УДК 531.36:62–50

© 2004 г. А. Н. Сиротин

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО ЭНЕРГОЗАТРАТАМ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ С ОДНОВРЕМЕННЫМ ТОРМОЖЕНИЕМ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С НЕФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ

Изучаются некоторые особенности решений задачи оптимального управления пространственной переориентацией и одновременным полным торможением начального вращения абсолютно твердого сферического симметричного тела для случая нефиксированного времени. Управлением служит главный момент приложенных внешних сил. Качество управляемого процесса оценивается интегральным функционалом, который характеризует суммарные энергозатраты, необходимые для осуществления маневра. В частном случае такой функционал имеет вид широко распространенного интегрально-квадратичного. Установлено, что задача оптимального по энергозатратам управления переориентацией и одновременным торможением твердого тела с нефиксированным временем в классе измеримых управлений решений не имеет почти для всех начальных условий. Построена явным образом одна из возможных минимизирующих последовательностей. Показано, что наименьшие значения целевых функционалов в задаче переориентации с торможением и в задаче полного торможения начального вращения совпадают. В частности, переориентации сферически симметричного тела из положения покоя в положение покоя соответствуют нулевые минимальные энергозатраты, если время окончания процесса не фиксировать. При дополнительном предположении о строгой нормированности доказана единственность решения задачи оптимального торможения.

Автором [1, 2] изучались геометрические особенности оптимальных разворотов в положение покоя симметричного тела и исследовались некоторые свойства соответствующих гамильтоновых систем, возникающих в результате применения формализма принципа максимума. К настоящему времени известно большое число работ, посвященных анализу задач оптимального управления угловым движением. Однако в силу существенной нелинейности таких задач результаты, относящиеся к проблеме существования решений и доказательству их оптимальности, практически отсутствуют. В данной работе условия существования решения в задаче оптимальной переориентации с одновременным торможением начального вращения получены на основе преобразований деформации времени.

1. Формулировка задачи. В качестве кинематических параметров углового движения будем использовать элементы матрицы $A \in SO(3)$ направляющих косинусов, которая описывает изменение взаимного положения связанной и инерциальной систем координат с общим началом в центре масс [3, 4]. Уравнения будем записывать в проекциях на связанные оси. Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ – вектор угловой скорости, $S(\boldsymbol{\omega})$ – кососимметричная матрица

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \left\| \begin{matrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ – внешний управляющий момент. Рассматривается пространственный маневр переориентации с одновременным торможением начального вращения сферически симметричного тела с единичным тензором инерции, который описывается краевой задачей

$$\begin{aligned} &A(0) = B, \quad \dot{A} = -S(\boldsymbol{\omega})A, \quad A(T) = C \\ &\boldsymbol{\omega}(0) = \mathbf{v}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u} \text{ п.в. } t \in [0, T], \quad \boldsymbol{\omega}(T) = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Управления $\mathbf{u}(t)$ будут выбираться из класса измеримых функций времени. Время T окончания процесса не фиксировано.

В качестве критерия, характеризующего величину суммарных энергозатрат для выполнения маневра, выберем четырехпараметрическое семейство функционалов вида

$$J = J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = a\|\mathbf{u}\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0, T]), \gamma} + b\|\boldsymbol{\omega}\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0, T]), \sigma}; \quad a > 0, b > 0 \tag{1.2}$$

Норма в пространстве $L^3_p([0, T])$ трехмерных функций вводится обычным образом

$$\|\mathbf{u}\|_{L^3_p([0, T]), \gamma} = \left(\int\limits_{[0, T]} |\mathbf{u}(t)|^p_\gamma d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

μ – мера Лебега, $|\cdot|_\gamma$ и $|\cdot|_\sigma$ – векторные нормы в $\mathbb{R}^3$. Цель управления состоит в минимизации энергозатрат

$$J \to \inf \tag{1.3}$$

где нижняя часть ищется по всем возможным допустимым траекториям, управлениям и времени окончания.

Параметрами являются числа p_1, p_2, r_1, r_2, диапазоны возможных значений которых приняты следующими:

$$1 \le p_1 < \infty, \quad p_2 > 0, \quad 1 < r_1 < \infty, \quad r_2 > 0 \tag{1.4}$$

Такой выбор семейства функционалов объясняется тем, что все они, в определенной степени, характеризуют затраты энергии, а выбор соответствующих значений параметров в большой степени зависит от исследователя и конкретных исполнительных устройств. Наиболее употребителен вариант $p_1 = p_2 = r_1 = r_2 = 2$, соответствующий интегрально-квадратичной задаче. Если же исполнительными устройствами служат реактивные двигатели, то более целесообразен выбор значений $p_1 = p_2 = 1$, $r_1 = r_2 = 2$, поскольку в этом случае первое слагаемое характеризует суммарный расход рабочего тела, а второе – суммарную кинетическую энергию.

Введем необходимые далее определения. Допустимым в краевой задаче (1.1)–(1.3) процессом назовем четверку

$$(T, \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\omega}(t), A(t); t \in [0, T]) \in [0, \infty) \times L^3_{p_1}([0, T]) \times \mathrm{AC}^3([0, T]) \times \mathrm{AC}^{3\times 3}([0, T])$$

элементы которой удовлетворяют дифференциальным уравнениям, граничным условиям и условию $J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) < \infty$. Для заданных $B, C \in \mathrm{SO}(3)$ и $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ через $\mathscr{X}(B, C, \mathbf{v})$ обозначим множество всех допустимых в задаче (1.1)–(1.3) процессов. Задача (1.1)–(1.3) состоит, таким образом, в нахождении

$$\inf_{\mathscr{X}(B, C, \mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \tag{1.5}$$

В силу неочевидного устройства множества $\mathscr{X}(B,\ C,\ \mathbf{v})$ использовать классические результаты (модификации теоремы Вейерштрасса) не представляется возможным. Поэтому далее приводятся рассуждения, позволяющие сделать определенные выводы об особенностях задачи (1.1)–(1.3).

2. Минимизирующие последовательности в задаче переориентации. Очевидно, $\mathscr{X}(B, C, \mathbf{v}) \neq \varnothing$ для любого выбора граничных условий. В нелинейной задаче (1.1)–(1.3) имеется возможность построить решение, используя пространственно-временную декомпозицию. А именно, покажем, что минимизирующая последовательность процессов может быть сконструирована как последовательность двух, следующих один за другим маневров: полное торможение и затем переориентация из положения покоя в положение покоя. Таким образом, будет подтверждена оптимальность геометрии хорошо известного допустимого в краевой задаче (1.1) решения в виде двух последовательных плоских разворотов.

Рассмотрим задачу полного торможения с нефиксированным временем

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \mathbf{v}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u} \ \text{ п.в. } t \in [0, T], \quad \boldsymbol{\omega}(T) = 0 \tag{2.1}$$

$$J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \to \inf \tag{2.2}$$

Под допустимым в задаче (2.1), (2.2) процессом будем понимать тройку

$$(T, \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\omega}(t);\ T \in [0, T]) \in [0, \infty) \times L^3_{p_1}([0, T]) \times \mathrm{AC}^3([0, T])$$

элементы которой удовлетворяют почти всюду на $[0, T]$ дифференциальному уравнению, условиям на правом и левом концах и для которой $J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) < \infty$. Для заданного $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ через $\mathscr{Y}(\mathbf{v})$ обозначим множество всех допустимых в краевой задаче (2.1) процессов. В этом случае задача оптимального управления (2.1), (2.2) состоит в нахождении $\inf\limits_{\mathscr{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$.

Снова замечаем, что $\mathscr{Y}(\mathbf{v}) \neq \varnothing$, и вводим обозначение

$$\hat{J}(\mathbf{v}) = \inf_{\mathscr{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) < \infty$$

Если

$$(T, \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\omega}(t), A(t);\ t \in [0, T])$$

– произвольный допустимый процесс в краевой задаче (1.1)–(1.3), то соответствующий ему процесс

$$(T, \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\omega}(t);\ t \in [0, T])$$

допустим в задаче (2.1), (2.2). Поэтому верно неравенство

$$\inf_{\mathscr{X}(B, C, \mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \geq \inf_{\mathscr{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \tag{2.3}$$

Далее будет показано, что, в действительности, верно равенство.

Рассмотрим сначала задачу переориентации с нефиксированным временем окончания из положения покоя в положение покоя

$$\begin{gathered} A(0) = B, \quad \dot{A} = -S(\boldsymbol{\omega})A, \quad A(T) = C \\ \boldsymbol{\omega}(0) = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u} \ \text{ п.в. } t \in [0, T], \quad \boldsymbol{\omega}(T) = 0 \\ J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \to \inf \end{gathered} \tag{2.4}$$

Покажем, что при любом выборе $B, C \in \mathrm{SO}(3)$ верно равенство

$$\inf_{\mathcal{X}(B,\,C,\,0)} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = 0 \tag{2.5}$$

для чего построим соответствующую минимизирующую последовательность следующим образом.

Ясно, что $\mathcal{X}(B, C, 0) \neq \varnothing$, и поэтому выберем из $\mathcal{X}(B, C, 0)$ любой допустимый процесс

$$(T, \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\omega}(t), A(t);\ t \in [0, T])$$

Теперь для каждого натурального k определим новый процесс

$$(T_k, \mathbf{u}_k(t), \boldsymbol{\omega}_k(t), A_k(t);\ t \in [0, T_k])$$

по формулам

$$A_k(kt) = A_1(t), \quad \boldsymbol{\omega}_k(kt) = k^{-1}\boldsymbol{\omega}_1(t); \quad \mathbf{u}_k(kt) = k^{-2}\mathbf{u}_1(t) \text{ п.в.}; \quad t \in [0, T_1]$$

где

$$A_1(t) = A(t), \quad \boldsymbol{\omega}_1(t) = \boldsymbol{\omega}(t), \quad \mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}(t), \quad T_1 = T$$

Эти формулы принимают более удобный вид, если перейти в них к новому времени $\tau = kt$:

$$\begin{gathered} A_k(\tau) = A_1(k^{-1}\tau), \quad \boldsymbol{\omega}_k(\tau) = k^{-1}\boldsymbol{\omega}_1(k^{-1}\tau) \\ \mathbf{u}_k(\tau) = k^{-2}\mathbf{u}_1(k^{-1}\tau) \text{ п.в.}; \quad T_k = kT_1, \quad \tau \in [0, T_k] \end{gathered} \tag{2.6}$$

Данные соотношения описывают простейший вариант деформации времени – преобразование растяжения.

Убедимся, что построенный по формулам (2.6) процесс является допустимым в краевой задаче (2.4). Действительно, условия на левом и правом концах для каждого натурального k выполнены:

$$A_k(0) = A_1(0) = B, \quad A_k(T_k) = A_1(T_1) = C$$

$$\boldsymbol{\omega}_k(0) = k^{-1}\boldsymbol{\omega}_1(0) = 0, \quad \boldsymbol{\omega}_k(T_k) = k^{-1}\boldsymbol{\omega}_1(T_1) = 0$$

Непосредственные вычисления показывают, что для построенного процесса для (п.в.) $\tau \in [0, T_k]$ также верны дифференциальные уравнения задачи (2.4)

$$\dot{A}_k(\tau) = \frac{dA_k(\tau)}{d\tau} = \frac{dA_1(k^{-1}\tau)}{d\tau} = -S(k^{-1}\boldsymbol{\omega}_1(k^{-1}\tau))A_1(k^{-1}\tau) = -S(\boldsymbol{\omega}_k(\tau))A_k(\tau)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_k(\tau) = \frac{d\boldsymbol{\omega}_k(\tau)}{d\tau} = k^{-1}\frac{d\boldsymbol{\omega}_1(k^{-1}\tau)}{d\tau} = k^{-2}\mathbf{u}_1(k^{-1}\tau) = \mathbf{u}_k(\tau)$$

Перейдем к оценке соответствующих значений функционалов. Для каждого натурального k имеем

$$J(T_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\omega}_k) = a\left(\int_{[0,\,T_k]} |\mathbf{u}_k(\tau)|_\gamma^{p_1} d\mu\right)^{\frac{p_2}{p_1}} + b\left(\int_{[0,\,T_k]} |\boldsymbol{\omega}_k(\tau)|_\sigma^{r_1} d\mu\right)^{\frac{r_2}{r_1}} =$$

$$= a\left(\int\limits_{[0,\,kT_1]} \left|k^{-2}\mathbf{u}_1(k^{-1}\tau)\right|_{\gamma}^{p_1} d\mu\right)^{\frac{p_2}{p_1}} + b\left(\int\limits_{[0,\,kT_1]} \left|k^{-1}\boldsymbol{\omega}_1(k^{-1}\tau)\right|_{\sigma}^{r_1} d\mu\right)^{\frac{r_2}{r_1}} =$$

$$= ak^{\frac{p_2}{p_1}(1-2p_1)}\left(\int\limits_{[0,\,T]} |\mathbf{u}(s)|_{\gamma}^{p_1} d\mu\right)^{\frac{p_2}{p_1}} + bk^{\frac{r_2}{r_1}(1-r_1)}\left(\int\limits_{[0,\,T]} |\boldsymbol{\omega}(s)|_{\sigma}^{r_1} d\mu\right)^{\frac{r_2}{r_1}} =$$

$$= ak^{\frac{p_2}{p_1}(1-2p_1)}\|\mathbf{u}\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,\,T]),\,\gamma} + bk^{\frac{r_2}{r_1}(1-r_1)}\|\boldsymbol{\omega}\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0,\,T]),\,\sigma}$$

Поскольку процесс

$$(T, \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\omega}(t), A(t);\ t \in [0, T])$$

был выбран из $\mathcal{X}(B, C, 0)$, то $J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) < \infty$. Следовательно,

$$\|\mathbf{u}\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,\,T]),\,\gamma} < \infty, \quad \|\boldsymbol{\omega}\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0,\,T]),\,\sigma} < \infty$$

и поэтому $J(T_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\omega}_k) < \infty$. Таким образом,

$$(T_k, \mathbf{u}_k(t), \boldsymbol{\omega}_k(t), A_k(t);\ t \in [0, T_k]) \in \mathcal{X}(B, C, 0)$$

для всех натуральных k. Из условий (1.4) получаем

$$\frac{p_2}{p_1}(1-2p_1) < 0, \quad \frac{r_2}{r_1}(1-r_1) < 0$$

Следовательно,

$$J(T_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\omega}_k) \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty$$

что эквивалентно равенству (2.5).

Заметим, что минимизирующая последовательность строится по формулам (2.6) для любого начального допустимого процесса из $\mathcal{X}(B, C, 0)$.

Перейдем к построению минимизируемой последовательности в исходной задаче (1.1)–(1.3). Пусть

$$\{(t_n, \mathbf{u}_n(t), \boldsymbol{\omega}_n(t);\ t \in [0, t_n])\} \in \mathcal{Y}(\mathbf{v}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

– произвольная минимизирующая последовательность допустимых процессов в задаче (2.1), (2.2), т.е.

$$J(t_n, \mathbf{u}_n, \boldsymbol{\omega}_n) \to \hat{J}(\mathbf{v}) \quad \text{при } \ n \to \infty \tag{2.7}$$

Для каждого натурального m найдем число n_m, а также соответствующий процесс

$$(t_{n_m}, \mathbf{u}_{n_m}(t), \boldsymbol{\omega}_{n_m}(t);\ t \in [0, t_{n_m}]) \in \mathcal{Y}(\mathbf{v})$$

для которых верно неравенство

$$\left|\hat{J}(\mathbf{v}) - J(t_{n_m}, \mathbf{u}_{n_m}, \boldsymbol{\omega}_{n_m})\right| < \frac{1}{2m}$$

В силу условия (2.7) такое возможно.

Пусть $A_{n_m}(t)$ – решение задачи Коши

$$A_{n_m}(0) = B, \quad \dot{A}_{n_m} = -S(\boldsymbol{\omega}_{n_m})A_{n_m}, \quad t \in [0, t_{n_m}]$$

которое соответствует выбранному процессу

$$(t_{n_m}, \mathbf{u}_{n_m}(t), \boldsymbol{\omega}_{n_m}(t);\ t \in [0, t_{n_m}])$$

Для m и n_m сформируем процесс

$$(t_{n_m}, \mathbf{u}_{n_m}(t), \boldsymbol{\omega}_{n_m}(t), A_{n_m}(t);\ t \in [0, t_{n_m}])$$

и по нему, используя формулы (2.6), построим последовательность процессов

$$\{(t_{n_m, k}, \mathbf{u}_{n_m, k}(t), \boldsymbol{\omega}_{n_m, k}(t), A_{n_m, k}(t);\ t \in [0, t_{n_m, k}])\} \subset \mathcal{X}(C_{n_m}, C, \mathbf{v}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

где $C_{n_m} = A_{n_m}(t_{n_m})$. А именно, для каждого натурального k положим

$$t_{n_m, k} = kt_{n_m}, \quad \mathbf{u}_{n_m, k}(\tau) = k^{-2}\mathbf{u}_{n_m}(k^{-1}\tau) \text{ п.в.}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{n_m, k}(\tau) = k^{-1}\boldsymbol{\omega}_{n_m}(k^{-1}\tau), \quad A_{n_m, k}(\tau) = A_{n_m}(k^{-1}\tau), \quad \tau \in [0, t_{n_m, k}]$$

При фиксированных m и n_m выберем число k_m, а также соответствующий процесс

$$(t_{n_m, k_m}, \mathbf{u}_{n_m, k_m}(t), \boldsymbol{\omega}_{n_m, k_m}(t), A_{n_m, k_m}(t);\ t \in [0, t_{n_m, k_m}]) \in \mathcal{X}(C_{n_m}, C, \mathbf{v})$$

для которых верно неравенство

$$J(t_{n_m, k_m}, \mathbf{u}_{n_m, k_m}, \boldsymbol{\omega}_{n_m, k_m}) < \frac{1}{2m}$$

Такое возможно в силу равенства (2.5).

Определим теперь для каждого натурального m функции по формулам

$$\mathbf{u}_m^*(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_{n_m}(t) \text{ п.в.} & t \in [0, t_{n_m}] \\ \mathbf{u}_{n_m, k_m}(t - t_{n_m}) \text{ п.в.} & t \in (t_{n_m}, t_m^*] \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\omega}_m^*(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{n_m}(t) & t \in [0, t_{n_m}] \\ \boldsymbol{\omega}_{n_m, k_m}(t - t_{n_m}) & t \in (t_{n_m}, t_m^*] \end{cases}$$

$$A_m^*(t) = \begin{cases} A_{n_m}(t) & t \in [0, t_{n_m}] \\ A_{n_m, k_m}(t - t_{n_m}) & t \in (t_{n_m}, t_m^*] \end{cases}$$

$$t_m^* = t_{n_m} + t_{n_m, k_m}$$

Непосредственно проверяется, что для каждого $m = 1, 2, \ldots$ верно включение

$$(t_m^*, \mathbf{u}_m^*(t), \boldsymbol{\omega}_m^*(t), A_m^*(t);\ t \in [0, t_m^*]) \in \mathcal{X}(B, C, \mathbf{v})$$

Покажем, что последовательность

$$\{(t_m^*, \mathbf{u}_m^*(t), \boldsymbol{\omega}_m^*(t), A_m^*(t);\ t \in [0, t_m^*])\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

является минимизирующей в исходной задаче (1.1)–(1.3). Действительно, имеем

$$\left|\hat{J}(\mathbf{v}) - J(t_m^*, \mathbf{u}_m^*, \boldsymbol{\omega}_m^*)\right| = \left|\hat{J}(\mathbf{v}) - \left\{a\|\mathbf{u}_m^*\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,t_{n_m}]),\gamma} + b\|\boldsymbol{\omega}_m^*\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0,t_{n_m}]),\sigma}\right\} -\right.$$

$$\left. - \left\{a\|\mathbf{u}_m^*\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([t_{n_m},t_m^*]),\gamma} + b\|\boldsymbol{\omega}_m^*\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([t_{n_m},t_m^*]),\sigma}\right\}\right| \le$$

$$\le \left|\hat{J}(\mathbf{v}) - \left\{a\|\mathbf{u}_m^*\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,t_{n_m}]),\gamma} + b\|\boldsymbol{\omega}_m^*\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0,t_{n_m}]),\sigma}\right\}\right| +$$

$$+ \left|\left\{a\|\mathbf{u}_m^*\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([t_{n_m},t_m^*]),\gamma} + b\|\boldsymbol{\omega}_m^*\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([t_{n_m},t_m^*]),\sigma}\right\}\right| =$$

$$= \left|\hat{J}(\mathbf{v}) - J(t_{n_m}, \mathbf{u}_{n_m}, \boldsymbol{\omega}_{n_m})\right| + J(t_{n_m,k_m}, \mathbf{u}_{n_m,k_m}, \boldsymbol{\omega}_{n_m,k_m}) < \frac{1}{m}$$

Таким образом,

$$J(t_m^*, \mathbf{u}_m^*, \boldsymbol{\omega}_m^*) \to \hat{J}(\mathbf{v}) \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

и из неравенства (2.3) теперь получаем равенство

$$\inf_{\mathscr{X}(B,C,\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \inf_{\mathscr{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \tag{2.8}$$

для произвольных $B, C \in \mathrm{SO}(3)$ и $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Минимизирующие последовательности в задаче (1.1)–(1.3) переориентации с одновременным торможением могут строиться по-разному. Например, может быть выбран другой тип маневра. Однако, как удается показать, все минимизирующие последовательности в задаче с нефиксированным временем окончания обладают одним общим свойством: время окончания процессов управления стремится к бесконечности.

3. Оценка снизу в задаче торможения. Если $\mathbf{v} = 0$, то решение задачи оптимального торможения (2.1), (2.2) очевидно: $T = 0$, и поэтому

$$\inf_{\mathscr{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = 0 \tag{3.1}$$

Если $\mathbf{v} \ne 0$, то при любом выборе параметров функционала $a > 0$, $b > 0$, p_1, $r_1 \in [1; \infty)$ и p_2, $r_2 > 0$ всегда верно неравенство

$$\inf_{\mathscr{Y}(0)} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) > 0 \tag{3.2}$$

Рассуждения проведем от противного. Предположим, что имеется последовательность допустимых процессов

$$\{(t_n, \mathbf{u}_n(t), \boldsymbol{\omega}_n(t);\ t \in [0, t_n])\} \subset \mathscr{Y}(\mathbf{v})$$

которые являются решениями краевой задачи

$$\boldsymbol{\omega}_n(0) = \mathbf{v}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u}_n \ \text{п.в.}\ t \in [0, t_n], \quad \boldsymbol{\omega}_n(t_n) = 0 \tag{3.3}$$

по построению и одновременно

$$J(t_n, \mathbf{u}_n, \boldsymbol{\omega}_n) = a\left(\int\limits_{[0,\, t_n]} |\mathbf{u}_n(t)|_\gamma^{p_1} d\mu\right)^{p_2/p_1} + b\left(\int\limits_{[0,\, t_n]} |\boldsymbol{\omega}_n(t)|_\sigma^{r_1} d\mu\right)^{r_2/r_1} \to 0 \tag{3.4}$$

при $n \to \infty$.

Если $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)^T \in \mathbb{R}^3$ и $\mathbf{u}_n(t) = (u_n^1(t),\ u_n^2(t),\ u_n^3(t))^T$, то из уравнений (3.3) получаем

$$-v^i = \int\limits_{[0,\, t_n]} u_n^i(t) d\mu, \quad i = 1, 2, 3,$$

откуда

$$\left|v^i\right| = \left|\int\limits_{[0,\, t_n]} u_n^i(t) d\mu\right| \le \int\limits_{[0,\, t_n]} \left|u_n^i(t)\right| d\mu, \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.5}$$

Для l_1 – нормы в $\mathbb{R}^3$ введем специальное обозначение:

$$|\mathbf{v}|_{l_1} = \sum_{i=1}^{3} \left|v^i\right|$$

В силу эквивалентности норм в конечномерных пространствах делаем вывод о существовании числа c_γ, $0 < c_\gamma < \infty$, такого, что для любого $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ верно неравенство

$$|\mathbf{v}|_{l_1} < c_\gamma |\mathbf{v}|_\gamma \tag{3.6}$$

Пусть сначала $p_1 = 1$. Тогда из условия (3.4) имеем

$$\int\limits_{[0,\, t_n]} |\mathbf{u}_n(t)|_\gamma d\mu \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

С другой стороны, поскольку $\mathbf{v} \ne 0$, получаем цепочку неравенств

$$0 < |\mathbf{v}|_{l_1} = \sum_{i=1}^{3} \left|\mathbf{v}^i\right| \le \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{[0,\, t_n]} \left|u_n^i(t)\right| d\mu = \int\limits_{[0,\, t_n]} \sum_{i=1}^{3} \left|u_n^i(t)\right| d\mu =$$

$$= \int\limits_{[0,\, t_n]} \left|\mathbf{u}_n(t)\right|_{l_1} d\mu < c_\gamma \int\limits_{[0,\, t_n]} \left|\mathbf{u}_n(t)\right|_\gamma d\mu \tag{3.7}$$

которая приводит к противоречию.

Пусть теперь $p_1 > 1$. Из условия (3.4) получаем

$$\left(\int\limits_{[0,\, t_n]} |\mathbf{u}_n(t)|_\gamma^{p_1} d\mu\right)^{1/p_1} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера

$$\int\limits_{[0,\, t_n]} |\mathbf{u}_n(t)|_\gamma d\mu \le \left(\int\limits_{[0,\, t_n]} |\mathbf{u}_n(t)|_\gamma^{p_1} d\mu\right)^{1/p_1} t_n^{1 - 1/p_1}$$

и поэтому

$$t_n^{1/p_1 - 1} c_\gamma \int\limits_{[0,\, t_n]} |\mathbf{u}_n(t)|_\gamma d\mu \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

Имея в виду неравенство (3.7), приходим к выводу, что $t_n^{-1} \to 0$ при $n \to \infty$. Это, в свою очередь, означает, что числовая последовательность $\{t_n\}$ не ограничена. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем соответствующую минимизирующую последовательность процессов

$$\{(t_{n_k}, \mathbf{u}_{n_k}(t), \boldsymbol{\omega}_{n_k}(t);\ t \in [0, t_{n_k}])\} \subset \mathcal{Y}(\mathbf{v}), \quad k = 1, 2\ldots$$

обладающую свойством $t_{n_k} \geq \varepsilon$ для каждого натурального k. Из неравенства (3.2) теперь получаем

$$\int\limits_{[0,\varepsilon]} |\mathbf{u}_{n_k}(t)|_\gamma^{p_1} d\mu \to 0, \qquad \int\limits_{[0,\varepsilon]} |\boldsymbol{\omega}_{n_k}(t)|_\sigma^{r_1} d\mu \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty \tag{3.8}$$

Из формул (3.3) и (3.4) для каждого $t \in [0, \varepsilon]$ следует

$$|\boldsymbol{\omega}_{n_k}(t) - \mathbf{v}|_{l_1} \leq \int\limits_{[0,t]} |\mathbf{u}_{n_k}(s)|_{l_1} d\mu < c_\gamma \int\limits_{[0,t]} |\mathbf{u}_{n_k}(s)|_\gamma d\mu$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера и условием (3.8). Получим

$$\int\limits_{[0,t]} |\mathbf{u}_{n_k}(s)|_\gamma d\mu \leq t^{1-1/p_1} \left(\int\limits_{[0,t]} |\mathbf{u}_{n_k}(s)|_\gamma^{p_1} d\mu \right)^{1/p_1} \leq \varepsilon^{1-1/p_1} \left(\int\limits_{[0,\varepsilon]} |\mathbf{u}_{n_k}(s)|_\gamma^{p_1} d\mu \right)^{1/p_1} \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty$$

Это, в свою очередь, означает, что $|\boldsymbol{\omega}_{n_k}(t) - \mathbf{v}|_{l_1} \to 0$ при $k \to \infty$ для всех $t \in [0, \varepsilon]$. Но так как в $\mathbb{R}^3$ все нормы эквивалентны, то $|\boldsymbol{\omega}_{n_k}(t) - \mathbf{v}|_\gamma \to 0$, откуда

$$|\boldsymbol{\omega}_{n_k}(t)|_\gamma \to |\mathbf{v}|_\gamma \ \text{ при } \ k \to \infty, \quad t \in [0, \varepsilon]$$

Для последовательности неотрицательных функций $\{|\boldsymbol{\omega}_{n_k}(t)|_\gamma\}_{k \geq 1}$ воспользуемся теоремой Фату ([5], теорема 16.2). Тогда

$$\int\limits_{[0,\varepsilon]} |\mathbf{v}|_\sigma d\mu \leq \liminf_{k \to \infty} \int\limits_{[0,\varepsilon]} |\boldsymbol{\omega}_{n_k}(s)|_\sigma d\mu \tag{3.9}$$

Снова пользуясь неравенством Гёльдера и условием (3.8), получим

$$\int\limits_{[0,\varepsilon]} |\boldsymbol{\omega}_{n_k}(s)|_\sigma d\mu \leq \varepsilon^{1-1/r_1} \left(\int\limits_{[0,\varepsilon]} |\boldsymbol{\omega}_{n_k}(s)|_\gamma^{r_1} d\mu \right)^{1/r_1} \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty$$

Но тогда из неравенства (3.9) следует

$$0 < \varepsilon|\mathbf{v}|_\sigma = \int\limits_{[0,\varepsilon]} |\mathbf{v}|_\sigma d\mu \leq 0$$

Полученное противоречие доказывает требуемое.

4. Существование и единственность решения в задаче торможения. Рассмотрим нетривиальный случай $\mathbf{v} \neq 0$ и установим сначала одно свойство задачи (2.1), (2.2). Пусть

$$(T, \mathbf{u}(t), \omega(t);\ t \in [0, T]) \in \mathcal{Y}(\mathbf{v})$$

Для $\alpha > 0$ определим семейство процессов

$$(T_\alpha, \mathbf{u}_\alpha(t), \boldsymbol{\omega}_\alpha(t);\ t \in [0, T_\alpha])$$

по формулам

$$T_\alpha = \alpha^{-1}T, \quad \mathbf{u}_\alpha(t) = \alpha\mathbf{u}(\alpha t) \text{ п.в.}; \quad \boldsymbol{\omega}_\alpha(t) = \boldsymbol{\omega}(\alpha t), \quad t \in [0, T_\alpha] \tag{4.1}$$

Поскольку

$$J(T_\alpha, \mathbf{u}_\alpha, \boldsymbol{\omega}_\alpha) = \alpha^{\frac{p_2}{p_1}(p_1-1)} a\|\mathbf{u}\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,T]),\gamma} + \alpha^{-\frac{r_2}{r_1}} b\|\boldsymbol{\omega}\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0,T]),\sigma} \tag{4.2}$$

то непосредственная проверка доказывает включение

$$(T_\alpha, \mathbf{u}_\alpha(t), \boldsymbol{\omega}_\alpha(t);\, t \in [0, T_\alpha]) \in \mathcal{Y}(\mathbf{v}) \ \text{ для всех } \ \alpha > 0$$

Для

$$a > 0, \quad b > 0 \ \text{ и } \ p_1 = 1, \quad p_2 > 0, \quad 1 \le r_1 < \infty, \quad r_2 > 0$$

задача (2.1), (2.2) не разрешима в классе измеримых управлений.

Предположим противное. Пусть процесс

$$(T^*, \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\omega}^*(t);\, t \in [0, T^*]) \in \mathcal{Y}(\mathbf{v})$$

– решение рассматриваемой задачи. Поэтому

$$J(T^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\omega}^*) = \inf_{\mathcal{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$$

Для этого процесса по формулам (4.1) строим семейство

$$(T^*_\alpha, \mathbf{u}^*_\alpha(t), \boldsymbol{\omega}^*_\alpha(t);\, t \in [0, T^*_\alpha]) \in \mathcal{Y}(\mathbf{v})$$

допустимых в той же задаче процессов, а из равенства (4.2) делаем вывод, что при $\alpha \to \infty$

$$J(T^*_\alpha, \mathbf{u}^*_\alpha, \boldsymbol{\omega}^*_\alpha) = a\|\mathbf{u}^*\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,T^*]),\gamma} + \alpha^{-\frac{r_2}{r_1}} b\|\boldsymbol{\omega}^*\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0,T^*]),\sigma} \to$$

$$\to a\|\mathbf{u}^*\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,T^*]),\gamma} < a\|\mathbf{u}^*\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,T^*]),\gamma} + b\|\boldsymbol{\omega}^*\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0,T^*]),\sigma} = \inf_{\mathcal{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$$

Неравенство верно, поскольку неравенство (3.2) влечет за собой

$$\|\boldsymbol{\omega}^*\|_{L^3_{r_1}([0,T^*]),\sigma} > 0$$

Полученное противоречие доказывает требуемое.

Пусть теперь $p_1 > 1$ и предположим, что задача (2.1), (2.2) имеет хотя бы одно решение

$$(T^*, \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\omega}^*(t);\, t \in [0, T^*]) \in \mathcal{Y}(\mathbf{v})$$

Строя по этому процессу семейство допустимых процессов по формулам (4.1), для соответствующих значений функционалов получаем функцию

$$f(\alpha) = J(T^*_\alpha, \mathbf{u}^*_\alpha, \boldsymbol{\omega}^*_\alpha) = \alpha^{\frac{p_2}{p_1}(p_1-1)} a\|\mathbf{u}^*\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,T^*]),\gamma} + \alpha^{-\frac{r_2}{r_1}} b\|\boldsymbol{\omega}^*(t)\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0,T^*]),\sigma}$$

которая имеет единственный глобальный минимум в точке

$$\alpha^* = \left\{\frac{r_2}{r_1}\frac{1}{p_1-1}\frac{p_1}{p_2}\frac{b}{a}\frac{\|\boldsymbol{\omega}^*\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0,T^*]),\sigma}}{\|\mathbf{u}^*\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,T^*]),\gamma}}\right\}^s, \quad s = \left(\frac{p_2}{p_1}(p_1-1) + \frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}$$

Так как

$$f(1) = \inf_{\mathcal{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$$

по построению, то из системы неравенств

$$f(\alpha^*) \le f(\alpha), \quad \alpha > 0; \quad f(1) \le f(\alpha^*)$$

и одноэкстремальности $f(\alpha)$ делаем вывод

$$\alpha^* = 1$$

откуда

$$\frac{r_2}{r_1} b \|\boldsymbol{\omega}^*\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0,T^*]),\sigma} = \frac{p_2}{p_1}(p_1 - 1) a \|\mathbf{u}^*\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,T^*]),\gamma}$$

Это, в свою очередь, означает, что имеет место представление

$$\inf_{\mathcal{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = J(T^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\omega}^*) = \left\{1 + \frac{r_1}{r_2}\frac{p_2}{p_1}(p_1 - 1)\right\} a \|\mathbf{u}^*\|^{p_2}_{L^3_{p_1}([0,T^*]),\gamma} =$$

$$= \left\{1 + \frac{r_2}{r_1}\frac{1}{p_1 - 1}\frac{p_1}{p_2}\right\} b \|\boldsymbol{\omega}^*\|^{r_2}_{L^3_{r_1}([0,T^*]),\sigma} \tag{4.3}$$

Предположим теперь, что хотя бы одно из нормированных пространств $(\mathbb{R}^3, |\cdot|_\gamma)$ или $(\mathbb{R}^3, |\cdot|_\sigma)$ является строго нормированным. В этом случае для всех возможных значений (1.4) параметров верно предложение: если задача (2.1), (2.2) имеет решение из $\mathcal{Y}(\mathbf{v})$, то оно единственно (с точностью до эквивалентных управлений).

Рассуждения проведем от противного и предположим, что имеются два допустимых оптимальных процесса. Не теряя общности, можно считать, что для этих процессов время окончания маневра одинаково. Это всегда можно добиться, продолжая тривиальным образом (с нулевым управлением) один из процессов, поскольку конечным положением является состояние покоя. Итак, пусть

$$(T^*, \mathbf{u}_i^*(t), \boldsymbol{\omega}_i^*(t);\, t \in [0, T^*]) \in \mathcal{Y}(\mathbf{v}), \quad i = 1, 2$$

и верны равенства

$$J(T^*, \mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\omega}_i^*) = \inf_{\mathcal{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$$

Используя равенство (4.3), тогда приходим к выводу, что также справедливы равенства

$$\|\mathbf{u}_1^*\|_{L^3_{p_1}([0,T^*]),\gamma} = \|\mathbf{u}_2^*\|_{L^3_{p_1}([0,T^*]),\gamma}, \quad \|\boldsymbol{\omega}_1^*\|_{L^3_{r_1}([0,T^*]),\sigma} = \|\boldsymbol{\omega}_2^*\|_{L^3_{r_1}([0,T^*]),\sigma} \tag{4.4}$$

Введем в рассмотрение множество

$\mathcal{A} = \{t \in [0, T^*]$: функции $\mathbf{u}_1^*(t)$ и $\mathbf{u}_2^*(t)$ не положительно пропорциональны$\}$

Очевидно, множество $\mathcal{A}$ измеримо и предположим, что $\mu(\mathcal{A}) > 0$. Покажем, что это невозможно.

Для определенности считаем, что строго нормированным является пространство $(\mathbb{R}^3, |\cdot|_\gamma)$. В этом случае при любом $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$\left|\lambda\mathbf{u}_1^*(t) + (1-\lambda)\mathbf{u}_2^*(t)\right|_\gamma < \lambda\left|\mathbf{u}_1^*(t)\right|_\gamma + (1-\lambda)\left|\mathbf{u}_2^*(t)\right|_\gamma, \quad t \in \mathcal{A}$$

Следующая цепочка неравенств:

$$\|\lambda\mathbf{u}_1^* + (1-\lambda)\mathbf{u}_2^*\|^{p_1}_{L^3_{p_1}([0,T^*]),\gamma} = \left\|\left|\lambda\mathbf{u}_2^* + (1-\lambda)\mathbf{u}_2^*\right|_\gamma\right\|^{p_1}_{L_{p_1}([0,T^*])} =$$

$$= \int\limits_{[0,T^*]} \left|\lambda \mathbf{u}_1^*(t) + (1-\lambda)\mathbf{u}_2^*(t)\right|_\gamma^{p_1} d\mu =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{A}} \left|\lambda \mathbf{u}_1^*(t) + (1-\lambda)\mathbf{u}_2^*(t)\right|_\gamma^{p_1} d\mu + \int\limits_{[0,T^*]\setminus\mathcal{A}} \left|\lambda \mathbf{u}_1^*(t) + (1-\lambda)\mathbf{u}_2^*(t)\right|_\gamma^{p_1} d\mu <$$

$$< \int\limits_{\mathcal{A}} (\lambda|\mathbf{u}_1^*(t)|_\gamma + (1-\lambda)|\mathbf{u}_2^*(t)|_\gamma)^{p_1} d\mu + \int\limits_{[0,T^*]\setminus\mathcal{A}} (\lambda|\mathbf{u}_1^*(t)|_\gamma + (1-\lambda)|\mathbf{u}_2^*(t)|_\gamma)^{p_1} d\mu =$$

$$= \int\limits_{[0,T^*]} (\lambda|\mathbf{u}_1^*(t)|_\gamma + (1-\lambda)|\mathbf{u}_2^*(t)|_\gamma)^{p_1} d\mu = \left\|\lambda|\mathbf{u}_1^*|_\gamma + (1-\lambda)|\mathbf{u}_2^*|_\gamma\right\|_{L_{p_1}([0,T^*])}^{p_1}$$

приводит к выводу

$$\|\lambda \mathbf{u}_1^* + (1-\lambda)\mathbf{u}_2^*\|_{L_{p_1}^3([0,T^*]),\gamma} < \left\|\lambda|\mathbf{u}_1^*|_\gamma + (1-\lambda)|\mathbf{u}_2^*|_\gamma\right\|_{L_{p_1}([0,T^*])} \le$$

$$\le \lambda\left\||\mathbf{u}_1^*|_\gamma\right\|_{L_{p_1}([0,T^*])} + (1-\lambda)\left\||\mathbf{u}_2^*|_\gamma\right\|_{L_{p_1}([0,T^*])} =$$

$$= \lambda\|\mathbf{u}_1^*\|_{L_{p_1}^3([0,T^*]),\gamma} + (1-\lambda)\|\mathbf{u}_2^*\|_{L_{p_1}^3([0,T^*]),\gamma} = \|\mathbf{u}_1^*\|_{L_{p_1}^3([0,T^*]),\gamma}$$

Здесь использовалось равенство (4.4).

Для произвольного нормированного пространства $(\mathbb{R}^3, |\cdot|_\sigma)$ из равенства (4.4) получаем нестрогое неравенство

$$\|\lambda \boldsymbol{\omega}_1^* + (1-\lambda)\boldsymbol{\omega}_2^*\|_{L_{r_1}^3([0,T^*]),\sigma} \le \|\boldsymbol{\omega}_2^*\|_{L_{r_1}^3([0,T^*]),\sigma}$$

Непосредственная проверка показывает, что выпуклая комбинация процессов из $\mathcal{Y}(\mathbf{v})$ с одинаковым временем окончания снова порождает допустимый процесс из $\mathcal{Y}(\mathbf{v})$. Поэтому для любого $\lambda \in [0, 1]$ верно включение

$$(T^*, \lambda \mathbf{u}_1^*(t) + (1-\lambda)\mathbf{u}_2^*(t), \lambda \boldsymbol{\omega}_1^*(t) + (1-\lambda)\boldsymbol{\omega}_2^*(t);\ t \in [0, T^*]) \in \mathcal{Y}(\mathbf{v})$$

Но если $\mu(\mathcal{A}) > 0$, то для значения функционала получаем неравенство

$$J(T^*, \lambda \mathbf{u}_1^* + (1-\lambda)\mathbf{u}_2^*, \lambda \boldsymbol{\omega}_1^* + (1-\lambda)\boldsymbol{\omega}_2^*) =$$

$$= a\|\lambda \mathbf{u}_1^* + (1-\lambda)\mathbf{u}_2^*\|_{L_{p_1}^3([0,T^*]),\gamma}^{p_2} + b\|\lambda \boldsymbol{\omega}_1^* + (1-\lambda)\boldsymbol{\omega}_2^*\|_{L_{r_1}^3([0,T^*]),\sigma}^{r_2} <$$

$$< a\|\mathbf{u}_1^*\|_{L_{p_1}^3([0,T^*]),\gamma}^{p_2} + b\|\boldsymbol{\omega}_1^*\|_{L_{r_1}^3([0,T^*]),\sigma}^{r_2} = J(T^*, \mathbf{u}_1^*, \boldsymbol{\omega}_1^*) = \inf_{\mathcal{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \tag{4.5}$$

что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $\mu(\mathcal{A}) = 0$ и, следовательно, существует положительная почти всюду на $[0, T^*]$ функция $x(t)$, для которой верно равенство

$$\mathbf{u}_1^*(t) = x(t)\mathbf{u}_2^*(t) \text{ п.в. } t \in [0, T^*] \tag{4.6}$$

Покажем теперь, что $x(t) = 1$ почти всюду на $t \in [0, T^*]$. Из предыдущих рассуждений следует, что при $p_1 = 1$ исследуемая задача допустимых решений не имеет. Поэтому считаем $1 < p_1 < \infty$. Но, как известно ([6], с. 594, [7], с. 254), пространство $L_{p_1}([0, T^*])$ строго нормировано. Поэтому если для какого-либо числа $\beta > 0$ равенство

$$|\mathbf{u}_1^*(t)|_\gamma = \beta|\mathbf{u}_2^*(t)|_\gamma \text{ п.в. } t \in [0, T^*]$$

не выполняется, то, учитывая равенства (4.4),

$$\|\lambda \mathbf{u}_1^* + (1-\lambda)\mathbf{u}_2^*\|_{L^3_{p_1}([0,T^*]),\gamma} = \|\lambda|\mathbf{u}_1^*|_\gamma + (1-\lambda)|\mathbf{u}_2^*|_\gamma\|_{L_{p_1}([0,T^*])} <$$

$$< \lambda\||\mathbf{u}_1^*|_\gamma\|_{L_{p_1}([0,T^*])} + (1-\lambda)\||\mathbf{u}_2^*|_\gamma\|_{L_{p_1}([0,T^*])} = \|\mathbf{u}_1^*\|_{L^3_{p_1}([0,T^*])}$$

приходим к противоречию, аналогичному неравенству (4.5). Следовательно, для некоторого $\beta > 0$ имеем

$$|\mathbf{u}_1^*(t)|_\gamma = \beta|\mathbf{u}_2^*(t)|_\gamma \text{ п.в. } t \in [0, T^*] \tag{4.7}$$

Из сравнения формул (4.7), (4.6) и (4.4) следует вывод

$$x(t) = \beta = 1 \text{ п.в. } t \in [0, T^*]$$

Таким образом, в этом случае единственность решения задачи (2.1), (2.2) доказана.

Поскольку по предположению (1.4) имеем $r_1 > 1$, то рассуждения для случая строго нормированного пространства $(\mathbb{R}^3, |\cdot|_\gamma)$ проводятся аналогичным образом.

5. Существование решений в задаче переориентации. Цель данного раздела – демонстрация того факта, что задача оптимальной переориентации (1.1)–(1.3) при использованных предположениях в классе измеримых управлений почти никогда не имеет решения. Уточним это утверждение.

Будем считать, что неравенства (1.4) устанавливают возможный диапазон значений параметров функционала, а одно из пространств $(\mathbb{R}^3, |\cdot|_\gamma)$ или $(\mathbb{R}^3, |\cdot|_\sigma)$ строго нормированное.

Пусть $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ – множество тех начальных угловых скоростей $\mathbf{v}$, при которых соответствующая задача (2.1), (2.2) оптимального торможения имеет допустимое (из $\mathcal{Y}(\mathbf{v})$) решение. Другими словами, если $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, то имеется единственный процесс

$$(T_\upsilon, \mathbf{u}_\upsilon(t), \boldsymbol{\omega}_\upsilon(t); t \in [0, T_\upsilon]) \in \mathcal{Y}(\mathbf{v})$$

для которого верно равенство

$$J(T_\upsilon, \mathbf{u}_\upsilon, \boldsymbol{\omega}_\upsilon) = \inf_{\mathcal{Y}(\mathbf{v})} J(T, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$$

Каждому $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, таким образом, ставится в соответствие единственная матрица $D_\upsilon = D(T_\upsilon) \in SO(3)$, которая является решением задачи Коши

$$D(0) = I_3, \quad \dot{D} = -S(\boldsymbol{\omega}_\upsilon)D, \quad t \in [0, T_\upsilon]$$

Пусть $B, C \in SO(3)$ и $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ – матрица и вектор, определяющие граничные условия в задаче (1.1)–(1.3). Если $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, а $CB^T = D_\upsilon$, то решение задачи (1.1)–(1.3) в силу равенства (2.8) является одновременно и решением задачи (2.1), (2.2).

Если либо $\mathbf{v} \notin \mathcal{V}$, либо $CB^T \neq D_\upsilon$, то задача оптимальной переориентации (1.1)–(1.3) со свободным временем окончания в классе измеримых управлений неразрешима.

Действительно, пусть $\mathbf{v} \notin \mathcal{V}$. Предположим, что для граничных условий $B, C \in SO(3)$ и $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ в задаче (1.1)–(1.3) имеется оптимальный процесс

$$(T^*, \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\omega}^*(t), A^*(t); t \in [0, T^*]) \in \mathcal{X}(B, C, \mathbf{v})$$

Но тогда в силу равенства (2.8) процесс

$$(T^*, \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\omega}^*(t); t \in [0, T^*]) \in \mathcal{Y}(\mathbf{v})$$

является решением задачи (2.1), (2.2). Противоречие.

Пусть теперь $\mathbf{v} \notin \mathcal{V}$ и $CB^T \neq D_\upsilon$. Снова, если

$$(T^*, \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\omega}^*(t), A^*(t);\ t \in [0, T^*]) \in \mathcal{X}(B, C, \mathbf{v})$$

есть решение задачи (1.1)–(1.3), то

$$(T^*, \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\omega}^*(t);\ t \in [0, T^*]) \in \mathcal{Y}(\mathbf{v})$$

является решением задачи (2.1), (2.2). Но поскольку $CB^T \neq D_\upsilon$, то у задачи оптимального торможения имеется два различных решения, что при используемых предположениях невозможно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00050) и Министерства образования РФ (ТО2-14.0-681).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиротин А.Н.* О задаче синтеза оптимального по энергозатратам управления переориентацией и полным торможением вращающегося сферически симметричного твердого тела // Космич. исследования. 1995. Т. 33. № 2. С. 174–180.
2. *Сиротин А.Н.* Об оптимальной по быстродействию пространственной переориентации в положение покоя вращающегося сферически симметричного тела // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 18–27.
3. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. *Goldstein H.* Classic Mechanics. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press, 1951 = *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.
5. *Дьяченко М.И., Ульянов П.Л.* Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998. 159 с.
6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
7. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

Москва
e-mail: asirotin2@yandex.ru

Поступила в редакцию
21.V.2003