

УДК 62–50:534.1

© 2004 г. А. С. Братусь, К. А. Волосов

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ – БЕЛЛМАНА  
ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ  
С ОГРАНИЧЕННЫМ СУММАРНЫМ РЕСУРСОМ УПРАВЛЕНИЯ**

Рассматривается задача управления колебаниями математического маятника. На суммарный ресурс управления наложено интегральное ограничение: абсолютная величина управляемой функции в произвольной неотрицательной степени (большей или равной единице) является суммируемой функцией на заданном временном интервале. Цель управления – минимизация заданной функции фазовых переменных к фиксированному моменту времени (задача Майера). Наряду с детерминированным случаем изучается стохастический случай, когда на систему воздействуют случайные возмущения в виде гауссовского белого шума. В этом случае требуется либо минимизировать математическое ожидание заданных функционалов, либо максимизировать вероятность попадания фазовой координаты в заданную область к фиксированному моменту времени. Известно [1, 2], что задача построения синтеза оптимального управления может быть сведена к решению задачи Коши в неограниченной области для соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана. Доказано, что данная задача эквивалентна задаче Коши для линейного параболического уравнения. Найдены точные решения этой задачи для рассматриваемого класса задач оптимального управления. Отдельно рассмотрен случай импульсной коррекции, когда ограничена величина интеграла от абсолютной величины управляющей силы. Полученные результаты обобщаются на случай произвольного числа фазовых переменных, если интеграл от суммы квадратов величин управляющих сил – ограниченная величина.

**1. Постановка задачи.** Пусть управляемое движение материальной точки описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + u(t) + \sigma(t)\xi(t) \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $t$  – время,  $0 \leq t \leq T$ ,  $x_1, x_2$ , – фазовые координаты,  $u(t)$  – управляющая сила (функция управления),  $\xi(t)$  – гауссовский белый шум единичной интенсивности,  $\sigma(t)$  – ограниченная функция, представляющая интенсивность возмущения,  $\omega$  – собственная частота.

Если  $\sigma(t) = 0$ , то будем называть задачу (1.1) детерминированной задачей оптимального управления.

На величину управления (управляющую функцию)  $u(t)$  наложено следующее интегральное ограничение:

$$\int_0^T |u|^m dt \leq Q_0, \quad Q_0 = \text{const} \tag{1.2}$$

Здесь  $m$  – вещественное положительное число  $m > 1$ ,  $m = 2k/(2s - 1)$ ,  $k \geq s$ ,  $k, s = 1, 2, \dots$

Случай  $m = 1$  будет рассмотрен отдельно. Число  $m$  является параметром задачи: разным значениям  $m$  соответствуют разные способы задания ограничения (1.2) суммарного ресурса управления. Отметим, что случай  $m = 2$  называют управлением при помощи малой тяги, а случай  $m = 1$  – импульсным управлением.

Введем переменную

$$q(t) = \int_t^T |u(t)|^m dt$$

Переменная  $q(t)$  имеет смысл неизрасходованного ресурса управления, причем  $q(0) = Q_0^2$ ,  $q(T) = 0$ . Тогда к уравнениям (1.1) можно добавить уравнение

$$\dot{q} = -|u(t)|^m \quad (1.3)$$

Цель управления – минимизация одного из следующих функционалов

$$E\{\varphi(x_1(T))\}, \quad E\{\varphi(x_2(T))\} \quad (1.4)$$

Здесь  $E$  – знак математического ожидания,  $\varphi(x)$  – гладкая, четная неотрицательная функция своих аргументов, причем  $\varphi'(x) > 0$ ,  $x > 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ . В случае детерминированной задачи ( $\sigma = 0$ ) знак математического ожидания в функционалах (1.4) необходимо отбросить.

Типичный пример функционалов (1.4) – потенциальная и кинетическая энергия в момент времени  $t = T$ , т.е.

$$\varphi(x_1) = \frac{1}{2}\omega^2 x_1^2, \quad \varphi(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2$$

Частным случаем стохастического варианта задачи (1.4) является задача управления системой (1.1), (1.3) с целью максимизации вероятности попадания фазовой траектории системы в заданное множество  $N$  на прямой  $x_1$  или  $x_2$  в момент  $t = T$ .

Далее полагаем, что  $N$  – связное, симметричное относительно начала координат множество на фазовой прямой  $x_1$  и  $x_2$ .

Характерными примерами областей  $N$  служат области

$$x_1: |x_1| \leq \delta_1, \quad x_2: |x_2| \leq \delta_2, \quad \delta_1, \delta_2 = \text{const} > 0$$

Учитывая специфику функционалов (1.4), порядок системы (1.1), (1.3) можно понизить. Для этого введем новую переменную

$$y(t) = x_2 \sin(\omega(T-t)) + \omega x_1 \cos(\omega(T-t))$$

Непосредственно проверяется, что

$$y(T) = \omega x_1(T), \quad \dot{y} = \sin(\omega(T-t))(\dot{x}_2 + \omega^2 x_1)$$

Следовательно, для функционалов, зависящих лишь от конечного состояния фазовой переменной  $x_1$  система (1.1), (1.3) примет вид

$$\dot{y} = \sin(\omega(T-t))(u(t) + \sigma(t)\xi(t)), \quad \dot{q} = -|u|^m \quad (1.5)$$

Если же ввести переменную

$$y(t) = x_2 \cos(\omega(T-t)) - \omega x_1 \sin(\omega(T-t))$$

то

$$y(T) = x_2(T)$$

поэтому для функционалов, зависящих лишь от конечного состояния фазовой переменной  $x_2$ , первое уравнение системы (1.5) примет вид

$$\dot{y} = \cos(\omega(T-t))(u(t) + \sigma(t)\xi(t))$$

Если  $\omega = 0$ , то в качестве новой переменной рассмотрим  $y(t) = x_2(T-t) + x_1$ . Тогда первое уравнение системы (1.5) примет вид

$$\dot{y} = (T-t)(u(t) + \sigma(t)\xi(t))$$

Обобщая представленные случаи, будем рассматривать далее следующее уравнение движения:

$$\dot{y} = f(t)(u(t) + \sigma(t)\xi(t)), \quad \dot{q} = -|u|^m \tag{1.6}$$

где  $f(t)$  – гладкая непрерывная функция,  $0 \leq t \leq T$ .

Отметим, что при  $\omega = 0$  с помощью автомоделных переменных задача решалась численно для случаев  $m = 1, 2$  [2, 3]. Изучались [4] локальные решения соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана.

**2. Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана ( $m > 1$ ).** Рассмотрим сначала стохастический вариант исходной задачи. Пусть  $S(y, q, t)$  – минимальное значение математического ожидания одного из функционалов (1.4), которое может быть достигнуто при начальных условиях  $t = t_0, q = q_0, y = y_0$  в задаче оптимального управления, описываемые уравнениями состояния (1.6). Предполагая существование и достаточную гладкость функции  $S(y, q, t)$ , можно написать уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана (ГЯБ)

$$S_t + \min_u \{ f(t)uS_y - |u|^m S_q \} + \frac{1}{2} \sigma^2(t) S_{yy} = 0 \tag{2.1}$$

Здесь минимум берется по  $u$ . Функция  $S$  удовлетворяет условию  $S(y, q, T) = \varphi(y)$ .

Из постановки задачи следует, что величина функции  $S(y, q, T)$  может лишь уменьшиться при увеличении значения  $q$ , поскольку чем больше ресурс управления, тем меньшего значения функционала может достичь при прочих равных условиях, т.е.

$$S(y, q_2, t) = S(y, q_1, t), \quad q_1 < q_2$$

Учитывая гладкость функции  $S(y, q, T)$ , получим, что должно выполняться условие

$$S_q(y, q, T) < 0 \tag{2.2}$$

В области, где  $S_q(y, q, T) < 0$ , реализуется движение с помощью управляющей силы, при этом тратится некоторый ресурс управления  $q'$ . Минимальное значение выражения, стоящего в фигурных скобках в уравнении (2.1), достигается на следующей управляющей функции:

$$u = \left( \frac{|S_y f(t)|}{-m S_q} \right)^\mu \text{sign}(S_y f(t)), \quad \mu = (m-1)^{-1} \tag{2.3}$$

После замены переменной

$$\tau = \int_t^T f^2(s) ds \tag{2.4}$$

уравнение (2.1) трансформируется в уравнение

$$S_\tau = \frac{1}{2}\sigma_1^2(\tau)S_{yy} + (m-1)g_m(\tau)\left(\frac{|S_y|}{-mS_q}\right)^{\mu+1} S_q \quad (2.5)$$

с начальным условием

$$S(y, q, 0) = \varphi(y) \quad (2.6)$$

Здесь

$$g_m(\tau) = |f(t)|^{\mu-1}, \quad \sigma_1(\tau) = \sigma(t)|f(t)|_{t=T-\tau} \quad (2.7)$$

причем переменные  $t$  и  $\tau$  связаны соотношением (2.4). Если на некотором множестве  $S_q(y, q, \tau) = 0$ , то минимум выражения, стоящего в фигурных скобках в уравнении (2.1), достигается тогда и только тогда, когда либо  $u = 0$ , либо на этом множестве одновременно  $S_q = S_y = 0$ . В первом случае происходит неуправляемое движение под действием случайных сил. Уравнение (2.1) в этих областях имеет вид

$$S_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S_{yy} = 0 \quad (2.8)$$

Во втором случае управление  $u = 0$ , причем дробно-линейная функция в уравнении (2.1), содержащая в соответствующих степенях величины  $S_y$  и  $S_q$ , должна быть определена на множестве, где  $S_y = S_q = 0$ . Так как, по предположению,  $\varphi(y)$  – четная функция, задача (2.5), (2.6) инвариантна относительно замены переменной  $y$  на  $-y$ . Следовательно, эту задачу можно рассматривать только при  $y > 0$  с дополнительным краевым условием

$$S_y(0, q, \tau) = 0 \quad (2.9)$$

Все приведенные рассуждения сохраняют свой смысл и в случае задачи о максимизации вероятности попадания в заданное множество  $N$  на прямой  $x_1$  или ( $x_2$ ) в момент  $t = T$ . Вычисление минимума в уравнении (2.1) необходимо заменить на вычисление максимума. Отметим, что максимум указанного выражения будет существовать тогда и только тогда, когда  $S_q(y, q, \tau) > 0$ .

В детерминированном случае вид формулы (2.3) сохраняется.

Уравнение (2.5) примет вид

$$S_\tau = (m-1)p_m(\tau)\left(\frac{|S_y|}{-mS_q}\right)^{\mu+1} S_q \quad (2.10)$$

Здесь

$$\tau = T - t, \quad p_m(\tau) = |f(T - \tau)|^{\mu-1} \quad (2.11)$$

**3. Точные решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана ( $m > 1$ ).** Рассмотрим случай детерминированной системы ( $\sigma(t) = 0$ ).

*Утверждение 1.* Точное решение уравнения (2.10) дается равенством

$$S(y, q, \tau) = \varphi(z)$$

где

$$z = y - P_m(q, \tau), \quad P_m(q, \tau) = q^{1/m}(\Theta_m(\tau))^{1-1/m}, \quad \Theta_m(\tau) = \int_0^\tau p_m(s) ds$$

Функция  $p_m(s)$  определена равенством (2.11). Синтез оптимального управления в детерминированной задаче оптимального управления, определяемой уравнениями состояния (1.6) с одним из функционалов (1.4), определяется по формуле

$$u = \begin{cases} -|f(t)|^\mu \left( \frac{q}{\Theta_m(\tau)} \right)^{1/m} \operatorname{sign} f(t), & y \geq P_m(q, \tau) \\ 0, & 0 \leq y < P_m(q, \tau) \end{cases} \quad (3.1)$$

*Доказательство.* Первая часть утверждения непосредственно проверяется подстановкой функции  $\varphi(z)$  в уравнение (2.10).

Рассмотрим области

$$D_1^m = \{y, q, \tau: y > P_m(q, \tau)\}, \quad D_2^m = \{y, q, \tau: 0 \leq y < P_m(q, \tau)\} \quad (3.2)$$

Граница  $\gamma_m$  этих областей задается поверхностью  $y = P_m(q, \tau)$ , содержащей координатную ось  $q = 0$ , а ее сечения при  $q = \operatorname{const} > 0$  представляют собой в плоскости  $y, \tau$  монотонно возрастающую кривую, выходящую из начала координат. Поверхность разделяет области  $D_1^m$  и  $D_2^m$  таким образом, что поверхность  $\tau = 0$  является границей области  $D_2^m$ , а поверхность  $y = 0$  – границей области  $D_1^m$ .

Уравнение (2.10) и условие (2.6) дополняются краевым условием

$$S_q(y, q, \tau) < 0, \quad u \neq 0$$

Следовательно, первая часть формулы (3.1) справедлива лишь в области  $D_1^m$ . На границе  $\gamma_m$  областей  $D_1^m$  и  $D_2^m$  функция  $S = \varphi(z)$  обращается в нуль вместе со своими производными по  $y$  и  $q$ .

Продолжим функцию  $S = \varphi(z)$  нулем в область  $D_2^m$ . Выбор управления  $u = 0$  в области  $D_2^m$  обеспечивает попадание фазовой траектории системы на множество  $y = 0$  при  $\tau = 0$ .

Действительно, при  $u = 0$ , из уравнений (1.6) следует, что  $y = \operatorname{const} > 0$ ,  $q = \operatorname{const} > 0$ , поэтому с уменьшением обратного времени,  $\tau = T - t$  фазовая траектория системы обязательно попадет на границу  $\gamma_m$  (см. фиг. 1).

Траектории детерминированной системы (1.6) в области  $D_1^m$  лежат на поверхности

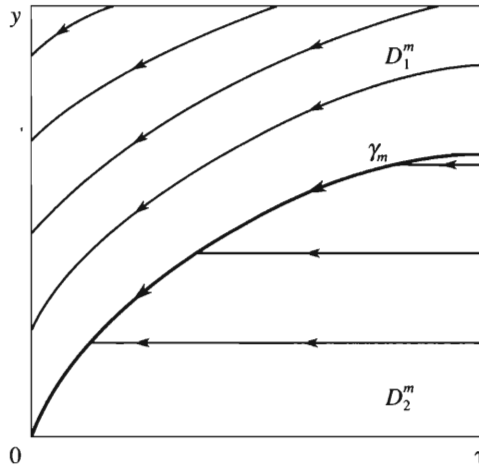
$$G(y, q, \tau) = y - P_m(q, \tau) = \operatorname{const}$$

Для доказательства этого факта необходимо рассмотреть нормаль к этой поверхности и проверить ее ортогональность вектору, составленному из правых частей уравнений (1.6). С учетом формулы (3.1) запишем детерминированную систему (1.6) в виде

$$\dot{y} = -F, \quad \dot{q} = -F^m, \quad \dot{\tau} = -1, \quad F = (f(\tau))^\mu (q/\Theta_m(\tau))^{1/m}$$

С помощью явного вида выражения для функции  $\Theta_m(\tau)$  проверяется, что скалярное произведение векторов  $\nabla G$  и  $(-F, -F^m, -1)$  равно нулю.

Формула (3.1) сохраняет смысл и на самой поверхности  $\gamma_m$  несмотря на то, что  $S_q = S_y = 0$  на  $\gamma_m$ , так как возникающая при этом неопределенность в выражении (3.1) может быть раскрыта. Таким образом, на множестве  $\gamma_m$  реализуется ранее упомянутая в разд. 2 возможность, при которой  $S_y = S_q = 0$ , а управление  $u \neq 0$ .



Фиг. 1

В итоге в области  $D_1^m$  вместе с границей  $\gamma_m$  происходит движение по поверхностям  $y - P_m(q, \tau) = \text{const}$ , а в области  $D_2^m$  фазовая траектория имеет вид  $y = q = \text{const}$ , что обеспечивает ее попадание на множество  $y = 0$  к моменту  $\tau = 0$  (см. фиг. 1).

Перейдем к рассмотрению стохастического случая задач (1.6).

*Утверждение 2.* Уравнение ГЯБ (2.5) сводится к линейному параболическому уравнению

$$\Phi_\tau = \frac{1}{2} \sigma_1^2(\tau) \Phi_{ww} \quad (3.3)$$

относительно функции  $\Phi$  двух переменных  $w, \tau$ , причем

$$w = y - R_m(q, \tau), \quad R_m(q, \tau) = q^{1/m} (\Psi_m(\tau))^{(m-1)/m}, \quad \Psi_m(\tau) = \int_0^\tau g_m(s) ds \quad (3.4)$$

(функция  $g_m(s)$  задана равенством (2.7) для  $\tau$  и  $t$ , удовлетворяющих равенству (2.4). Синтез оптимального управления в стохастических задачах (2.5), (2.6) определяется по формуле

$$u = \begin{cases} -|f(t)|^{1/(m-1)} \left( \frac{q}{\Psi_m(\tau)} \right)^{1/m} \text{sign} f(t), & y \geq R_m(q, \tau) \\ 0, & 0 \leq y < R_m(q, \tau) \end{cases} \quad (3.5)$$

*Доказательство.* Первая часть утверждения проверяется непосредственной подстановкой. Решение задачи Коши (2.5), (2.6) имеет вид

$$S = \Phi(w, \tau) = \int_0^\infty A(w, \tau, \eta) \varphi(\eta) d\eta \quad (3.6)$$

где

$$A(w, \tau, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi B(\tau)}} \left[ \exp\left(-\frac{(w-\eta)^2}{2B(\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(w+\eta)^2}{2B(\tau)}\right) \right] \quad (3.7)$$

$$B(\tau) = \int_0^\infty \sigma_1^2(s) ds$$

Рассмотрим области  $\Omega_1^m, \Omega_2^m$ , отличающиеся от соответствующих областей (3.2) заменой функции  $P_m(q, \tau)$  на  $R_m(q, \tau)$ .

Так же как в детерминированном случае, доказывается, что поверхность  $\Gamma_m = \{y, q, \tau: y - R_m(q, \tau) = 0\}$ , разделяет области  $\Omega_1^m, \Omega_2^m$ . Синтез оптимального управления в области  $\Omega_1^m$ , включая границу  $\Gamma_m$ , определяется по верхней части формулы (3.5). В области  $\Omega_2^m$  положим  $u = 0$ . Тогда материальная точка совершает неуправляемое движение, представляющее случайные блуждания на множестве

$$0 \leq y < R_m(q, \tau)$$

Так как  $R_m(q, \tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ , с вероятностью единица в некоторый момент времени  $\tau > 0$  фазовая координата точки попадет на границу  $\Gamma_m$ , где происходит коррекция. При этом в области  $\Omega_2^m$  значение функции Беллмана  $S(y, q, \tau)$  определяется из решения следующей краевой задачи:

$$S_\tau = \frac{1}{2} \sigma_1^2(\tau) S_{yy}, \quad y > 0, \quad q > 0, \quad \tau > 0 \quad (3.8)$$

$$y = R_m(q, \tau): S = \Phi(0, \tau); \quad y = 0, \quad S_y|_{y=0} = 0$$

где  $\Phi(w, \tau)$  – решение (3.6) уравнения (3.3).

Результат утверждения 2 сохраняется и для случая задачи о максимизации попадания в заданную область  $N$  на фазовой прямой. Дополним уравнение (2.5) начальными условиями

$$S(y, q, 0) = \begin{cases} 1, & y \in N \\ 0, & y \notin N \end{cases}$$

Решение полученной задачи Коши имеет вид

$$S = \int_N A(w, \tau, \eta) \varphi(\eta) d\eta$$

Здесь  $w$  – переменная, определенная первым равенством (3.4),  $A(w, \tau, \eta)$  – функция, заданная выражением (3.7). Интегрирование проводится по симметричному множеству  $N_m$ , где  $y \geq R_m(q, \tau)$ . Все остальные рассуждения повторяют аргументы доказательства утверждения 2. Отметим, что ранее [4] было найдено локальное решение уравнения (2.5) в области  $\Omega_1^m, m = 2$ .

*Примеры.*

1°. Рассмотрим стохастическую задачу с  $f(t) = T - t$ . Из выражения (2.4) следует, что  $\tau = (T - t)^3/3$ . Решение уравнения (2.5) в соответствии с утверждением 2 есть функция переменных

$$w = y - R_m(q, \tau)$$

$$R_m(q, \tau) = ((m - 1)/(2m - 1))^{1 - 1/m} (3\tau)^{2/3 - 1/(3m)} q^{1/m}$$

Синтез оптимального управления в данном случае определяется по формуле

$$u = \begin{cases} -(q(3\tau)^{-1/3})(2m - 1)/(m - 1)^{1/m}, & y \geq R_m(q, \tau) \\ 0, & 0 \leq y < R_m(q, \tau) \end{cases}$$

2°. Рассмотрим другой распространенный случай. Положим  $m = 2$  и  $f = \sin \omega(T - t)$ , из равенства (2.4) следует, что переменные  $t$  и  $\tau$  связаны соотношением

$$\tau = \frac{1}{2}(T - t - (\sin 2\omega(T - t))/(2\omega)) \quad (3.9)$$

В этом случае оптимальное управление определяется по закону

$$u = \begin{cases} -\sin(\omega(T - t))(q/\tau)^{1/2}, & y \geq \sqrt{q\tau} \\ 0, & 0 \leq y < \sqrt{q\tau} \end{cases}$$

3°. Приведем пример детерминированной ситуации. Для функции  $f = T - t = \tau$  из соотношений (2.11) в соответствии с Утверждением 1 получим

$$p_m(\tau) = \tau^{\mu+1}, \quad \Theta_m(\tau) = (2 + \mu)^{-1} \tau^{2+\mu}$$

Формула (3.1) (синтез оптимального управления) принимает конкретный вид

$$u = \begin{cases} -\tau^{-1/m}(2 + \mu), & y \geq q^{1/m}(\Theta_m(\tau))^{1-1/m} \\ 0, & 0 \leq y < q^{1/m}(\Theta_m(\tau))^{1-1/m} \end{cases}$$

4°. Положим  $m = 2$ . Тогда для функции  $f = \sin \omega(T - t) = \sin \omega \tau$  соответствующий закон управления имеет вид (3.1), где

$$\Theta_m(\tau) = (\tau + \sin(2\omega\tau)/(2\omega))/2$$

$$p_m(\tau) = ((\tau + \sin(2\omega\tau)/(2\omega))/(2q))^{1/2}$$

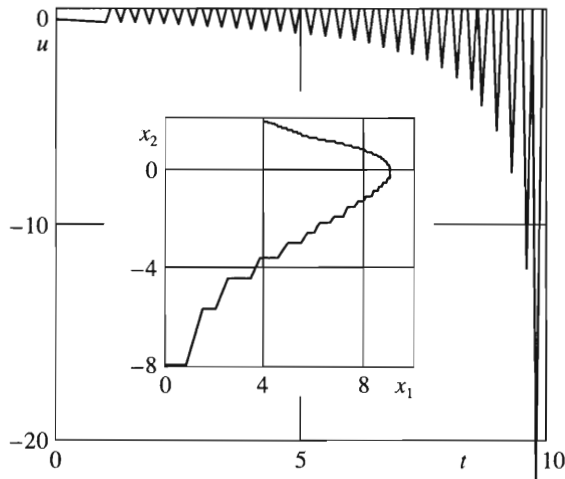
На фиг. 2 представлены график изменения оптимального управления  $u$  и оптимальная фазовая траектория детерминированной системы (пример с.) в случае  $m = 2$ ,  $T = 10$ ,  $f = T - t$ . Начальные данные для системы (1.6) в данном примере имеют вид

$$x_1^0 = 4, \quad x_2^0 = 2, \quad q_0 = 1$$

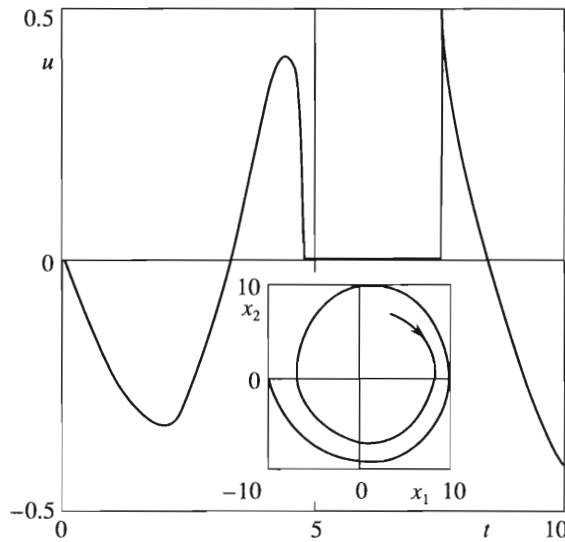
В соотношении (1.3) выбран знак “плюс”.

На фиг. 3 те же закономерности представлены в случае  $m = 2$ ,  $T = 10$ ,  $f = \cos(\pi(T - t)/3)$  для системы (1.6) с начальными данными  $x_1^0 = 2$ ,  $x_2^0 = 8$ ,  $q_0 = 1$ .

Расчеты показывают, что оптимальные фазовые траектории системы с ненулевым значением  $\omega$  имеют вид раскручивающихся спиралей. Таким образом, в задаче о минимизации потенциальной энергии системы к заданному моменту времени происходит увеличение кинетической энергии, а в аналогичной задаче о минимизации кинетической энергии к финальному моменту времени увеличивается потенциальная энергия (фиг. 3).



Фиг. 2



Фиг. 3

**4. Предельный случай – импульсная коррекция.** Из вида ГЯБ уравнения (2.5) видно, что случай  $m = 1$  особый. Было показано [1], что вид уравнения (2.5) при переходе к пределу при  $m \rightarrow 1$  зависит от значения следующего выражения:

$$H(y, q, \tau) = f(t)S_y + S_q$$

причем  $H(y, q, \tau) \leq 0$  при всех допустимых значениях  $y, q, \tau$ .

В области  $\Omega_2^1$ , где выполняется неравенство  $H(y, q, \tau) < 0$ , происходит неуправляемое движение под действием случайных сил. Функция  $S$  в данной ситуации есть решение задачи Коши предельного параболического уравнения

$$S_\tau - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\tau)S_{yy} = 0$$

В области  $\Omega_1^1$  выполняется равенство  $H(y, q, \tau) = 0$ . В этой области функция  $S(y, q, \tau)$  – решение гиперболического уравнения первого порядка

$$f(\tau)S_y + S_q = 0 \quad (4.1)$$

Характеристики этого уравнения задаются равенством  $y - f(\tau)q = \text{const}$ . Последнее означает, что в области  $\Omega_1^1$  происходит импульсная коррекция, под действием которой точка мгновенно перемещается вдоль характеристик гиперболического уравнения (4.1). При этом в результате коррекции либо точка оказывается на границе  $\Gamma_1$  областей  $\Omega_1^1$  и  $\Omega_2^1$ , либо полностью исчерпывается ресурс управления. Отыскание границы полностью решает задачу построения синтеза оптимального управления.

В случае  $\omega = 0$  задача изучалась ранее [1–3], в [4, 5] решения находились численно с помощью автомоделных переменных. Аналогичная задача исследовалась в [6, 7] с помощью вариационных неравенств. Был рассмотрен [8] игровой подход к задаче для детерминированного случая.

Используя результаты разд. 3, изучим предельное положение границы, когда  $m \rightarrow 1$ . Рассмотрим непрерывную функцию

$$F(\tau) = \max |f(s)|, \quad 0 \leq s \leq \tau \quad (4.2)$$

Здесь переменные  $t$  и  $\tau$  связаны соотношением (2.4).

*Утверждение 3.* Пусть  $f(\tau)$  – неотрицательная, монотонно возрастающая функция переменной  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq T$ . Тогда при  $m = 1$  решение уравнения (2.5) в области  $\Omega_1^1$  – функция двух переменных:  $S = \Phi(w, \tau)$ , где  $w = y - qF(\tau)$ . Функция  $\Phi(w, \tau)$  – решение линейного параболического уравнения (3.3), она определяется формулой (3.6), (3.7). В области  $\Omega_1^1$  происходит импульсная коррекция, под действием которой фазовая точка перемещается по поверхностям  $y - qF(\tau) = \text{const}$ . В области  $\Omega_2^1 = \{y, q, \tau: 0 \leq y < qF(\tau)\}$  происходит неуправляемое движение под действием случайных сил. Граница областей  $\Omega_1^1$  и  $\Omega_2^1$  определяется равенством  $y = qF(\tau)$ . Функция Беллмана  $S(q, y, \tau)$  в области  $\Omega_2^1$  является решением краевой задачи (3.8), где  $R_{q, \tau} = qF(\tau)$ .

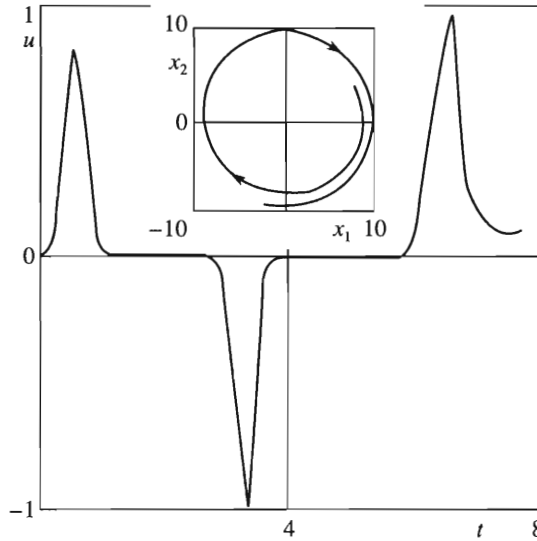
*Доказательство.* Воспользуемся результатом утверждения 2, устремляя  $m$  к единице. Для этого необходимо вычислить предел выражения  $R_m(q, \tau)$ , определенного вторым и третьим равенством (3.4). Используя соотношения (2.4) и (2.7), получим

$$F(\tau) = \lim_{m \rightarrow 1} \left( \int_0^\tau ((f(s))^{2/m-1})^{m\mu} \right)^{(m-1)/m}$$

Известно [9], что для любой непрерывной функции  $\varphi(s)$  имеет место равенство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_a^b |\varphi(s)|^p \right)^{1/p} = \max_{a \leq s \leq b} |\varphi(s)| \quad (4.3)$$

Учитывая равенства (4.2) и (4.3), получим  $F(\tau) = f(\tau)$ . Переходя к пределу во второй и третьей формулах (3.4), заключаем, что  $S(q, y, \tau)$ -функция в области  $\Omega_1^1$  удовлетворяет уравнению (3.8).



Фиг. 4

*Замечание.* Если отказаться от условия монотонности функции  $f(t)$ , то  $f(t) \leq F(t)$ , причем равенство будет достигаться лишь в точках, где функция  $f(t)$  достигает максимума. В таком случае импульсная коррекция производится именно в эти моменты времени.

*Примеры.* 1°. Пусть  $\omega = 0$  и  $f = T - t$ . Из выражения (2.4) следует, что переменные  $t$  и  $\tau$  связаны соотношением  $\tau = (T - t)^3/3$ . Следовательно,  $F(\tau) = (3\tau)^{1/3}$ .

2°. Если  $\omega \neq 0$ , и  $f = \sin(\omega(T - t))$ , то из выражения (2.4) следует, что связь между переменными  $t$  и  $\tau$  осуществляется при помощи равенства (3.9). В этом случае

$$F(\tau) = \begin{cases} \sin(\omega\tau), & 0 \leq \tau \leq \pi/(2\omega) \\ 1, & \tau > \pi/(2\omega) \end{cases}$$

Область  $\Omega_1^1$  состоит из множества  $y \geq \sin(\omega\tau)$ , если  $0 \leq \tau \leq \pi/(2\omega)$ . Если же  $\tau > \pi/(2\omega)$ , то импульсная коррекция осуществляется в дискретные моменты времени  $\tau_k = k\pi/(2\omega)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Движение осуществляется в направлении, противоположном направлению оси  $y$ . При этом либо фазовая точка попадает на множество  $y = q \sin(\omega\tau)$ , либо полностью расходует ресурс управления.

На фиг. 4 представлены график изменения ресурса управления и оптимальная фазовая траектория для случая  $m = 40/39$ ,  $T = 8$  в задаче  $c f(t) = \sin(\pi(T - t))/3$ , т.е. в ситуации, когда величина  $m$  близка к единице. Начальные данные системы (1.6):  $x_1^0 = 8$ ,  $x_2^0 = 4$ ,  $q_0 = 0.8$ . Оптимальное управление (фиг. 4) представляет собой последовательность импульсов. Как и в предыдущих случаях, фазовая траектория системы имеет вид раскручивающейся спирали.

**5. Случай произвольного числа степеней свободы ( $m = 2$ ).** Обнаруженный факт интегрируемости уравнения ГЯБ (утверждение 2) позволяет решить некоторые многомерные задачи.

Рассмотрим систему с  $n$  степенями свободы, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2, & \dot{X}_2 &= -KX_1 + U(t) + \sigma(t)\xi(t) \\ X_k(t) &= (x_1^k(t), x_2^k(t), \dots, x_n^k(t)), & k &= 1, 2, \\ U(t) &= (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  –  $n$ -мерные векторы перемещений и скоростей,  $U(t)$  – вектор управления, его компоненты – управляющие силы,  $K$  – симметрическая положительно определенная матрица,  $\xi(t)$  – вектор независимых гауссовских белых шумов единичной интенсивности,  $\sigma(t)$  – функция, задающая интенсивность возмущения случайных сил. На управляющие силы наложено ограничение

$$\sum_0^T \int u_i^2 dt \leq Q_0^2, \quad Q_0 = \text{const} \quad (5.2)$$

Здесь и всюду далее суммирование ведется  $i = 1$  до  $i = n$ .

Ставится задача об отыскании такого управления, при котором либо математическое ожидание потенциальной энергии системы

$$J_1 = \frac{1}{2}(KX_1, X_1)$$

либо кинетическая энергия

$$J_2 = \frac{1}{2}(KX_2, X_2)$$

достигают минимального значения к фиксированному моменту времени  $t = T$ .

Существует [10] невырожденное ортогональное преобразование, такое, что

$$Z_1 = A^T X_1, \quad Z_2 = A^T X_2, \quad A^{-1} = A^T, \quad A^T K A = \Lambda$$

Здесь  $\Lambda$  – диагональная матрица с диагональными элементами  $\lambda_i = \omega_i^2$ , где  $\omega_i > 0$  – частоты свободных колебаний исходной системы. Система (5.2) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= Z_2, \quad \dot{Z}_2 = -\Lambda Z_1 + V(t) + \sigma(t)A^T \xi(t) \\ Z_k(t) &= (z_1^k(t), z_2^k(t), \dots, z_n^k(t)), \quad k = 1, 2 \\ V(t) &= (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь  $V(t) = A^T U(t)$ ,  $V(t)$  – новое управление.

Управление  $v_i$  также удовлетворяет ограничениям (5.2).

Действительно, имеем

$$\sum_0^T \int v_i^2 dt = \int_0^T (V, V) dt = \int_0^T (AU, A^T U) dt = \int_0^T (U, U) dt \leq Q_0^2$$

Функционалы  $J_1$  и  $J_2$  сохраняют свой вид квадратичных форм

$$J_1 = \frac{1}{2}(Z_1, Z_1), \quad J_2 = \frac{1}{2}(Z_2, Z_2)$$

Введем переменную

$$q(t) = \int_0^t (\sum v_i^2) dt$$

С учетом ограничения (5.2) получим

$$\dot{q} = -\sum v_i^2, \quad q(0) \leq Q_0^2, \quad q(T) = 0 \quad (5.4)$$

Положим теперь

$$y_i(t) = z_i^2 \sin \omega_i(T-t) + \omega_i z_i^1 \cos \omega_i(T-t)$$

в случае функционала  $J_1$ . В случае функционала  $J_2$  введем переменную

$$y_i(t) = z_i^2 \cos \omega_i(T-t) + \omega_i z_i^1 \sin \omega_i(T-t)$$

Если же  $\omega = 0, f_i = T - t$ , то рассмотрим

$$y_i(t) = z_i^2(T-t) + z_i^1$$

Систему (5.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= f(t)(V(t) + \sigma(t)A\xi(t)) \\ Y(t) &= (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Уравнение ГЯБ для задачи (5.4), (5.5) имеет вид

$$S_t + \min_{v_1, v_2, \dots, v_n} \{ \sum (f_i(t)v_i S_{y_i} - v_i^2 S_q) \} + \frac{1}{2} \sigma^2(t) \sum f_i^2(t) S_{y_i y_i} = 0 \tag{5.6}$$

Здесь  $S(y_1, y_2, \dots, y_n, q, t)$  – функция Беллмана. К этому уравнению необходимо добавить условие

$$t = T: S = \frac{1}{2} \sum y_i^2$$

Минимум выражения в левой части равенства (5.6) существует, лишь если  $S_q \leq 0$ . Вычисляя этот минимум, получим

$$v_i = f_i(t) \frac{S_{y_i}}{2S_q}$$

поэтому уравнение (5.6) запишем в форме

$$S_t + \frac{1}{4} \sum f_i^2(t) \frac{S_{y_i}^2}{S_q} - \frac{1}{2} \sum \sigma^2(t) f_i^2(t) S_{y_i y_i} = 0$$

Так как рассматривается случай  $\omega = 0$ , после замены  $\tau = (T - t)^3/3$  предыдущее уравнение примет вид

$$S_\tau = \frac{1}{4} |\nabla S|^2 / S_q + \frac{1}{2} \sigma_1^2(\tau) \Delta S \tag{5.7}$$

Здесь  $\Delta$  –  $n$ -мерный оператор Лапласа,  $\nabla S = (S_{y_1}, S_{y_2}, \dots, S_{y_n})$ .

Уравнение при  $t = T$  перейдет в следующее условие при  $\tau = 0$ :

$$\tau = 0: S = \frac{1}{2} \sum y_i^2 \tag{5.8}$$

Введем переменную

$$r = (\sum y_i^2)^{1/2}$$

Решение уравнения (5.7) с начальным условием (5.8) является функцией трех переменных:  $r, q, \tau$ .

Действительно, полагая  $S = \Phi(r, q, \tau)$ , из соотношений (5.7), (5.8) получим

$$\Phi_\tau = \frac{1}{4} \frac{\Phi_r^2}{\Phi_q} + \frac{1}{2} \sigma_1^2(\tau) (\Phi_{rr} + (n-1)r^{-1}\Phi_r)$$

Из утверждения 2 следует, что  $\Phi(r, q, \tau)$  – функция двух переменных:  $\tau$  и  $w = r - \sqrt{q\tau}$ , т.е.  $\Phi(r, q, \tau) = F(w, \tau)$ , причем функция  $F(w, \tau)$  – решение параболического уравнения

$$F_\tau = \frac{1}{2} \sigma_1^2(\tau) (F_{ww} + (n-1)r^{-1}F_w)$$

Синтез оптимального управления в поставленной задаче определяется по формуле

$$v_i = \begin{cases} -\sqrt{q\tau}^{1/3}, & r \geq \sqrt{q\tau} \\ 0, & 0 \leq r < \sqrt{q\tau} \end{cases}$$

Таким образом, компоненты вектора управления  $V(t)$  (5.3) – функции управления  $v_i$ , с помощью ортогонального преобразования  $A$  однозначно восстанавливаются исходные управляющие функции  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

Авторы благодарят Ф.Л. Черноусько за внимание к работе и советы и А.Ю. Мамонова – за помощь в реализации численных расчетов оптимальных траекторий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л. Автомодельные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции случайных возмущений // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 2. С. 333–342.
2. Bensoussan A. Perturbation Methods in Optimal Control. Chichester: Wiley, 1988. 573 p.
3. Братусь А.С., Черноусько Ф.Л. Численное решение задач оптимальной коррекции при случайных возмущениях // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. С. 68–78.
4. Бородавский М.Б., Братусь А.С., Черноусько Ф.Л. Оптимальная импульсная коррекция при случайных возмущениях // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 5. С. 797–805.
5. Bather J., Chernoff H. Sequential decisions in the control of a space-ship (finite fuel) // J. Appl. Probabil. 1967. V. 4. № 3. P. 548–604.
6. Охоцимский Д.Е., Рясин В.А., Ченцов Н.Н. Оптимальная стратегия при корректировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 1. С. 47–50.
7. Bensoussan A., Lions J.-L. Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et applications // С. г. Acad. Sci Paris. Ser. A. 1973. V. 276. № 18. P. 1189–1192.
8. Bensoussan A., Lions J.-L. Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles d'évolution // С. г. Acad. Sci. Paris. 1973. Ser. A. V. 276. № 20. P. 1333–1338.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
10. Strang G. Linear Algebra and its Application. N. Y., etc.: Acad. Press, 1976. 374 p.