов А.П.* Об устойчивости в системах с неудерживающими связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 725–732.
12. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
13. *Журавлев В.Ф., Фуфаев Н.А.* Механика систем с неудерживающими связями. М.: Наука, 1993. 240 с.
14. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
15. *Белецкий В.В., Пономарева О.Н.* Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // Космич. исслед. 1190. Т. 28. Вып. 5. С. 664–675.
16. *Beletskii V.V.* Reguläre und chaotische Bewegung starrer Körper. Stuttgart: Teubner, 1995. 148 S.
17. *Буров А.А., Паскаль М., Степанов С.Я.* Обобщенная задача об установившихся движения и их устойчивости системы трех материальных точек // ПММ. 2000. Т. 62. Вып. 4.
18. *Козлов В.В.* Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Издво УдГУ, 1995.

Москва
e-mail: aburov@ccas.ru

Поступила в редакцию
6.VI.2003