УДК 531.36

© 2004 г. В. С. Сергеев

О ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Проводится исследование систем с последействием, состояние которых задается нелинейными интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерры с малыми возмущениями. В предположении, что линеаризованная невозмущенная система асимптотически устойчива и что возмущения, а также нелинейные члены содержат функции времени, экспоненциально стремящиеся к периодическим функциям, рассматривается вопрос о существовании в таких системах предельно периодических движений. В качестве примера рассмотрены предельно периодические движения твердой пластины (модели крыла) при нестационарном обтекании воздушным потоком.

1. Предельно периодические движения. Рассмотрим систему с последействием, описываемую интегродифференциальным уравнением типа Вольтерры

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int_0^t K(t-s)x(s)ds + F(x, y, z, t) + \mu(\Phi(t) + D_1(t)x + D_2(t)y + D_3(t)z) \qquad (1.1)$$

$$x, y, z \in R^n, \quad x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$$

в котором A – постоянная $(n \times n)$-матрица, $\Phi(t) = \Phi_p(t) + \Phi_e(t)$ – непрерывная при $t \in R^+$ вектор-функция, причем $\Phi_p(t)$ – ее периодическая часть: $\Phi_p(t + T) = \Phi_p(t)$ и $\Phi_e(t) \to 0$ экспоненциально при $t \to +\infty$, $\mu \geq 0$ – малый параметр, $D_i(t) = D_{ip}(t) + D_{ie}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ – матрицы с элементами, аналогичными $\Phi(t)$, $F(x, y, z, t)$ – непрерывная по $t \in R^+$ функция, принадлежащая классу C^1 по x, y, z из некоторой окрестности

$$B(x, y, z) = \{x, y, z \in R^n : \|x\|, \|y\|, \|z\| < \delta_1\}$$

Непрерывная $(n \times n)$-матрица $K(t)$ задана при $t > 0$ и удовлетворяет оценке

$$\|K(t)\| \leq C'\frac{\exp(-\beta' t)}{t^{\rho'}}, \quad C', \beta', \rho' = \mathrm{const}, \quad C' > 0, \quad \beta' > 0, \quad 0 \leq \rho' < 1 \qquad (1.2)$$

В уравнении (1.1)

$$y = \int_0^t k(t-s)\varphi(x(s), s)ds \qquad (1.3)$$

и z – аналитический функционал в форме абсолютно сходящегося ряда Фреше

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j(k)=1}^{n} \int_0^t \ldots \int_0^t K^{j(k)}(t-s_1, \ldots, t-s_k)x_{j_1}(s_1)\ldots x_{j_k}(s_k)ds_1\ldots ds_k \qquad (1.4)$$

$$j(k) = j_1, \ldots, j_k$$

где $k(t-s)$ – непрерывная $(n \times n)$-матрица-функция, заданная на множестве

$$J'_1 = \{(t, s) \in R^2: 0 \le s < t < +\infty\}$$

а непрерывные вектор-функции $K^{j(k)}(t - s_1, \ldots, t - s_k)$ заданы на множестве

$$J'_k = \{(t, s_1, \ldots, s_k) \in R^{k+1}: 0 \le s_j < t < +\infty, \ j = 1, \ldots, k\}$$

Вектор-функция $\varphi(x, t)$ $(\varphi(0, t) \equiv 0)$ класса C^1 по x в некоторой окрестности $B'(x) = \{x \in R^n: \|x\| < \delta_1\}$ и непрерывна, ограничена по t при $t \in R^+$.

Будем считать, что интегральные ядра $k(t-s)$, $K^{j(k)}(t - s_1, \ldots, t - s_k)$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\|k(t-s)\| \le C\frac{\exp(-\beta(t-s))}{(t-s)^{\rho_0}} \tag{1.5}$$

$$\left\|K^{j(k)}(t_1, \ldots, t_k)\right\| \le C\left(\frac{\exp(-\beta_1 t_1 - \ldots - \beta_k t_k)}{(t_1 \ldots t_k)^{\rho}}\right), \quad t_j = t - s_j \tag{1.6}$$

в которых $C > 0$, $\beta > 0$, $\beta_j > 0$ $(j = 1, \ldots, k)$, $0 \le \rho_0 < 1$, $0 \le \rho < 1$ – постоянные, и существует число β_0 такое, что $0 < \beta_0 \le \beta_j$ для всех допустимых j и k.

Относительно нелинейных вектор-функций $\varphi(x, t) = \mathrm{col}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $F(x, y, z, t) = \mathrm{col}(F_1, \ldots, F_n)$ в уравнении (1.1) и представлении (1.3) будем предполагать, что для них построены мажоранты Ляпунова [1]

$$\varphi^*(u) = \mathrm{col}(\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*), \quad F^*(u, \upsilon, w) = \mathrm{col}(F_1^*, \ldots, F_n^*)$$

удовлетворяющие для произвольного ε такого, что $0 \le \varepsilon \le 1$, следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} &\varphi_i^*(\varepsilon u) \le \varepsilon\varphi_i^*(u), \quad u \in B'(u), \quad i = 1, \ldots, n \\ &F_i^*(\varepsilon u, \varepsilon\upsilon, \varepsilon w) \le \varepsilon^{1+\delta} F_i(u, \upsilon, w), \quad \delta > 0, \quad (u, \upsilon, w) \in B(u, \upsilon, w) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Члены уравнения (1.1), содержащие параметр μ, будем рассматривать как возмущение; при этом, если в возмущении присутствуют нелинейные члены, будем считать их отнесенными к функции $F(x, y, z, t)$.

Отметим, что функционалы вида (1.4) Вольтерра [2] предложил использовать в механике деформируемых тел для описания реологических свойств материалов, выражая таким способом зависимость между напряжением и деформацией. Особенности типа (1.2), (1.5), (1.6) встречаются, в частности, в интегральных ядрах, характеризующих свойства таких материалов, как, например, полимеры [3, 4].

Определения. Будем говорить, что непрерывная функция $x(t)$, определенная для $t \in R^+$, является экспоненциально предельно периодической, если она представима в виде

$$x(t) = x_p(t) + x_e(t) \tag{1.8}$$

где $x_p(t)$ – периодическая функция с периодом $T > 0$, и функция $x_e(t)$ такова, что $x_e(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, причем

$$\|x_e(t)\| \le C''\exp(-\alpha' t), \quad C'' > 0, \quad \alpha' > 0 \tag{1.9}$$

Класс таких функций обозначим через $\mathrm{lpe}(T, -\alpha')$.

Будем также называть движение, описываемое функцией $x(t)$, предельно периодическим, если $x(t) \in \mathrm{lpe}(T, -\alpha')$.

Класс функций $x_e(t)$, удовлетворяющих неравенству (1.9), будем обозначать через $e_1(-\alpha')$.

Аналогичным образом, если непрерывная функция $K(t_1, \ldots, t_k)$ $(t_j = t - s_j)$, заданная на множестве J'_k, удовлетворяет неравенству (1.6) при $0 < \beta_0 < \beta_j$ $(j = 1, \ldots, k)$, будем относить ее к классу $e_k(-\beta_0)$.

Таким образом, функции $\Phi(t)$, $D_i(t)$ в уравнении (1.1), входящие в постоянно действующее возмущение, являются функциями экспоненциально предельно периодическими и $\Phi(t), D_i(t) \in \operatorname{lpe}(T, -\beta'')$ $(i = 1, 2, 3)$ для некоторого $\beta'' > 0$. При этом периодические части $\Phi_p(t)$, $D_{ip}(t)$ функций $\Phi(t)$, $D_i(t)$ – ограниченные функции для $t \in R^+$, так что

$$\|\Phi_p(t)\|, \|D_{ip}(t)\| \le C_1, \quad C_1 = \text{const} > 0 \tag{1.10}$$

Уточним теперь свойства векторов $\varphi(x, t)$, $F(x, y, z, t)$ как функций переменной t. Будем считать, что при всех фиксированных $x \in B'(x)$ либо $(x, y, z) \in B(x, y, z)$ справедливо включение $\varphi(t) \in \operatorname{lpe}(T, -\beta^0)$ либо $F(x, y, z, t) \in \operatorname{lpe}(T, -\beta^0)$ $(\beta^0 > 0)$ соответственно, т.е., согласно равенству (1.8), имеют место представления

$$\varphi(x, t) = \varphi_p(x, t) + \varphi_e(x, t), \quad F(x, y, z, t) = F_p(x, y, z, t) + F_e(x, y, z, t) \tag{1.11}$$

Исследуем структуру общего решения уравнения (1.1), (1.3), (1.4) в окрестности точки $x = 0$ в предположении, что отвечающее (1.1) невозмущенное линейное однородное уравнение с нижним пределом интегрирования s обладает фундаментальной матрицей $X(t - s)$ $(X(0) = E_n)$, подчиненной неравенству

$$\|X(t-s)\| \le C\exp(-\alpha(t-s)), \quad C, \alpha = \text{const} > 0 \tag{1.12}$$

т.е. нулевое решение линеаризованного однородного уравнения для уравнения (1.1) асимптотически устойчиво. Поставим вопрос о существовании предельно периодических решений уравнения (1.1), (1.3), (1.4) с начальным условием $x_0 = x(0) \in B''(x_0) \in B'(x_0)$. Отметим что при указанных выше предположениях (1.5)–(1.7), (1.12), уравнение (1.1)–(1.4) таково, что для него точка $x = 0$ устойчива при постоянно действующих возмущениях [5].

Теорема. Пусть для уравнения (1.1), (1.3), (1.4) выполнены оговоренные выше условия непрерывности или гладкости функций $k(t)$, $K(t)$, $K^{j(k)}(t_1, \ldots, t_k)$, $\Phi(t)$, $D_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, $\varphi(x, t)$, $F(x, y, z, t)$, причем входящие в малое возмущение функции удовлетворяют включению $\Phi(t), D_i(t) \in \operatorname{lpe}(T, -\beta'')$ $(\beta'' > 0)$, а также при каждых фиксированных $(x, y, z) \in B(x, y, z)$ справедливо свойство $\varphi(x, t), F(x, y, z, t) \in \operatorname{lpe}(T, -\beta^0)$ $(\beta^0 > 0)$. Пусть выполнены неравенства (1.2), (1.5), (1.6), (1.12). Пусть существуют мажоранты Ляпунова $\varphi^*(x)$, $F^*(x, y, z)$, удовлетворяющие соотношениям (1.7).

Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что общее решение уравнения (1.1), (1.3), (1.4) $x(t, x_0, \mu) \in \operatorname{lpe}(T, -\gamma)$ для некоторого $\gamma > 0$ при $\|x_0\| < \delta$, $\mu < \delta$, т.е. это решение представляется в виде

$$x(t, x_0, \mu) = x_p(t, \mu) + x_e(t, x_0, \mu) \tag{1.13}$$

где $x_p(t, \mu)$ – периодическое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int_0^\infty K(s)x(t-s)ds + F_p(x, y, z, t) + \mu(\Phi_p(t) + D_{1p}(t)x + D_{2p}(t)y + D_{3p}(t)z)$$

$$y(t) = \int_0^\infty k(s)\varphi_p(x(t-s), t-s)ds \tag{1.14}$$

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j(k)=1}^{n}\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}K^{j(k)}(s_1, \ldots, s_k)x_{j_1}(t-s_1)\ldots x_{j_k}(t-s_k)ds_1\ldots ds_k$$

и $F_p(x, y, z, t)$, $\varphi_p(x(t), t)$ – периодические по t части функций $F(x, y, z, t)$, $\varphi(x(t), t)$ в их представлениях (1.11).

Доказательство. Будем строить общее решение уравнения (1.1), (1.3), (1.4) в окрестности нуля методом последовательных приближений, используя для этого интегральное уравнение

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t-s)(F(x(s), y(s), z(s), s) +$$

$$+\mu(\Phi(s) + D_1(s)x(s) + D_2(s)y(s) + D_3(s)z(s))ds \tag{1.15}$$

которое эквивалентно уравнению (1.1) вместе с начальным условием $x(0) = x_0$, и интегральные представления (1.3), (1.4).

Пусть $x^{(k)}(t)$, $y^{(k)}(t)$, $z^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, \ldots$) – последовательные приближения, получаемые на основании формул (1.15), (1.3), (1.4) подстановкой в правую часть соотношения (1.15) найденных на предыдущем шаге вычислений величин $x^{(k-1)}(t)$, $y^{(k-1)}(t)$, $z^{(k-1)}(t)$ и в правые части соотношений (1.3), (1.4) величины $x^{(k)}(t)$, при этом полагаем, что

$$x^{(1)}(t) = X(t)x_0 + \mu\int_0^t X(t-s)\Phi(s)ds \tag{1.16}$$

Обозначим интегральный член в равенстве (1.16) через $X^{(1)}(t)$ и преобразуем его, учитывая структуру $\Phi(t)$, к виду

$$X^{(1)}(t) = \mu\int_0^t X(s)(\Phi_p(t-s) + \Phi_e(t-s))ds = \psi^{(1)}(t) + \chi^{(1)}(t)$$

где

$$\begin{aligned}
\psi^{(1)}(t) &= \mu\int_0^{\infty} X(s)\Phi_p(t-s)ds \\
\chi^{(1)}(t) &= -\mu\int_t^{\infty} X(s)\Phi_p(t-s)ds + \mu\int_0^t X(s)\Phi_e(t-s)ds
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Проанализируем свойства функций (1.17). Имеем

$$\psi^{(1)}(t+T) = \mu\int_0^{\infty} X(s)\Phi_p(t+T-s)ds = \mu\int_0^{\infty} X(s)\Phi_p(t-s)ds = \psi^{(1)}(t) \tag{1.18}$$

т.е. $\psi^{(1)}(t)$ – периодическая функция. Для вектор-функции $\chi^{(1)}(t)$, учитывая, что $\Phi(t) \in$ $\in \mathrm{lpe}(T, -\beta'')$ и, следовательно, выполнены неравенства типа (1.9), (1.10), а также (1.12), получаем оценку

$$\|\chi^{(1)}(t)\| \le \mu C\left(C_1\int_t^{\infty}\exp(-\alpha s)ds + C''\int_0^t \exp(-\alpha s)\exp(-\beta''(t-s))ds\right) =$$

$$= \mu C\left[\frac{C_1}{\alpha}\exp(-\alpha t) + \frac{C''}{\beta''-\alpha}(\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta'' t))\right] \tag{1.19}$$

При получении неравенства (1.19) ради единообразия оценивания полагалось $\alpha \neq \beta''$, что всегда может быть достигнуто изменением одной из постоянных, например α, с сохранением неравенства вида (1.12). Положим $0 < \gamma < \min(\alpha, \beta, \beta_0, \beta^0, \beta'')$, тогда, согласно неравенству (1.19), $\chi^{(1)}(t) \in e_1(-\gamma)$, и, поскольку $X(t) \in e_1(-\alpha)$, получаем из соотношений (1.16), (1.18), (1.19)

$$x^{(1)}(t) \in \mathrm{lpe}(T, -\gamma) \tag{1.20}$$

Следовательно, если $x^{(1)}(t) = \mathrm{col}(x_1^{(1)}(t), \ldots, x_n^{(1)}(t))$, то можно считать, что

$$\left|x_i^{(1)}(t)\right| \le u_i^{(1)}(x_0, \mu) = \mathrm{const}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Рассмотрим вектор-функцию $y^{(1)}(t)$, которую, согласно соотношениям (1.3), (1.11), (1.20), запишем таким образом:

$$y^{(1)}(t) = \int_0^t k(t-s)\varphi(x_p^{(1)}(s) + x_e^{(1)}(s), s)ds = Y_p^{(1)}(t) + Y_e^{(1)}(t)$$

где

$$Y_p^{(1)}(t) = \int_0^\infty k(s)\varphi_p(x_p^{(1)}(t-s), t-s)ds$$

$$Y_e^{(1)}(t) = -\int_t^\infty k(s)\varphi_p(x_p^{(1)}(t-s), t-s)ds + \tag{1.21}$$

$$+\int_0^t k(s)[\varphi(x_p^{(1)}(t-s) + x_e^{(1)}(t-s), t-s) - \varphi_p(x_p^{(1)}(t-s), t-s)]ds$$

Функция $Y_p^{(1)}(t)$, заданная сходящимся интегралом для $t \in R^+$, аналогична функции $\psi^{(1)}(t)$ (1.17) и является периодической с периодом T.

Покажем, что $Y_e^{(1)}(t) \in e_1(-\gamma')$ для некоторого $\gamma' > 0$.

Действительно, непрерывная ограниченная при $t \to +\infty$ функция

$$\int_t^\infty k(s)\varphi_p(x^{(1)}(t-s), t-s)ds \tag{1.22}$$

экспоненциально убывает и стремится к нулю при $t \to +\infty$ и, ввиду неравенства (1.5), принадлежит классу $e_1(-\beta)$. Оценим, используя условие Липшица для функции $\varphi(x, t)$ при $x \in B'(x)$, интеграл

$$I(t) = \int_0^t k(s)[\varphi(x_p^{(1)}(t-s) + x_e^{(1)}(t-s), t-s) - \varphi_p(x_p^{(1)}(t-s), t-s)]ds$$

Имеем

$$\|I(t)\| \le \left\| \int_0^t k(s)[\varphi_p(x_p^{(1)}(t-s) + x_e^{(1)}(t-s), t-s) - \varphi_p(x_p^{(1)}(t-s), t-s)]ds \right\| +$$

$$+ \left\| \int_0^t k(s)\varphi_e(x_p^{(1)}(t-s) + x_e^{(1)}(t-s), t-s)ds \right\| \le$$

$$\le C_L \int_0^t \|k(s)\| \left\| x_e^{(1)}(t-s) \right\| ds + C' \int_0^t \|k(s)\| \exp(-\gamma(t-s))ds \le$$

$$\le (C_L C_0 + C')C\exp(-\gamma t) \int_0^t \frac{\exp((\gamma-\beta)s)}{s^{\rho_0}} ds \qquad (1.23)$$

где $C_L > 0$ – постоянная Липшица, $C_0 > 0$ – постоянная в неравенстве типа (1.9) для функции $x_e^{(1)}(t)$ и $C' > 0$ – аналогичная постоянная для функции $\varphi_e(x, t)$ при всех $x \in B'(x)$. Разбивая в последнем из неравенств (1.23) интеграл на два с пределами интегрирования 0 и 1, а также 1 и t, получаем оценку типа (1.9). Следовательно, $Y_e^{(1)}(t) \in e_1(-\gamma)$ и $y^{(1)}(t) \in \mathrm{lpe}(T, -\gamma)$.

Проанализируем структуру вектор-функции $z^{(1)}(t)$, представляющей собой ряд (1.4), в котором функции $x_{j_r}(s)$ принимают значения $x_{j_r}^{(1)}(s)$. Обозначим член этого ряда с индексом $j(k)$ через $I^{j(k)}(t)$ и покажем, что $I^{j(k)}(t) \in \mathrm{lpe}(T, -\gamma)$, т.е. $I^{j(k)}(t) = I_p^{j(k)}(t) + I_e^{j(k)}(t)$. Представим функцию

$$I^{j(k)}(t) = \int_0^t \ldots \int_0^t K^{j(k)}(t-s_1, \ldots, t-s_k)(x_{j_1p}^{(1)}(s_1) + x_{j_1e}^{(1)}(s_1))\ldots(x_{j_kp}^{(1)}(s_k) + x_{j_ke}^{(1)}(s_k))ds_1\ldots ds_k$$

в виде суммы функций

$$I_p^{j(k)}(t) = \int_0^t \ldots \int_0^t K^{j(k)}(t-s_1, \ldots, t-s_k)x_{j_1p}^{(1)}(t-s_1)\ldots x_{j_kp}^{(1)}(t-s_k)ds_1\ldots ds_k$$

$$I_e^{j(k)}(t) = I^{j(k)}(t) - I_p^{j(k)}(t)$$

Периодичность первой из них очевидна, а свойство $I_e^{j(k)}(t) \in e_1(-\gamma)$ устанавливается так же, как такое же свойство функции $Y_e^{(1)}(t)$ (1.21), поскольку при оценивании функции $I_e^{j(k)}(t)$ входящие в нее кратные интегралы переходят ввиду (1.6) в произведения однократных интегралов типа (1.22) и разностей интегралов, фигурирующих в верхней строке неравенства (1.23). Поэтому доказательство указанного свойства проводится аналогично. Итак, ряд $z^{(1)}(t) \in \mathrm{lpe}(T, -\gamma)$.

Во втором приближении функции $x^{(2)}(t)$, $y^{(2)}(t)$, $z^{(2)}(t)$ определяются соотношением

$$x^{(2)}(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t-s)[\mu(\Phi(s) + D_1(s)x^{(1)}(s) +$$

$$+ D_2(s)y^{(1)}(s) + D_3(s)z^{(1)}(s)) + F(x^{(1)}(s), y^{(1)}(s), z^{(1)}(s), s)]ds \tag{1.24}$$

следующим из формулы (1.15), и соотношениями (1.3), (1.4), в правых частях которых положено $x(t) = x^{(2)}(t)$. Поскольку функция $F(x, y, z, t)$ является экспоненциально предельно периодической по t при фиксированных x, y, z и $x^{(1)}(t)$, $y^{(1)}(t)$, $z^{(1)}(t) \in \mathrm{lpe}(T, -\gamma)$, функция $F(x^{(1)}(t), y^{(1)}(t), z^{(1)}(t), t)$ будет экспоненциально предельно периодической, как и функции $\Phi(t)$, $D_i(t)$. Поэтому, повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся, что $x^{(2)}(t)$, $y^{(2)}(t)$, $z^{(2)}(t) \in \mathrm{lpe}(T, -\gamma)$. В силу свойств функции F интегральный оператор в правой части соотношения (1.24) будет сжимающим.

Подобным же образом в общем случае устанавливается свойство функций $x^{(k)}(t)$, $y^{(k)}(t)$, $z^{(k)}(t) \in \mathrm{lpe}(T, -\gamma)$, если $x^{(k-1)}(t)$, $y^{(k-1)}(t)$, $z^{(k-1)}(t) \in \mathrm{lpe}(T, -\gamma)$ для некоторого $\gamma > 0$.

Было показано [5] (теорема 2), что последовательные приближения $x^{(k)}(t)$, $y^{(k)}(t)$, $z^{(k)}(t)$ сходятся при $\|x_0\| < \delta$, $\mu < \delta$ для некоторого $\delta > 0$ соответственно к функциям $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, которые являются решением уравнения (1.1), (1.3), (1.4). Это устанавливается построением мажорирующего уравнения для

$$u(x_0, \mu) \gg x(t, x_0, \mu), \quad \upsilon(x_0, \mu) \gg y(t, x_0, \mu), \quad w(x_0, \mu) \gg z(t, x_0, \mu)$$

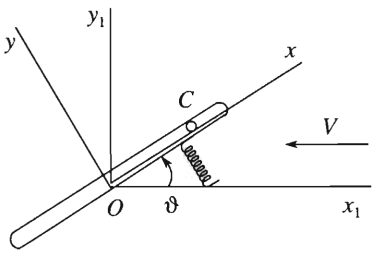
где

$$u(x_0, \mu) = \lim_{k \to +\infty} u^{(k)}(x_0, \mu), \quad \upsilon(x_0, \mu) = \lim_{k \to +\infty} \upsilon^{(k)}(x_0, \mu), \quad w(x_0, \mu) = \lim_{k \to +\infty} w^{(k)}(x_0, \mu)$$

и $u^{(k)}$, $\upsilon^{(k)}$, $w^{(k)}$ – мажорирующие последовательности для $x^{(k)}(t, x_0, \mu)$, $y^{(k)}(t, x_0, \mu)$, $z^{(k)}(t, x_0, \mu)$. Последние функции принадлежат классу $\mathrm{lpe}(T, -\gamma)$, и, как это следует из построения последовательных приближений $x_p^{(k)}$, $y_p^{(k)}$, $z_p^{(k)}$, периодические функции $x_p(t, \mu)$, $y_p(t, \mu)$, $z_p(t, \mu)$ являются решением уравнения (1.14) при $x_0 = 0$ и $\mu < \delta$, а само решение $x(t, x_0, \mu)$ представляется в виде (1.13).

Следует заметить, что периодические решения интегродифференциальных уравнений типа Вольтерры с бесконечным последействием, к которым относятся уравнения (1.14), рассматривались многими авторами (см., например, [6–9]). В монографии [7], где рассматривались общие вопросы теории периодических решений и исследовались частные уравнения, относящиеся к некоторым приложениям, содержится значительная библиография по данному вопросу. Проводилось исследование периодических решений для интегродифференциальных уравнений с верхним пределом интегрирования в виде периодической функции [8]. В [6, 7] предполагалось, что периодические решения представляются рядами Фурье. Доказательство сходимости последовательных приближений базировалось [6] на методе мажорирующих уравнений.

2. Предельно периодические движения крыла. Рассмотрим задачу о вращательных движениях крыла (тонкой твердой пластины) вокруг продольной горизонтальной оси при нестационарном обтекании воздушным потоком [10]. Будем проводить исследование в рамках предложенной С.М. Белоцерковским модели нестационарного обтекания [11], основанной на введении интегральных членов в выражения для действующих на крыло аэродинамических сил и их моментов.



Обозначим через ϑ угол поворота пластины, отсчитываемый в вертикальной плоскости от горизонтальной неподвижной оси Ox_1 (фигура). На фигуре изображено сечение крыла вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс C крыла. Точка C имеет координаты x_0, y_0 в системе координат Oxy, неизменно связанной с пластиной. Невозмущенный поток, набегающий на пластину, движется горизонтально с постоянной скоростью $\mathbf{V}_0$ параллельно оси Ox_1. В креплении крыла действуют вязкоупругие силы, которые, можно считать, вызваны вязкоупругой пружиной. Момент этих сил перпендикулярен вертикальной плоскости Ox_1y_1 и имеет величину L. Представим зависимость L от угла ϑ, характеризующего деформацию пружины, функционалом в форме ряда Вольтерры–Фреше [2, 3] типа (1.4), считая, что момент меняет только знак при изменении знака деформации $\vartheta' = \vartheta_0 + \vartheta$,

$$L = -l\vartheta' + \int_0^t L'(t-s)\vartheta'(s)ds + \int_0^t\int_0^t\int_0^t L^{(3)}(t-s_1, t-s_2, t-s_3)\vartheta'(s_1)\vartheta'(s_2)\vartheta'(s_3)ds_1ds_2ds_3 + \dots \quad (2.1)$$

где l – модуль упругости при кручении, ϑ' – полная деформация пружины и постоянная ϑ_0 выбирается из условия, чтобы значение $\vartheta = 0$ было положением равновесия пластины при стационарном обтекании в отсутствии реологических свойств пружины. Ядра релаксации $L'(t)$ и $L^{(k)}$ $(t_1, \dots, t_k)$ $(k = 3, 5, \dots)$ в представлении (2.1) – непрерывные функции, удовлетворяющие неравенству (1.6).

Будем считать, что угол атаки (угол между плоскостью крыла и вектором относительной скорости потока в точке A передней кромки) выражен через угол ϑ. Тогда момент M аэродинамических сил, действующих на крыло при нестационарном обтекании [11, 10], запишем, выделяя в явной форме нелинейные члены до третьего порядка включительно,

$$M = m_0 + m_1\dot{\vartheta} + m_2\vartheta + m'\vartheta^3 + m''\dot{\vartheta}^3 + \int_0^t I_1(t-s)\ddot{\vartheta}(s)ds + \int_0^t I_2(t-s)\dot{\vartheta}(s)ds + I_1(t)\dot{\vartheta}(0) + I_2(t)\vartheta(0) + M' \quad (2.2)$$

где m_0, m_1, m_2, m', m'' – постоянные, функции $I_1(t)$, $I_2(t) \in C^1$ и M' – нелинейные члены выше третьего порядка.

Скорость $\mathbf{V}$ возмущенного набегающего потока будем считать направленной по вектору $\mathbf{V}_0$ и будем полагать, что алгебраические величины V и V_0 этих векторов связаны соотношением

$$V = V_0 + \mu\upsilon(t) \quad (2.3)$$

где $\mu \ll 1$ и $\upsilon(t)$ – непрерывная предельно периодическая функция класса $\mathrm{lpe}(T, -\gamma)$ $(\gamma > 0)$.

Для возмущенного потока момент $\tilde{M}$ аэродинамических сил, зависящий от V (2.3), будем задавать формулой (2.2), в которой постоянные m_j ($j = 0, 1, 2$), m', m'' и функции $I_i(t)$ ($i = 1, 2$) заменены соответственно на величины

$$\tilde{m}_j(t) = (1+\mu\psi_j(t))m_j, \quad \tilde{m}'(t) = (1+\mu\psi'(t))m'$$
$$\tilde{m}''(t) = (1+\mu\psi''(t))m'', \quad \tilde{I}_i(t) = (1+\mu\chi_i(t))I_i(t) \qquad (2.4)$$

где функции $\psi_j(t)$, $\psi'(t)$, $\psi''(t)$, $\chi_i(t) \in \mathrm{lpe}(T, \gamma)$.

Уравнение вращательных движений пластины запишем в форме системы ($x_1 = \dot{\vartheta}$, $x_2 = \vartheta$)

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1,2}\left[a_j x_j + \int_0^t K_j(t-s)x_j(s)ds + \mu\left(\int_0^t K_j'(t,s)x_j(s)ds + a_j'(t)x_j\right)\right] + \mu\Phi(t) + F$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \qquad (2.5)$$

в которой на основании формул (2.1), (2.2), (2.4)

$$a_1 = (m_1 + I_1(0))/I, \quad a_2 = (mgx_0\sin\vartheta_0 + mgy_0\cos\vartheta_0 - l + m_2 + I_2(0))/I$$

$$a_1'(t) = a_1\psi_1(t), \quad a_2'(t) = (m_2 + I_2(0))\psi_2(t)/I$$

$$K_1(t) = (dI_1(t)/dt)/I, \quad K_2(t) = (dI_2(t)/dt + L'(t))/I$$

$$K_1'(t,s) = K_1(t-s)\chi_1(t), \quad K_2'(t,s) = K_2(t-s)\chi_2(t) + L''(t,s)$$
$$\Phi(t) = (m_0\psi_0(t) + \varphi'(t))/I, \quad F = F_2 + F_3 + F' \qquad (2.6)$$

$$F_2 = \frac{1}{I}\left[\frac{1}{2}mg(x_0\cos\vartheta_0 - y_0\sin\vartheta_0)x_2^2 + \int_0^t\int_0^t K^{(2)}(t, s_1, s_2)x_2(s_1)x_2(s_2)ds_1ds_2\right]$$

$$F_3 = \frac{1}{I}\left[\tilde{m}''x_1^3 + \tilde{m}'x_2^3 - \frac{1}{6}mg(x_0\sin\vartheta_0 + y_0\cos\vartheta_0)x_2^3 + \right.$$

$$\left. + \int_0^t\int_0^t\int_0^t K^{(3)}(t, s_1, s_2, s_3)x_2(s_1)x_2(s_2)x_2(s_3)ds_1ds_2ds_3\right]$$

где mg – вес тела, I – его момент инерции относительно оси вращения, проходящей через точку O, F' – совокупность членов более 3-го порядка. Функции $\varphi'(t)$, $L''(t, s)$, $K^{(2)}(t, s_1, s_2)$, $K^{(3)}(t, s_1, s_2, s_3)$, не детализируемые здесь, определяются на основании формулы (2.1).

Выражения для них нетрудно составить, например, в частном случае ([3], с. 607), если интегральные ядра в представлении (2.1) имеют следующую структуру:

$$L^{(2k+1)}(s_1, s_2, \ldots, s_{2k+1}) = l_{2k+1}\prod_{i=1}^{2k+1}\tilde{L}(s_i), \quad l_{2k+1} = \mathrm{const}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

и тогда соотношение (2.1) принимает вид

$$L = -l\vartheta' + y' + \sum_{i=1}^{\infty} l_{2i+1}\tilde{y}^{2i+1} \equiv -l\vartheta' + y' + \tilde{y}^3 S(\tilde{y})$$

$$y' = \int_0^t L'(t-s)\vartheta'(s)ds, \quad \tilde{y} = \int_0^t \tilde{L}(t-s)\vartheta'(s)ds$$

где $S(\tilde{y})$ – голоморфная функция. В частности, если $\vartheta_0 = 0$, то имеем

$$\varphi'(t) \equiv 0, \quad L''(t,s) \equiv 0, \quad K^{(2)}(t, s_1, s_2) \equiv 0$$

и интегральный член в выражении для F_3 (2.6) приводится к виду $l_3\tilde{y}^3/I$.

Будем полагать, что интегральные ядра $K_j(t)$ ($j = 1, 2$) (2.6) удовлетворяют неравенству (1.2). Члены порядка μ, линейные по x_j, в уравнениях (2.5) будем считать возмущением. Функция $\varphi'(t)$ представима в виде $\varphi'(t) = c' + \varphi'_e(t)$, где $c' = \mathrm{const}$ и $\varphi'_e(t) \in e(-\gamma')$ для некоторого $\gamma' > 0$, функция $\Phi(t) \in \mathrm{lpe}(T, -\gamma)$ и все интегральные ядра $K^{(k)}(t, s_1, \ldots, s_k) \in$ $\in e'_k(-\beta_0)$.

Составим для невозмущенного уравнения (2.5) характеристическое уравнение

$$d(\lambda) \equiv \lambda^2 - a_1\lambda - a_2 - \lambda K_1^*(\lambda) - K_2^*(\lambda) = 0 \tag{2.7}$$

где $K_i^*(\lambda)$ – преобразование Лапласа для функции $K_i(t)$ ($i = 1, 2$).

Пусть характеристическое уравнение (2.7) имеет в комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda >$ $> -\beta'$ конечное число корней λ_j ($j = 1, \ldots, L$) и $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$. Тогда выполнено условие (1.12). В силу сделанных в этом разделе предположений для уравнения (2.5), (2.6) справедлива теорема разд. 1 и, следовательно, под влиянием периодической части возмущения потока в пределе будет устанавливаться режим периодических колебаний крыла. Эти периодические колебания, согласно уравнению (1.14), отвечают периодическому решению уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} = {} & a_1(1 + \mu\psi_{1p}(t))\dot{\vartheta} + (a_2 + \mu a'_{2p}(t))\vartheta + \int_0^{\infty}[(K_1(s) + \mu\tilde{K}_1(t,s))\dot{\vartheta}(t-s) + \\ & + (K_2(t,s) + \mu\tilde{K}_2(t,s))\vartheta(t-s)]ds + \mu\Phi_p(t) + F \end{aligned} \tag{2.8}$$

где во всех входящих в F интегралах верхние пределы интегрирования t заменены на ∞. В уравнении (2.8) и, следовательно, в формулах (2.6) функции $\psi(t)$, $\chi(t)$ с различными индексами, а также $\Phi(t)$, заменены соответственно на $\psi_p(t)$, $\chi_p(t)$ с теми же индексами и $\Phi_p(t)$, т.е. на периодические части этих функций. Кроме того, в уравнении (2.8) $\tilde{K}_i(t, s)$ – функции, в которые переходят интегральные ядра $K'_i(t, s)$ ($i = 1, 2$).

В первом приближении периодическое решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\vartheta^{(1)}(t) = \mu\int_0^{\infty} x_{21}(s)\Phi_p(t-s)ds \tag{2.9}$$

где $x_{21}(t)$ – элемент фундаментальной матрицы $X(t) = (x_{ij}(t))$ ($i, j = 1, 2$) в неравенстве (1.12).

Решение (2.9) можно искать и в иной форме [6, 7], если функцию $\Phi_p(t)$ можно представить абсолютно сходящимся рядом Фурье, так что

$$\Phi_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (b_k \sin(k\omega t) + c_k \cos(k\omega t)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.10}$$

Тогда, задавая искомую функцию $\vartheta^{(1)}(t)$ рядом Фурье вида (2.10) с коэффициентами b'_k, c'_k, для определения этих постоянных при каждом k будем иметь систему линейных алгебраических уравнений, определитель которой эквивалентен величине $d(ik\omega)$ в соотношении (2.7) и отличен от нуля при всех k в силу сделанного предположения об отсутствии у характеристического уравнения чисто мнимых корней. Следовательно, указанный ряд может быть построен и будет абсолютно сходящимся вместе с рядами Фурье для первой и второй производных при условии, что функция $\Phi(t)$ обладает, например, кусочно-непрерывной первой производной.

Используя формулы (2.6) для нелинейных членов, можно вычислить третье приближение для периодического режима, удовлетворяющего уравнению (2.8) (с точностью до членов порядка μ^3 включительно).

Скорость стремления предельно периодических решений к периодическим определяется вещественными частями корней характеристического уравнения и показателями экспонент в интегральных ядрах, а также в предельно периодических функциях, которыми задается возмущение.

Рассмотрим пример аналитического определения оценки для указанных вещественных частей и тем самым величины α в неравенстве (1.12). Пусть

$$I_i(t) = d_{i1}\exp(-\gamma_1 t) + d_{i2}\exp(-\gamma_2 t), \quad d_{ij} = \text{const}, \quad \gamma_i = \text{const} > 0, \quad i, j = 1, 2 \tag{2.11}$$

Учитывая представление (2.11), характеристическое уравнение (2.7) запишем в виде

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{d_{ij}\gamma_j\lambda^{2-i}}{\gamma_j + \lambda} = 0 \tag{2.12}$$

Исследуем корни уравнения (2.12) в предположении, что

$$d_{ij} = \mu\tilde{d}_{ij}, \quad 0 < \mu \ll 1, \quad i, j = 1, 2 \tag{2.13}$$

и величины γ_i достаточно велики и что выполнены условия Рауса–Гурвица, т.е. все корни λ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) (занумерованные в порядке убывания вещественных частей) лежат в левой полуплоскости. Представим λ_k в виде

$$\lambda_k = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_k^{(p)}\mu^p \tag{2.14}$$

Имеем

$$\lambda_{1,2}^{(0)} = \frac{1}{2}(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}), \quad \operatorname{Re}\lambda_{1,2}^{(0)} < 0, \quad a_1 < 0, \quad a_2 < 0$$

Рассмотрим случай комплексно-сопряженных величин $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$ и найдем постоянную u_0 для оценки $|\operatorname{Re}\lambda_1| > u_0$. С этой целью получим оценки сверху для модулей корней λ_3, λ_4 уравнения (2.12). Обозначим через $\upsilon_j(\mu)$ ($\upsilon_j(0) = 0, j = 3, 4$) ряды, мажорирующие степенные ряды по μ для величин $\lambda_j - \lambda_j^{(0)}$, в которых положим в соответствии с уравнением (2.12), приведенным к полиномиальному виду, $\lambda_j^{(0)} = -\gamma_{j-2}$ ($\gamma_2 > \gamma_1$). Для нахождения $\upsilon_3(\mu)$ введем мажорирующее уравнение

$$b_1 = |2\gamma_1 - a_1|\upsilon_3 + \upsilon_3^2 + \mu\sum_{i=1}^{2}(\gamma_1+\upsilon_3)^{2-i}\left(\frac{|\tilde{d}_{i1}|\gamma_1}{\upsilon_3} + \frac{|\tilde{d}_{i2}|\gamma_2}{b_0-\upsilon_3}\right) \tag{2.15}$$

$$b_0 = \gamma_2 - \gamma_1, \quad b_1 = |\gamma_1^2 + a_1\gamma_1 - a_1| \neq 0$$

Для получения оценки в явной форме усилим мажорирующее уравнение (2.15), используя для членов, не зависящих от μ, вместо υ_3 и υ_3^2 следующие мажоранты:

$$\upsilon_3 \ll \frac{b_0\upsilon_3}{b_0-\upsilon_3}, \quad \upsilon_3^2 \ll \frac{b_0^2\upsilon_3}{b_0-\upsilon_3}$$

Обозначим через υ_{3*} наименьший положительный корень нового (квадратного) уравнения. Тогда

$$|\lambda_3| < \lambda_1 + \upsilon_{3*} \tag{2.16}$$

Поступая подобным образом, находим соответствующий корень $\upsilon_{4*} > 0$ и оценку другого вещественного корня уравнения (2.12)

$$|\lambda_4| < \gamma_2 + \upsilon_{4*} \tag{2.17}$$

На основании уравнения (2.12), приведенного к полиномиальному виду, имеем

$$\left|\sum_{s=1}^{4}\lambda_s\right| = -a_1 + \gamma_1 + \gamma_2 \tag{2.18}$$

Поскольку $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\mathrm{Re}\lambda_1$, используя соотношения (2.16)–(2.18), получаем искомую оценку

$$|\mathrm{Re}\lambda_1| > u_0 = \frac{1}{2}(-a_1 - \upsilon_{3*} - \upsilon_{4*}) \tag{2.19}$$

Аналогичным образом строится оценка для $|\mathrm{Re}\lambda_1|$ в случае, когда интегральные ядра в представлении (2.2) содержат произвольное конечное число экспонент и задаются формулой

$$I_i(t) = \mu\sum_{s=1}^{p}\tilde{d}_{is}\exp(-\gamma_i t), \quad \tilde{d}_{is} = \mathrm{const}, \quad \gamma_i = \mathrm{const}$$

Оценка типа (2.19) позволяет избежать численного определения корней характеристического уравнения.

В более общей задаче о пространственных движениях крыла под воздействием набегающего воздушного потока при нестационарном обтекании [10] крыло представляется твердым телом (тонкой пластиной) с одной неподвижной точкой. Опора крыла моделируется вязкоупругой пружиной, зависимость напряжения от деформации которой задается в общем случае рядом Вольтерры–Фреше (2.1). Система имеет три степени свободы и ее движение описывается интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерры (1.1). Моменты аэродинамических сил при учете возмущения скорости потока задаются формулами типа (2.2) и (2.4). Если возмущение потока описывается экспоненциально предельно периодическими функциями времени, то, в соответствии с доказанной теоремой, устанавливаются предельно периодические движения крыла, с ростом времени все более и более приближающиеся к периодическим.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00196) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2000.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лика Д.К., Рябов Ю.А.* Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев: Штиинца, 1974. 291 с.
2. *Volterra V.* Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications // Acta Math. 1912. T. 35. P. 295–356.
3. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
4. *Трояновский И.Е.* Об одном методе решения нелинейных интегральных уравнений вязкоупругости // Механика полимеров. 1974. № 3. С. 529–531.
5. *Сергеев В.С.* Об устойчивости в системах с последействием при наличии особенностей в интегральных ядрах // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 968–978.
6. *Рябов Ю.А., Хусанов Д.Х.* Периодические решения интегродифференциального уравнения второго порядка в нерезонансном случае // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34. 5. С. 644–647.
7. *Быков Я.В., Рузикулов Д.* Периодические решения дифференциальных и интегродифференциальных уравнений и их асимптотики. Фрунзе: Илим, 1986. 281 с.
8. *Быков Я.В., Иманалиев М.* О периодических решениях интегродифференциальных уравнений // Исследования по интегродифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Изд-во АН КиргССР. 1961. Вып. 1. С. 145–158.
9. *Burton T.A.* Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. Orlando: Acad. Press, 1985. 337 p.
10. *Сергеев В.С.* Об устойчивости равновесия крыла в нестационарном потоке // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 227–236.
11. *Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.

Москва
e-mail: vsergeev@ccas.ru

Поступила в редакцию
15.V.2003