

УДК 531.36:534.1

© 2004 г. А. П. Сейранян

КАЧЕЛИ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

Исследуется неустойчивость колебаний невесомого стержня с сосредоточенной массой, скользящей вдоль оси стержня по периодическому закону. Это простейшая модель детских качелей. Амплитуда перемещения массы и вязкое трение, обусловленное сопротивлением воздуха, предполагаются малыми, а периодическая функция возбуждения считается произвольной. Получены и исследованы асимптотические формулы для областей неустойчивости (параметрического резонанса) в трехмерном пространстве параметров системы, соответствующие раскачиванию качелей. Приведены примеры.

Задача о качелях, несомненно, относится к классическим задачам механики. Известно, что для раскачивания качелей нужно присесть в среднем вертикальном положении и выпрямляться в крайних положениях, т.е. совершать колебания с частотой, примерно вдвое большей частоты собственных колебаний качелей. Раскачавшись, для поддержания колебаний можно присесть вдвое реже. Несмотря на популярность качелей, в литературе по колебаниям и устойчивости [1–14], где эта задача упоминается, нет сколько-нибудь общих формул для описания областей неустойчивости, объясняющих феномен раскачивания качелей. Ниже задача о неустойчивости качелей решается на основе подхода, связанного с использованием производных матрицы монодромии по параметрам [15–18]. Метод решения задачи является строгим и основан на анализе поведения мультипликаторов Флоке. Краткое содержание результатов статьи изложено в [19].

1. Основные соотношения. Простейшая модель качелей описывается колебаниями невесомого стержня с сосредоточенной массой, скользящей вдоль оси стержня по периодическому закону; эта же схема описывает колебания маятника переменной длины, периодически изменяющейся во времени (фиг. 1). Амплитуда перемещения массы или изменение длины маятника предполагаются малыми. Кроме того, учитывается малое вязкое трение, обусловленное сопротивлением воздуха.

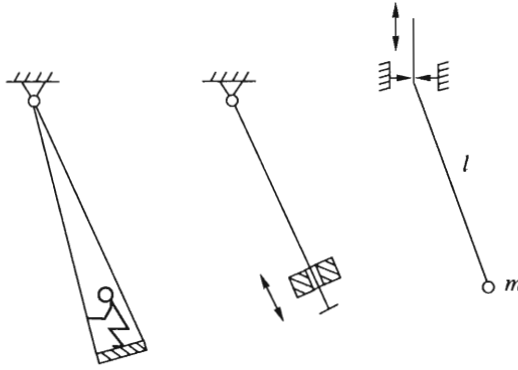
Уравнение движения качелей (маятника переменной длины) [1, 3] выводится с применением теоремы об изменении кинетического момента и с учетом вязкого трения имеет вид

$$(ml^2\ddot{\theta}) + \gamma l^2 \dot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \tag{1.1}$$

где m – масса, l – длина, θ – угол отклонения маятника от вертикали, γ – коэффициент вязкого трения, обусловленного сопротивлением воздуха, g – ускорение свободного падения. Точка обозначает производную по времени t . Предполагается, что длина маятника изменяется по закону

$$l = l_0 + a\varphi(\Omega t), \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau = 0 \tag{1.2}$$

где l_0 – средняя длина маятника, a и Ω – амплитуда и частота возбуждения, соответственно, а $\varphi(\tau)$ – произвольная гладкая периодическая функция периода 2π со средним значением равным нулю. Амплитуда a и коэффициент трения γ предполагаются



Фиг. 1

малыми. Требуется определить, при каких значениях параметров тривиальное положение равновесия системы $\theta = 0$ становится неустойчивым, что приводит к раскачиванию качелей.

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\tau = \Omega t, \quad \varepsilon = \frac{a}{l_0}, \quad \beta = \frac{\gamma}{m\sqrt{gl_0}}, \quad \omega = \frac{1}{\Omega}\sqrt{\frac{g}{l_0}}, \quad x_1 = \theta, \quad x_2 = \frac{l^2\dot{\theta}}{l_0^2\Omega} \quad (1.3)$$

Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \left(\frac{l_0}{l}\right)^2 x_2, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = -\omega^2 \frac{l}{l_0} \sin x_1 - \beta \omega x_2; \quad \frac{l}{l_0} = 1 + \varepsilon \varphi(\tau) \quad (1.4)$$

В этих переменных требование гладкости периодической функции $\varphi(\tau)$ можно ослабить, считая ее лишь кусочно-непрерывной. Подобные переменные использовались [20] для решения задачи оптимального управления.

Правые части первых двух уравнений (1.4) являются нелинейными функциями вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и периодическими по τ с периодом 2π . Уравнения (1.4) явно зависят от трех независимых параметров $\omega, \varepsilon, \beta$, причем последние два считаются малыми:

$$\varepsilon \ll 1, \quad \beta \ll 1 \quad (1.5)$$

Требуется найти области неустойчивости тривиального решения $\mathbf{x} = 0$ (параметрического резонанса) в трехмерном пространстве параметров $\mathbf{p} = (\varepsilon, \beta, \omega)$.

Если задачу о качелях рассмотреть для периодической функции $\varphi(\tau_0 + \tau)$, где τ_0 — некий сдвиг фазы, то эта задача о неустойчивости эквивалентна исходной, в чем можно убедиться, сделав преобразование времени $\tau' = \tau_0 + \tau$. Таким образом, сдвиг фазы периодической функции несуществен для факта неустойчивости движения, однако он оказывает заметное влияние на время раскачивания [20].

2. Решение задачи о неустойчивости. Согласно теореме Ляпунова, об устойчивости и неустойчивости нелинейной системы (1.4) можно судить по линейному приближению [21]. Линеаризация этой системы приводит к уравнениям

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{x} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 & [1 + \varepsilon\varphi(\tau)]^{-2} \\ -\omega^2[1 + \varepsilon\varphi(\tau)] & -\beta\omega \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

Фундаментальная матрица $X(t)$ системы (2.1) находится из матричного дифференциального уравнения с начальным условием

$$\dot{X} = GX, \quad X(0) = I \tag{2.3}$$

где I – единичная матрица, и называется матрицантом. Матрица монодромии (Флоке) определяется равенством $F = X(T)$ [21, 22]. Для исследования устойчивости линейной системы (2.1), (2.2) воспользуемся теорией Флоке, согласно которой линейная система с периодическими коэффициентами устойчива, если все собственные значения ρ (мультипликаторы) матрицы монодромии F по модулю меньше единицы, и неустойчива, если хотя бы один мультипликатор по модулю больше единицы.

Пусть при некотором n -мерном векторе параметров p_0 известна матрица монодромии $F_0 = F(p_0)$. Придадим вектору параметров приращение в виде $p = p_0 + \Delta p$, вследствие чего матрица G , а следовательно, и матрицант $X(t)$ получат приращения. Это соответственно приведет к изменению матрицы монодромии F . Были найдены [15, 16] выражения для первых и вторых производных матрицы монодромии по параметрам в виде интегралов по периоду

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = F_0 \int_0^T H_k(\tau) d\tau \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} = F_0 \left[\int_0^T H_{ij}(\tau) d\tau + \int_0^T H_i(\tau) \left(\int_0^\tau H_j(\zeta) d\zeta \right) d\tau + \int_0^T H_j(\tau) \left(\int_0^\tau H_i(\zeta) d\zeta \right) d\tau \right] \tag{2.5}$$

где

$$H_k(\tau) = X_0^{-1}(\tau) \frac{\partial G}{\partial p_k}(p_0, \tau) X_0(\tau),$$

$$H_{ij}(\tau) = X_0^{-1}(\tau) \frac{\partial^2 G}{\partial p_i \partial p_j}(p_0, \tau) X_0(\tau), \quad i, j, k = 1, \dots, n$$

Нулевой индекс означает, что соответствующая величина берется при $p = p_0$.

Отметим, что для вычисления производных (2.4), (2.5) необходимо лишь знание матрицанта $X_0(t)$ и производных матрицы G по параметрам, вычисленных при $p = p_0$. С помощью производных (2.4), (2.5) приращение матрицы монодромии запишем в виде

$$F(p_0 + \Delta p) = F_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_k} \Delta p_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} \Delta p_i \Delta p_j + \dots \tag{2.6}$$

Знание производных матрицы монодромии позволяет вычислить значения этой матрицы в окрестности точки p_0 и, следовательно, оценить поведение мультипликаторов (собственных значений матрицы монодромии F), ответственных за устойчивость системы (2.1), при изменении параметров.

Если в соотношениях (2.1), (2.2) положить $\varepsilon = 0, \beta = 0$, то из уравнений (2.3) трудно найти матрицант и обратную к нему матрицу:

$$X_0(t) = \begin{vmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{vmatrix}, \quad X_0^{-1}(t) = \begin{vmatrix} \cos \omega t & -\omega^{-1} \sin \omega t \\ \omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

Таким образом, при $\epsilon = 0$, $\beta = 0$ матрица монодромии имеет вид

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{X}_0(2\pi) \quad (2.8)$$

Собственные значения этой матрицы (мультипликаторы) таковы:

$$\rho_{1,2} = \cos 2\pi\omega \pm i \sin 2\pi\omega \quad (2.9)$$

При всех значениях $\omega \neq k/2$ ($k = 1, 2, \dots$) мультипликаторы – комплексно-сопряженные величины, они лежат на единичной окружности (устойчивость). При малом изменении параметров ϵ , β , ω в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (0, 0, \omega)$, $\omega \neq k/2$ ($k = 1, 2, \dots$) в силу непрерывности мультипликаторы остаются комплексно-сопряженными величинами. При этом для мультипликаторов имеем квадратное уравнение вида

$$\rho^2 + A\rho + B = 0 \quad (2.10)$$

где свободный член, согласно формуле Лиувилля [21], описывается выражением

$$B = \exp\left(\int_0^{2\pi} \text{tr} \mathbf{G} dt\right) = \exp(-2\pi\beta\omega) \quad (2.11)$$

Поскольку по теореме Виета из соотношений (2.10), (2.11) при $\beta > 0$ имеем

$$\rho_1\rho_2 = B < 1 \quad (2.12)$$

для комплексно-сопряженных мультипликаторов из неравенства (2.12) следует $|\rho_{1,2}| < 1$. Таким образом, малое изменение параметров ϵ , β , ω , причем $\beta > 0$, в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (0, 0, \omega)$, $\omega \neq k/2$ сдвигает мультипликаторы внутрь единичного круга, что означает асимптотическую устойчивость.

Следовательно, неустойчивость (параметрический резонанс) может возникать лишь в окрестности точек

$$\mathbf{p}_0: \epsilon = 0, \quad \beta = 0, \quad \omega = k/2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

в которых мультипликаторы двукратные: $\rho_1 = \rho_2 = \cos \pi k$.

Для нахождения областей параметрического резонанса разложим матрицу монодромии \mathbf{F} в окрестности точек \mathbf{p}_0 в ряд Тейлора по параметрам ϵ , β и $\Delta\omega = \omega - k/2$:

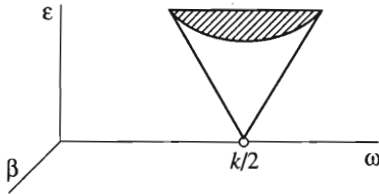
$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \epsilon} \epsilon + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega} \Delta\omega + \dots \quad (2.14)$$

По формулам (2.4) с использованием соотношений (2.2), (2.7), (2.8) вычислим значения производных $\partial \mathbf{F} / \partial \epsilon$, $\partial \mathbf{F} / \partial \beta$ и $\partial \mathbf{F} / \partial \omega$ при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. В результате из равенства (2.6) с точностью до членов первого порядка малости имеем

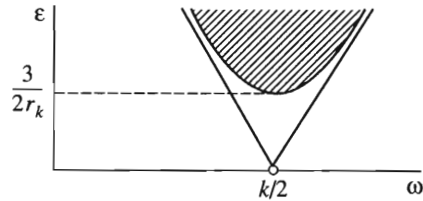
$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \cos \pi k \left\| \begin{array}{cc} 1 + \frac{3}{4} k \pi b_k \epsilon - \frac{1}{2} k \pi \beta & \frac{4}{k} \pi \Delta\omega - \frac{3}{2} \pi a_k \epsilon \\ -k \pi \Delta\omega - \frac{3}{8} k^2 \pi a_k \epsilon & 1 - \frac{3}{4} k \pi b_k \epsilon - \frac{1}{2} k \pi \beta \end{array} \right\| \quad (2.15)$$

Здесь введены коэффициенты Фурье функции $\varphi(\tau)$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \cos k\tau d\tau, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \sin k\tau d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Для матрицы (2.15) найдем приближенные значения мультипликаторов

$$\rho_{1,2} = (-1)^k (1 - k\pi\beta/2) \pm \pi\sqrt{D} \quad (2.17)$$

$$D = k^2 r_k^2 \epsilon^2 - (2\Delta\omega)^2, \quad r_k = \frac{3}{4} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (2.18)$$

Система неустойчива, если хотя бы один из мультипликаторов по модулю больше единицы [21, 22]. При $\beta < 0$ это условие выполнено и система неустойчива, а при $\beta \geq 0$ это условие выполняется лишь при $\sqrt{D} > \beta k/2$. Отсюда с учетом выражения (2.18) получим, что область неустойчивости (параметрического резонанса) лежит внутри половины конуса:

$$k^2 \beta^2 / 4 + 4(\omega - k/2)^2 < k^2 r_k^2 \epsilon^2, \quad \beta \geq 0 \quad (2.19)$$

соединяясь с полупространством $\beta < 0$ (фиг. 2). Области неустойчивости заштрихованы. Неравенство (2.19) можно также представить в несколько более удобном виде:

$$(\beta/2)^2 + (2\omega/k - 1)^2 < r_k^2 \epsilon^2, \quad \beta \geq 0 \quad (2.20)$$

Отметим, что формулы (2.19), (2.20) являются аппроксимациями первого приближения для областей неустойчивости. Из них, в частности, следует, что k -я резонансная область в первом приближении зависит только от k -х коэффициентов Фурье периодической функции возбуждения.

Положив в неравенстве (2.19) $\beta = 0$, получим зоны параметрического резонанса при отсутствии трения

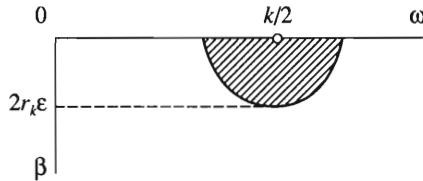
$$-kr_k/2 < \epsilon^{-1}(\omega - k/2) < kr_k/2 \quad (2.21)$$

Сечение конуса (2.19) плоскостью $\beta = \text{const} \geq 0$ дает зону параметрического резонанса, ограниченную гиперболой (фиг. 3). Асимптоты этой гиперболы находятся из неравенств (2.21). При наличии трения ($\beta > 0$) минимальная амплитуда возбуждения резонанса, согласно неравенству (2.19), составляет

$$\epsilon_{\min} = \beta / (2r_k) \quad (2.22)$$

Сечение области (2.19) плоскостью $\epsilon = \text{const}$ представляет собой половину эллипса с полуосями $|\omega - k/2| = kr_k \epsilon / 2$ и $\beta = 2r_k \epsilon$ (фиг. 4). Заметим, что с увеличением коэффициента трения β ширина зоны резонанса по частоте ω сужается и при $\beta > 2r_k \epsilon$ исчезает.

Проанализируем эволюцию резонансных областей при увеличении номера резонанса k . Известно, что если периодическая функция $\varphi(\tau)$ непрерывна вместе со своими производными s -го порядка, то для коэффициентов Фурье a_k и b_k имеют место



Фиг. 4

соотношения $a_k k^{s+1} \rightarrow 0$, $b_k k^{s+1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому для непрерывно дифференцируемых функций величины kr_k стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Это означает, что конус (2.19) с увеличением k сужается. Отсюда также следует, что при фиксированном β и с увеличением k минимальная амплитуда возбуждения резонанса (2.22) неограниченно возрастает. Это объясняет тот факт, что раскачать качели легче при низших резонансах $k = 1, 2$, в то время как добиться резонанса при более высоких k требует больших амплитуд возбуждения и усилий.

Возвращаясь к размерным величинам, из соотношений (1.3), (2.13) получим, что раскачивание качелей происходит при частотах возбуждения Ω , близких к критическим:

$$\Omega_k = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{g}{l_0}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Отметим, что $\sqrt{g/l_0}$ – частота собственных колебаний маятника со средней длиной l_0 . Соответствующие области резонанса, согласно формуле (2.20), описываются неравенствами

$$\frac{\gamma^2 l_0}{4gm^2} + \left(\frac{\Omega}{\Omega_k} - 1 \right)^2 < \frac{r_k^2 a^2}{l_0^2} \quad (2.24)$$

аналогичными неравенствам, описывающим области неустойчивости маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса [17]. Отличие состоит в зависимости правых частей неравенств от номера резонанса k . Это отличие, видимо, объясняется тем, что в уравнение колебаний маятника с колеблющейся точкой подвеса входит ускорение, пропорциональное квадрату частоты возбуждения.

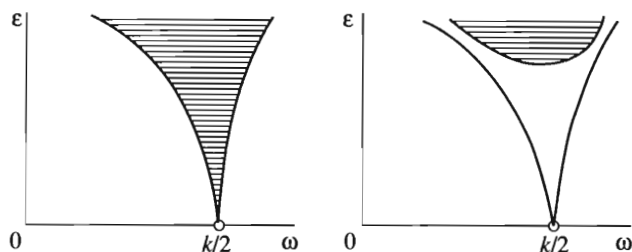
3. Вырожденный случай. В случае $a_k = 0$, $b_k = 0$ величина $r_k = 0$ и аппроксимации первого порядка (2.19), (2.20) вырождаются в прямую $\beta = 0$, $\omega = k/2$. В этом случае для более точного нахождения областей резонанса нужно использовать аппроксимации более высокого порядка.

Ввиду вырождения линейных членов по ε в формулах (2.14), (2.15) для матрицы монодромии в этом случае имеем приближенное выражение

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \varepsilon^2} \varepsilon^2 + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega} \Delta \omega + \dots \quad (3.1)$$

Точка \mathbf{p}_0 определена формулой (2.13). Производя вычисления по формуле (2.5) с использованием соотношений (2.2), (2.7), (2.8), получим

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \cos \pi k \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{2} k \pi \xi_k \varepsilon^2 - \frac{1}{2} k \pi \beta & \frac{4}{k} \pi \Delta \omega + \pi (\zeta_k + \eta_k) \varepsilon^2 \\ -k \pi \Delta \omega + \frac{1}{4} k^2 \pi (\zeta_k - \eta_k) \varepsilon^2 & 1 - \frac{1}{2} k \pi \xi_k \varepsilon^2 - \frac{1}{2} k \pi \beta \end{vmatrix} \quad (3.2)$$



Фиг. 5

В этой формуле использованы обозначения для коэффициентов

$$\begin{aligned} \xi_k &= -\frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2(t) \sin kt dt + \frac{3k}{4\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \int_0^t \varphi(\tau) \cos k\tau d\tau dt \\ \zeta_k &= \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2(t) \cos kt dt + \frac{3k}{4\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \int_0^t \varphi(\tau) \sin k\tau d\tau dt \\ \eta_k &= \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2(t) dt - \frac{9k}{4\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin kt \int_0^t \varphi(\tau) \cos k\tau d\tau dt \end{aligned} \tag{3.3}$$

Система неустойчива, если хотя бы одно из собственных значений (мультипликаторов) матрицы (3.2) по модулю больше единицы. Проводя выкладки, аналогичные предыдущим, получим, что область неустойчивости (параметрического резонанса) в вырожденном случае $a_k = 0, b_k = 0$ определяется неравенствами

$$\beta^2 + 4 \left(\frac{2\omega}{k} - 1 + \frac{\eta_k \epsilon^2}{2} \right)^2 < R_k^2 \epsilon^4, \quad \beta \geq 0 \tag{3.4}$$

$$R_k = \sqrt{\xi_k^2 + \zeta_k^2} \tag{3.5}$$

Заметим, что при $\eta_k \neq 0$ области резонанса (3.4) в отличие от (2.19) не симметричны относительно плоскости $\omega = k/2$. Если $R_k > |\eta_k|$, то области резонанса лежат по обе стороны от плоскости $\omega = k/2$, а в случае $R_k \leq |\eta_k|$ – по одну сторону от этой плоскости.

Сечение области (3.4) плоскостью $\beta = \text{const} \geq 0$ дает зону резонанса, ограниченную обобщенной гиперболой. На фиг. 5 показан случай $R_k > |\eta_k|$, когда зоны резонанса (заштрихованы) лежат по обе стороны от вертикали $\omega = k/2$. Из неравенства (3.4) непосредственно найдем минимальное значение амплитуды, при которой возникает параметрический резонанс,

$$\epsilon_{\min} = \sqrt{\beta/R_k}$$

Для гладких функций $\varphi(\tau)$ эта величина стремится к бесконечности при неограниченном росте k .

При отсутствии трения ($\beta = 0$) из формулы (3.4) получаются неравенства, ограничивающие частоту резонанса двумя параболами (фиг. 5):

$$\omega_k^- < \omega < \omega_k^+; \quad \omega_k^\pm = \frac{k}{2} \pm \frac{\epsilon^2 k}{4} (R_k \mp \eta_k) \tag{3.6}$$

В размерных величинах из неравенств (3.4) с учетом соотношений (1.3) получим

$$\frac{\gamma^2 l_0}{4gm^2} + \left(\frac{\Omega}{\Omega_k} - 1 + \frac{\eta_k \left(\frac{a}{l_0}\right)^2}{2} \right)^2 < \frac{R_k^2 \left(\frac{a}{l_0}\right)^4}{4} \quad (3.7)$$

Критические частоты Ω_k определены формулой (2.23). Соответственно при $\gamma = 0$ имеем резонансные зоны

$$\chi_k^- < \Omega < \chi_k^+; \quad \chi_k^\pm = \Omega_k \left(1 \pm \frac{1}{2} \left(\frac{a}{l_0} \right)^2 (R_k \mp \eta_k) \right) \quad (3.8)$$

4. Примеры. В качестве первого примера рассмотрим возбуждение колебаний с помощью периодической кусочно-постоянной функции [5, 12]

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq \pi \\ -1, & \pi < \tau < 2\pi \end{cases} \quad (4.1)$$

Для этой функции имеем

$$a_{2k-1} = 0, \quad b_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)}, \quad r_{2k-1} = \frac{3}{\pi(2k-1)} \quad (4.2)$$

$$a_{2k} = b_{2k} = r_{2k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, согласно неравенствам (2.24), все нечетные области описываются формулой

$$\frac{\gamma^2 l_0}{4gm^2} + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{2k-1}} - 1 \right)^2 < \frac{9a^2}{\pi^2 l_0^2 (2k-1)^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

а четные резонансные области вырождены в первом приближении. Из этой формулы непосредственно видно, как быстро с ростом k сужается конус неустойчивости.

Если в (4.3) положить $\gamma = 0$, то получим формулу для резонансных зон системы без трения

$$\Omega_k^- < \Omega < \Omega_k^+; \quad \Omega_k^\pm = \frac{2}{2k-1} \sqrt{\frac{g}{l_0}} \left(1 \pm \frac{3a}{\pi l_0 (2k-1)} \right) \quad (4.4)$$

При $k = 1$ этот результат совпадает с полученным ранее ([5], формулы (4.74)–(4.76), если в (4.74) положить $\Omega = 2\omega_0 + \Delta\Omega$ и воспользоваться разложением $\text{tg}(\pi\omega_0/(2\Omega)) \approx \approx 1 + \pi\Delta\Omega/(4\omega_0)$; см. также результаты [6], имеющие более сложный вид).

Для четных резонансов по формулам (3.3) вычислим $\xi_{2k} = 0$, $\zeta_{2k} = 3/2$, $\eta_{2k} = 3/4$, $R_{2k} = 3/2$ и, согласно неравенствам (3.7), найдем области неустойчивости

$$\frac{\gamma^2 l_0}{4gm^2} + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{2k}} - 1 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{l_0} \right)^2 \right)^2 < \frac{9}{16} \left(\frac{a}{l_0} \right)^4, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Интересно отметить, что область резонанса остается неизменной для всех критических частот Ω_{2k} .

При отсутствии трения ($\gamma = 0$) по формулам (3.8), (2.23) получим соотношение для резонансных зон

$$\frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l_0}} \left(1 - \frac{9}{8} \left(\frac{a}{l_0} \right)^2 \right) < \Omega < \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l_0}} \left(1 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{l_0} \right)^2 \right) \quad (4.6)$$

В качестве второго примера возьмем периодическую функцию в виде $\varphi(\tau) = \cos\tau - \sin 2\tau$. Тогда

$$a_1 = 1, \quad b_2 = -1, \quad a_2 = b_1 = 0, \quad r_1 = r_2 = 3/4, \quad a_k = b_k = r_k = 0, \quad k = 3, 4, \dots$$

Таким образом, все резонансные области вырождены, кроме первой и второй. Согласно соотношениям (2.23), (2.24), для первой резонансной области имеем

$$\frac{\gamma^2 l_0}{4gm^2} + \left(\frac{\Omega}{2\sqrt{g/l_0}} - 1 \right)^2 < \frac{9a^2}{16l_0^2} \quad (4.7)$$

При отсутствии трения ($\gamma = 0$) отсюда получим соотношение для первой резонансной зоны

$$2\sqrt{\frac{g}{l_0}} \left(1 - \frac{3a}{4l_0} \right) < \Omega < 2\sqrt{\frac{g}{l_0}} \left(1 + \frac{3a}{4l_0} \right) \quad (4.8)$$

Аналогичные соотношения получаются и для второго резонанса. Они соответствуют неравенствам (4.7), (4.8) при замене $2\sqrt{g/l_0}$ на $\sqrt{g/l_0}$.

Полученные области совпадают (в первом приближении) с соответствующими резонансными областями для случая функций $\varphi(\tau) = \cos\tau$ и $\varphi(\tau) = \sin 2\tau$.

Работа выполнена при поддержке международного гранта Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного фонда естественных наук Китайской Народной Республики (02-01-39004) и Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00161).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kauderer H.* Nichtlineare Mechanik. Berlin, etc.: Springer, 1958 = *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
2. *Обморшев А.Н.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1965. 276 с.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
4. *Стрижак Т.Г.* Методы исследования динамических систем типа "маятник". Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
5. *Magnus K.* Schwingungen. Eine Einfuhrung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen. Stuttgart: J. Teubner, 1976 = *Магнус К.* Колебания. Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 303 с.
6. *Чечурин С.Л.* Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 219 с.
7. *Пановко Я. Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1987. 352 с.
8. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
9. *Арнольд В.И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Ижевск. респ. тип., 1999. 283 с.
10. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
11. Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
12. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики. Изд-во МГУ, 2000. 719 с.
13. *Трубецков Д.И., Рожнев А.Г.* Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. 415 с.

14. *Rand R.H.* Lecture Notes on Nonlinear Vibrations. Ithaka, USA: Cornell University. Departm. Theoret. and Appl. Mech., 2003. 134 p. <http://www.tam.cornell.edu/Rand.html>.
15. *Seyranian A.P., Solem F., Pedersen P.* Stability analysis for multiparameter periodic systems // *Archive Appl. Mech.* 1999. V. 69. № 3. P. 160–180.
16. *Seyranian A.P., Mailybaev A.A.* Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. Singapore, etc.: World Scientific, 2004. 420 p.
17. *Сейранян А.П.* Области резонанса для уравнения Хилла с демпфированием // *Докл. РАН.* 2001. Т. 376. № 1. С. 44–47.
18. *Майльбаев А.А., Сейранян А.П.* Параметрический резонанс в системах с малой диссипацией // *ПММ.* 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 779–792.
19. *Сейранян А.П.* Задача о качелях // *Докл. РАН.* 2004. Т. 394. № 3. С. 338–342.
20. *Лавровский Э.К., Формальский А.М.* Оптимальное управление раскачиванием и торможением качелей // *ПММ.* 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 92–101.
21. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
22. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.

Москва
e-mail: seyran@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
17.IX.03