

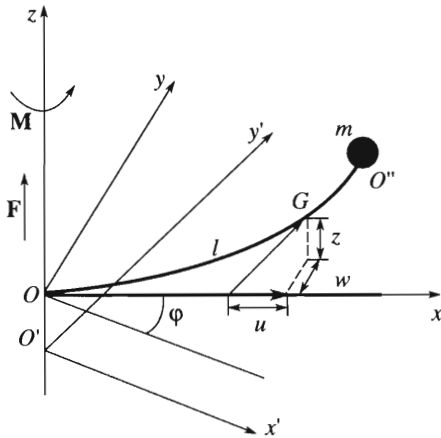
УДК 531.36:62-50

© 2004 г. Ю. Ф. Голубев, А. Е. Дитковский

УПРАВЛЕНИЕ УПРУГИМ МАНИПУЛЯТОРОМ С УЧЕТОМ ПОЛЕЗНОЙ НАГРУЗКИ И СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Рассматривается задача об управлении движением манипулятора, состоящего из упругой балки и полезной нагрузки, закрепленной на одном из ее концов. Рука манипулятора может вращаться в горизонтальной плоскости и перемещаться вдоль вертикальной направляющей. Предполагается, что на систему действует сила тяжести. Требуется перевести манипулятор из заданного начального положения в конечное без возбуждения колебаний. Учитываются упругие деформации растяжения и изгиба. Управление построено в виде рядов по степеням параметра, обратно пропорционального модулю Юнга. Выписаны рекуррентные формулы для всех коэффициентов разложения.

В ряде задач при построении и разработке робототехнических систем требуется учет упругой податливости их элементов. При исследовании управляемого движения манипуляторов с упругими звеньями [1–6], как правило, влияние силы тяжести не учитывалось. Рассматривались [1] плоские вращательные движения упругого нерастяжимого стержня, нагруженного абсолютно твердым телом, под действием управляющего момента сил; решались задачи управления о приведении системы из некоторого начального в заданное угловое положение с гашением упругих колебаний или в состояние вращения системы как единого целого с фиксированной угловой скоростью. Исследовался [2] процесс гашения колебаний массивного груза, закрепленного на конце длинной упругой балки, при помощи активного виброгасителя с поступательно перемещающейся массой. Была получена [3] система интегродифференциальных уравнений в частных производных и граничные условия для манипулятора, состоящего из твердого тела и упругого нерастяжимого стержня, с учетом влияния силы тяжести. Исследовались задачи управления о приведении манипулятора за время T из произвольного начального состояния в конечное с гашением относительных отклонений. В предположении о пренебрежимой малости центробежных сил была предложена схема решения данной задачи путем сведения ее к некоторой задаче математической физики и проблеме моментов. Исследовалась [4] управляемое движение упругого стержня с учетом деформации растяжения и деформации изгиба. Решена задача перевода стержня из заданного начального в заданное конечное угловое положение без возбуждения колебаний при условии равенства нулю угловой скорости и упругих отклонений в начале и конце маневра. Исследовалось [5] управление манипуляторами с упругими звеньями и полезной нагрузкой. Решена задача перевода манипулятора из заданного начального в заданное конечное положение без возбуждения колебаний. Управление строилось в виде рядов по степеням параметра, обратно пропорционального модулю Юнга. Был предложен метод решения задачи быстрогодействия для упрощенной модели манипулятора с упругими звеньями [6]. В данной работе развит метод исследования управляемого движения манипулятора, состоящего из упругой балки и закрепленной на одном из ее концов полезной нагрузки, в условиях действия силы тяжести с учетом кручения, деформации растяжения и деформации изгиба. Решается задача о переносе полезной нагрузки из заданного начального положения в заданное конечное. Движение разбивается на два этапа: 1) перемещение манипулятора в требуемое положение; 2) придание нагрузке требуемой угловой ориентации. Предлагаемый способ исследования основан на применении полуобратного метода решения задач динамики, позволяет получить закон изменения мгновенной формы балки и построить управляющий момент с наперед заданной точностью разложения решений по сте-



Фиг. 1

пеням параметра, обратно пропорционального модулю Юнга.

1. Уравнения движения нагруженной балки.

Рассматриваемая система состоит из упругой однородной балки и закрепленной на одном из ее концов полезной нагрузки. Балка представляет собой однородный протяженный брус произвольного поперечного сечения с нейтральной линией, проходящей через центры масс сечений. В недеформированном состоянии нейтральная линия предполагается прямолинейной. Балка может совершать вращательные движения в пространстве $O'x'y'z$ вокруг оси $O'z$ под действием управляющего момента M . Точка O балки может двигаться вдоль оси $O'z$ под действием управляющей силы F . Пусть l – длина балки, ρ – ее плотность, σ – площадь поперечного сечения, m – масса нагрузки, g – ускорение свободного падения.

Предполагается, что смещения точек балки малы по сравнению с ее длиной. Введем вращающуюся вокруг оси $O'z$ вместе с балкой систему координат $Oxyz$. Ось Ox зададим по направлению касательной к нейтральной линии балки в точке O (фиг. 1).

Пусть x – расстояние от конца O недеформированной балки до некоторой ее точки G на нейтральной линии. Пусть δr – вектор перемещения точки G , а $u(t, x)$, $w(t, x)$, $z(t, x)$ – проекции вектора δr на оси системы координат $Oxyz$. В каждый фиксированный момент времени смещение $\delta r(t, x)$ – вектор-функция аргумента x , определяющая мгновенную форму балки. При фиксированном значении x смещение $\delta r(t, x)$ – вектор-функция времени, однозначно определяющая положение соответствующей точки нейтральной линии балки.

Пусть ϕ – угол поворота репера $Oxyz$, который отсчитывается от оси, проходящей через точку O параллельно оси $O'x'$, $(r_1, r_2, r_3)^T$ – координаты центра масс нагрузки в связанной с ней системе координат $O''x''y''z''$ с началом в точке O'' закрепления нагрузки и балки (ось $O''x''$ направлена вдоль касательной к нейтральной линии балки в точке O'' ; если $\phi = 0$ и балка не деформирована, то оси $O''x''$, $O''y''$, $O''z''$ параллельны осям $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ соответственно). Предполагается, что r_1 , r_2 и r_3 малы по сравнению с длиной балки. Пусть $O''x''$, $O''y''$, $O''z''$ – главные оси инерции нагрузки, A , B , C – главные моменты инерции нагрузки относительно осей $O''z''$, $O''y''$, $O''x''$ соответственно.

Свяжем с каждым поперечным сечением балки систему координат $Gx'''y'''z'''$, причем ось Gx''' направим по касательной к нейтральной линии балки в точке G . Пусть γ – угол поворота поперечного сечения балки вокруг оси Gx''' . Учитывая инерцию вращения нагрузки и поперечного сечения балки [7], кинетическую энергию системы можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \sigma \mathcal{F}(u, u_x, w, w_x, z, z_x, \phi) dx + \frac{1}{2} m \tilde{\mathcal{F}}(a, a_x, b, b_x, c, \phi) + T_1$$

$$a(t) = u(t, l) + r_1 - r_2 w_x(t, l) - r_3 z_x(t, l)$$

$$b(t) = w(t, l) + r_2 + r_1 w_x(t, l) - r_3 \gamma(t, l)$$

$$c(t) = z(t, l) + \tilde{z}(t) + r_3 + r_1 z_x(t, l) + r_2 \gamma(t, l)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u, u_t, w, w_t, z_t, \tilde{z}_t, x, \dot{\phi}) &= (x\dot{\phi} + w_t)^2 + w^2\dot{\phi}^2 + 2xu\dot{\phi}^2 + u^2\dot{\phi}^2 + \\ &+ u_t^2 + 2u\dot{\phi}w_t - 2w\dot{\phi}u_t + (z_t + \tilde{z}_t)^2 \\ \tilde{\mathcal{F}}(a, a_t, b, b_t, c_t, l, \dot{\phi}) &= (l\dot{\phi} + b_t)^2 + b^2\dot{\phi}^2 + 2la\dot{\phi}^2 + a^2\dot{\phi}^2 + a_t^2 + 2a\dot{\phi}b_t - 2b\dot{\phi}a_t + c_t^2 \\ T_1 &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_1 (w_{xt} + \dot{\phi})^2 dx + \frac{1}{2} A (w_{xt}(t, l) + \dot{\phi})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^l \rho (I_2 z_{tx}^2 + I_3 \gamma_t^2) dx + \frac{1}{2} (B z_{tx}^2(t, l) + C \gamma_t^2(t, l)) \end{aligned}$$

$\tilde{z}(t)$ – абсолютная вертикальная координата точки O , I_1, I_2, I_3 – моменты инерции поперечного сечения относительно осей Gz''' , Gy''' и Gx''' соответственно.

Потенциальная энергия имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^l E (I_1 w_{xx}^2 + I_2 z_{xx}^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^l E I_3 \gamma_x^2 dx + \int_0^l g \rho \sigma (z + \tilde{z}) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^l E \sigma (\sqrt{(1 + u_x)^2 + w_x^2 + z_x^2} - 1)^2 dx + mg(z(t, l) + \tilde{z}) + mg(r_2 \sin \gamma + r_3 \cos \gamma) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где E – модуль Юнга.

Первое слагаемое в правой части равенства (1.1) есть потенциальная энергия упругой деформации изгиба, второе слагаемое представляет собой потенциальную энергию деформации кручения, третье, пятое и шестое слагаемые – потенциальную энергию силы тяжести балки и нагрузки, четвертое слагаемое – потенциальную энергию упругой деформации растяжения.

Введем безразмерные переменные (всюду далее $k = 1, 2, 3$)

$$t' = \frac{t}{\tau}, \quad u' = \frac{u}{l}, \quad w' = \frac{w}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad \tilde{z}' = \frac{\tilde{z}}{l}, \quad x' = \frac{x}{l}, \quad r'_k = \frac{r_k}{l}$$

где τ – масштаб времени, причем

$$\frac{1}{\tau^2} < \frac{EI}{\rho \sigma l^4} < \frac{E}{\rho l^2} \quad (1.2)$$

Пусть M_0 и F_0 – характерные величины размерности момента силы и силы соответственно, например, $M_0 = \sup_t |\mathbf{M}(t)|$, $F_0 = \sup_t |\mathbf{F}(t)|$. Предполагается, что u_x, w_x, z_x малы по сравнению с единицей. Пусть выполнены следующие неравенства:

$$\dot{\phi}^2 \ll \frac{1}{\tau^2}, \quad \ddot{\phi} \ll \frac{1}{\tau^2}$$

Используя принцип Остроградского–Гамильтона [8] и учитывая сделанные допущения, систему уравнений движения и краевые условия в новых переменных можно записать в виде (штрихи опущены) [5]

$$\begin{aligned}
& \beta \int_0^1 [x^2 \ddot{\phi} + x w_{tt} + 2x \phi u_t] dx + \beta \alpha [\dot{\phi} + w_{tt} + 2\phi u_t] |_{x=1} + \\
& + \beta_1 \int_0^1 (\dot{\phi} + w_{xtt}) dx + \beta_2 (w_{xtt}(t, 1) + \dot{\phi}) = Q_1 \\
& \tilde{\beta} \int_0^1 z_{tt} dx + \tilde{\beta} (1 + \alpha) \tilde{z}_{tt} + \tilde{\beta}_3 + \alpha \tilde{\beta} z_{tt}(t, 1) + \int_0^1 \tilde{\beta}_1 z_{xtt} dx + \tilde{\beta}_2 z_{xtt}(t, 1) = Q_2 \\
& \mu \chi_1 \left(x \ddot{\phi} + w_{tt} - \frac{1}{\chi_1} w_{xxtt} + 2\phi u_t \right) + w_{xxxx} = 0 \\
& \mu \chi_2 \left(z_{tt} - \frac{1}{\chi_2} z_{xxtt} + \tilde{z}_{tt} + \Delta \right) + z_{xxxx} = 0 \\
& \gamma_{xx} = \mu \gamma_{tt} \mu (x \dot{\phi}^2 - u_{tt} + 2\phi w_t) + u_{xx} = 0 \\
& w_{xx}(t, 1) = -\mu \chi_1 \lambda_1 (w_{xtt} + \dot{\phi}) |_{x=1} \\
& z_{xx}(t, 1) = -\mu \chi_2 \lambda_2 z_{xtt} |_{x=1} \\
& w_{xxx}(t, 1) = \mu \chi_1 \alpha [\dot{\phi} + w_{tt} + 2\phi u_t] |_{x=1} + \mu (w_{xtt} + \dot{\phi}) |_{x=1} \\
& z_{xxx}(t, 1) = \mu \chi_2 \alpha [\tilde{z}_{tt} + z_{tt} + \Delta] |_{x=1} + \mu z_{xtt} |_{x=1} \\
& \gamma_x(t, 1) = -\mu \lambda_3 \gamma_{tt}(t, 1) - \mu \alpha \chi_3 (r_2 \Delta - r_3 \dot{\phi} + r_2 \tilde{z}_{tt}) \\
& u_x(t, 1) = \mu \alpha [\dot{\phi}^2 - u_{tt} + 2\phi w_t] |_{x=1} \\
& L = \frac{m}{\rho \sigma}, \quad \alpha = \frac{L}{l}, \quad \beta = \frac{\rho \sigma l^3}{\tau^2 M_0}, \quad \beta_1 = \frac{\rho l l}{\tau^2 M_0}, \quad \beta_2 = \frac{A}{\tau^2 M_0} \\
& \tilde{\beta} = \frac{\rho \sigma l^2}{\tau^2 F_0}, \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{\rho l l_3}{\tau^2 F_0}, \quad \tilde{\beta}_2 = \frac{B}{\tau^2 F_0}, \quad \tilde{\beta}_3 = \frac{g}{F_0} (m + \rho \sigma l) \\
& Q_1 = \frac{M}{M_0}, \quad Q_2 = \frac{F}{F_0}, \quad \mu = \frac{\rho l^2}{E \tau^2}, \quad \chi_k = \frac{\sigma l^2}{I_k} \\
& \lambda_1 = \frac{A}{\rho \sigma l^3}, \quad \lambda_2 = \frac{B}{\rho \sigma l^3}, \quad \lambda_3 = \frac{C}{\rho \sigma l^3}, \quad \Delta = \frac{g \tau^2}{l}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Поскольку конец балки O закреплен и защемлен, к перечисленным равенствам следует добавить еще шесть условий:

$$\begin{aligned}
& w(t, 0) = 0, \quad w_x(t, 0) = 0, \quad u(t, 0) = 0 \\
& z(t, 0) = 0, \quad z_x(t, 0) = 0, \quad \gamma(t, 0) = 0
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Для приведенной выше математической модели решалась задача о переводе балки из заданного начального положения в заданное конечное, причем в начале и в конце маневра должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad w(0, x) = w_t(0, x) = u(0, x) = u_t(0, x) = 0 \\ \tilde{z}(0) = \tilde{z}_t(0) = 0, \quad z(0, x) = Z_0(x), \quad z_t(0, x) = 0, \quad \gamma(0, x) = G_0(x) \\ \varphi(\eta) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(\eta) = 0, \quad w(\eta, x) = w_t(\eta, x) = u(\eta, x) = u_t(\eta, x) = 0 \\ \tilde{z}(\eta) = z_0, \quad \tilde{z}_t(\eta) = 0 \\ z(\eta, x) = Z_0(x), \quad z_t(\eta, x) = 0, \quad \gamma(\eta, x) = G_0(x) \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\eta = \frac{T}{\tau}, \quad Z_0(x) = -\mu\chi_2 \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}(\alpha + 1)x^3 + \frac{1}{4}(1 + 2\alpha)x^2 \right] \Delta$$

$$G_0(x) = -\mu\chi_3 \alpha r_2 x \Delta$$

Фактически эти условия означают, что манипулятор переводится из одного состояния равновесия в другое без возбуждения колебаний.

2. Управление упругой нагруженной балкой. Решение системы (1.3) с учетом условий (1.4) и (1.5) будем строить в виде рядов по степеням параметра μ . Пусть $\mu = 0$, тогда

$$u^{(0)}(t, x) \equiv 0, \quad w^{(0)}(t, x) \equiv 0, \quad z^{(0)}(t, x) \equiv 0, \quad \gamma^{(0)}(t, x) \equiv 0$$

Следовательно,

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i u^{(i)}(t, x), \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i w^{(i)}(t, x) \tag{2.1}$$

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i z^{(i)}(t, x), \quad \gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \gamma^{(i)}(t, x)$$

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \varphi^{(i)}(t), \quad \tilde{z} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \tilde{z}^{(i)}(t), \quad Q_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i Q_1^{(i)}(t), \quad Q_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i Q_2^{(i)}(t) \tag{2.2}$$

Пусть $\dot{\varphi}^{(0)}(t)$ и $\tilde{z}_t^{(0)}(t)$ – заданные функции. Предположим, что $\dot{\varphi}^{(i)}(t) \equiv 0$ и $\tilde{z}_t^{(i)}(t) \equiv 0$ для любых $i > 0$. Выделим в уравнениях (1.3) и в краевых условиях коэффициенты при нулевой и первой степенях μ . Для первого приближения получим следующие выражения:

$$u^{(1)}(t, x) = (\dot{\varphi}^{(0)})^2 \frac{x^2}{2} \left[(2\alpha + 1) - \frac{x^2}{3} \right] \tag{2.3}$$

$$w^{(1)}(t, x) = -\frac{\chi_1}{120} \dot{\varphi}^{(0)} [x^5 - 10(2(\alpha + \chi_1^{-1}) + 1)x^3 + 20(3(\alpha + \chi_1^{-1} + \lambda_1) + 1)x^2] \tag{2.4}$$

$$z^{(1)}(t, x) = -\chi_2 \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}(\alpha + 1)x^3 + \frac{1}{4}(2\alpha + 1)x^2 \right] (\tilde{z}_{tt}^{(0)} + \Delta) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{(1)}(t, x) &= -\mu\alpha\chi_3(r_2\Delta - r_3\ddot{\phi}^{(0)} + r_2\ddot{z}_{tt}^{(0)}) \\
Q_1^{(0)} &= \beta\left(\frac{1}{3} + \alpha\right)\ddot{\phi}^{(0)} + (\beta_1 + \beta_2)\ddot{\phi}^{(0)} \\
Q_1^{(1)}(t) &= \beta\int_0^1 [xw_{tt}^{(1)} + 2x\dot{\phi}^{(0)}u_t^{(1)}]dx + \beta\alpha[w_{tt}^{(1)} + 2\dot{\phi}^{(0)}u_t^{(1)}]_{x=1} + \\
&+ \beta_1\int_0^1 w_{xtt}^{(1)}dx + \beta_2w_{xtt}^{(1)}(t, 1) \\
Q_2^{(0)}(t) &= \tilde{\beta}(1 + \alpha)\ddot{z}_{tt}^{(0)} + \tilde{\beta}_3 \\
Q_2^{(1)}(t) &= \tilde{\beta}\int_0^1 z_{tt}^{(1)}dx + \alpha\tilde{\beta}z_{tt}^{(1)}(t, 1) + \int_0^1 \tilde{\beta}_1z_{xtt}^{(1)}dx + \tilde{\beta}_2z_{xtt}^{(1)}(t, 1)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Выделяя коэффициенты при μ^n , получим рекуррентные формулы для определения n -го приближения $u^{(n)}$, $w^{(n)}$, $Q_1^{(n)}$, $Q_2^{(n)}$ ($n > 1$)

$$\begin{aligned}
&\beta\int_0^1 [xw_{tt}^{(n)} + 2x\dot{\phi}^{(0)}u_t^{(n)}]dx + \beta\alpha[w_{tt}^{(n)} + 2\dot{\phi}^{(0)}u_t^{(n)}]_{x=1} + \\
&+ \beta_1\int_0^1 w_{xtt}^{(n)}dx + \beta_2w_{xtt}^{(n)}(t, 1) = Q_1^{(n)} \\
&\tilde{\beta}\int_0^1 z_{tt}^{(n)}dx + \alpha\tilde{\beta}z_{tt}^{(n)}(t, 1) + \int_0^1 \tilde{\beta}_1z_{xtt}^{(n)}dx + \tilde{\beta}_2z_{xtt}^{(n)}(t, 1) = Q_2^{(n)} \\
w_{xxxx}^{(n)} &= -\chi_1\left[w_{tt}^{(n-1)} - \frac{1}{\chi_1}w_{xxtt}^{(n-1)} + 2\dot{\phi}^{(0)}u_t^{(n-1)}\right] \\
z_{xxxx}^{(n-1)} &= -\chi_2\left(z_{tt}^{(n-1)} - \frac{1}{\chi_2}z_{xxtt}^{(n-1)}\right) \\
\gamma_{xx}^{(n)} &= \gamma_{tt}^{(n-1)} \\
u_{xx}^{(n)} &= -[-u_{tt}^{(n-1)} + 2\dot{\phi}^{(0)}w_t^{(n-1)}] \\
w^{(n)}(t, 0) &= w_x^{(n)}(t, 0) \equiv 0 \\
w_{xx}^{(n)}(t, 1) &= -\chi_1\lambda_1w_{xtt}^{(n-1)}(t, 1) \\
w_{xxx}^{(n)}(t, 1) &= \chi_1\alpha[w_{tt}^{(n-1)} + 2\dot{\phi}^{(0)}u_t^{(n-1)}]_{x=1} + w_{xtt}^{(n-1)}(t, 1)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$z^{(n)}(t, 0) = z_x^{(n)}(t, 0) \equiv 0$$

$$z_{xx}^{(n)}(t, 1) = -\chi_2 \lambda_2 z_{xii}^{(n-1)}(t, 1)$$

$$z_{xxx}^{(n)}(t, 1) = \chi_2 \alpha z_{ii}^{(n-1)}(t, 1) + z_{xii}^{(n-1)}(t, 1)$$

$$\gamma^{(n)}(t, 0) \equiv 0, \quad \gamma_x^{(n)}(t, 1) \equiv -\lambda_3 \gamma_{ii}^{(n-1)}(t, 1)$$

$$u^{(n)}(t, 0) \equiv 0$$

$$u_x^{(n)}(t, 1) = \alpha [-u_{ii}^{(n-1)} + 2\phi^{(0)} w_i^{(n-1)}] \Big|_{x=1}$$

Последние четыре уравнения системы (2.7) можно разрешить, поскольку правые части этих уравнений представляют собой многочлены по степеням x . Затем, подставляя найденные выражения для $w^{(n)}$, $z^{(n)}$, $u^{(n)}$ и $\gamma^{(n)}$ в первое и второе уравнения системы (2.7), получим законы изменения $Q_1^{(n)}(t)$ и $Q_2^{(n)}(t)$.

Для того чтобы условия (1.5) были выполнены до n -го порядка включительно, достаточно подбирать функции $\phi^{(0)}(t)$, $\tilde{z}_i^{(0)}(t)$ так, чтобы

$$\phi^{(0)}(0) = \dot{\phi}^{(0)}(0) = \dots = \frac{d^{2n+1} \phi^{(0)}}{dt^{2n+1}}(0) = 0$$

$$\tilde{z}_i^{(0)}(0) = \dot{\tilde{z}}_{ii}^{(0)}(0) = \dots = \frac{d^{2n+1} \tilde{z}^{(0)}}{dt^{2n+1}}(0) = 0$$

(2.8)

$$\phi^{(0)}(\eta) = \dot{\phi}^{(0)}(\eta) = \dots = \frac{d^{2n+1} \phi^{(0)}}{dt^{2n+1}}(\eta) = 0$$

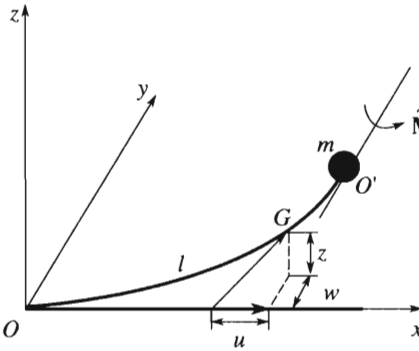
$$\tilde{z}_i^{(0)}(\eta) = \dot{\tilde{z}}_{ii}^{(0)}(\eta) = \dots = \frac{d^{2n+1} \tilde{z}^{(0)}}{dt^{2n+1}}(\eta) = 0$$

Условия (2.8) получены из системы уравнений (2.7), а также из (2.3)–(2.6). Коэффициенты в разложениях (2.1), (2.2) носят полиномиальный характер по x .

3. Уравнения движения упругого манипулятора с вращающейся полезной нагрузкой. Рассматривается манипулятор, который состоит из упругой однородной балки и нагрузки массы m . Конец балки O закреплен и заземлен. В точке O касательная к нейтральной линии балки остается неподвижной. Нагрузка прикреплена к концу балки O' и может вращаться под действием момента \tilde{M} вокруг оси, совпадающей с касательной в точке O' к нейтральной линии балки. Центр масс нагрузки может отстоять от касательной к нейтральной линии балки в точке O' . Предполагается, что смещения точек балки малы по сравнению с ее длиной.

Введем неподвижную систему координат $Oxuz$. Ось Ox зададим по нейтральной прямой недеформированной балки в начальный момент времени (фиг. 2).

По-прежнему x – расстояние от конца O недеформированной балки до некоторой ее точки G на нейтральной линии. Пусть $\delta \mathbf{r}$ – вектор перемещения точки G , а $u(t, x)$, $w(t, x)$, $z(t, x)$ – проекции вектора $\delta \mathbf{r}$ на оси системы координат $Oxuz$.



Фиг. 2

Свяжем с каждым поперечным сечением балки систему координат $Gx'y'z'$, причем ось Gx' направим по касательной к нейтральной линии балки в точке G . Кинетическую энергию механической системы представим в виде суммы двух слагаемых: кинетической энергии балки T_1 и кинетической энергии нагрузки T_2 :

$$T = T_1 + T_2$$

Пусть γ – угол поворота поперечного сечения балки вокруг касательной к нейтральной линии балки (малая величина). Предположим, что Gx' , Gy' , Gz' – главные центральные оси инерции поперечного сечения балки в точке G . Тогда для кинетической энергии T_1 получим

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \sigma (u_t^2 + w_t^2 + z_t^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho (I_1 \dot{\theta}^2 + I_2 \dot{\psi}^2 + I_3 \dot{\gamma}^2) dx$$

где I_1, I_2, I_3 – моменты инерции поперечного сечения балки относительно осей Gz' , Gy' и Gx' соответственно, θ, ψ – малые углы поворота поперечного сечения балки вокруг осей Gz' и Gy' соответственно.

Кинетическая энергия T_2 вычисляется по формуле [8]

$$T_2 = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_{O'}^2 + m \mathbf{V}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}$$

где $\mathbf{V}_{O'}$ – скорость точки O' , \mathbf{r}_c – радиус-вектор центра масс нагрузки в связанной с нагрузкой системе координат $O'x'y'z''$, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, \mathbf{J} – оператор инерции.

Пусть оси $O'x'$, $O'y''$ и $O'z''$ – главные оси инерции нагрузки, а координаты вектора $\mathbf{r}_c = (R_1, R_2, R_3)$ малы по сравнению с длиной балки. Обозначим ϕ угол поворота нагрузки (не малая величина) вокруг оси Ox' , A, B, C – моменты инерции нагрузки относительно главных осей. Предположим, что $A/B \sim 1$. Тогда кинетическую энергию системы можно записать в виде [5]

$$\begin{aligned} T = T_1 + T_2 = & \frac{1}{2} \int_0^l \rho \sigma (u_t^2 + w_t^2 + z_t^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho (I_1 w_{xt}^2 + I_2 z_{xt}^2 + I_3 \dot{\gamma}_t^2) dx + \\ & + \frac{1}{2} m (u_t^2 + w_t^2 + z_t^2) \Big|_{x=l} + m \dot{\phi} [-w_t (R_3 \cos \phi + R_2 \sin \phi) + \\ & + z_t (-R_3 \sin \phi + R_2 \cos \phi)] \Big|_{x=l} + \frac{1}{2} [B (w_{zt}^2 + z_{xt}^2) + C \dot{\phi}^2] \Big|_{x=l} \end{aligned}$$

Потенциальная энергия выражается формулой

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l (EI_1 w_{xx}^2 + EI_2 z_{xx}^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^l E \sigma (\sqrt{(1 + u_x)^2 + w_x^2 + z_x^2} - 1)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l EI_3 \dot{\gamma}_x^2 dx + \int_0^l \rho \sigma g z dx + mg z(t, l) + mg (R_2 \sin \phi + R_3 \cos \phi) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Возьмем безразмерные переменные:

$$t' = \frac{t}{\tau_1}, \quad u' = \frac{u}{l}, \quad w' = \frac{w}{l}, \quad z' = \frac{x}{l}, \quad R'_k = \frac{R_k}{l}, \quad x' = \frac{x}{l}$$

где τ_1 – масштаб времени, который удовлетворяет условию (1.2).

Используя принцип Остроградского-Гамильтона и учитывая принятые допущения, получим уравнения движения и краевые условия в новых переменных (штрихи опущены) [5]

$$\begin{aligned} \mu u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad \mu(\chi_1 w_{tt} - w_{xxx}) + w_{xxxx} = 0 \\ \mu(\chi_2 z_{tt} - z_{xxx} + \chi_2 \Delta) + z_{xxxx} &= 0, \quad \mu \gamma_{tt} - \gamma_{xx} = 0 \\ \ddot{\phi} &= \tilde{Q} - \Delta_1(R_2 \cos \phi - R_3 \sin \phi) \\ w_{xx}(t, 1) + \mu \lambda_1 w_{xt}(t, 1) &= 0 \\ z_{xx}(t, 1) + \mu \lambda_2 z_{xt}(t, 1) &= 0 \\ u_x(t, 1) &= -\mu \alpha u_{tt}(t, 1) \\ \gamma_x(t, l) &= -\mu \lambda_3 \ddot{\phi} - \mu \alpha \chi_3 \Delta(R_2 \cos \phi - R_3 \sin \phi) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} w_{xxx}(t, 1) &= \mu \chi_1 \alpha [w_{tt}(t, 1) - \ddot{\phi}(R_3 \cos \phi + R_2 \sin \phi) + \\ &+ \dot{\phi}^2(R_3 \sin \phi + R_2 \cos \phi)] + \mu w_{xt}(t, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{xxx}(t, l) &= \mu \chi_2 \alpha [z_{tt}(t, l) + \Delta - \ddot{\phi}(R_3 \sin \phi - R_2 \cos \phi) - \\ &- \dot{\phi}^2(R_3 \cos \phi + R_2 \sin \phi)] + \mu z_{xt}(t, 1) \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{\rho l^2}{E \tau_1^2}, \quad \chi_k = \frac{\sigma l^2}{I_k}, \quad \lambda_1 = \frac{B}{\rho l I_1}, \quad \lambda_2 = \frac{B}{\rho l I_2}, \quad \lambda_3 = \frac{C}{\rho l I_3}$$

$$\tilde{Q} = \frac{\tilde{M} \tau_1^2}{C}, \quad L = \frac{m}{\rho \sigma}, \quad \alpha = \frac{L}{l}, \quad \Delta = \frac{g \tau^2}{l}, \quad \Delta_1 = \frac{m g l \tau^2}{C}$$

Поскольку конец балки O закреплен и защемлен, добавим следующие условия:

$$w(t, 0) = w_x(t, 0) = w_{xx}(t, 0) = \gamma(t, 0) = z(t, 0) = z_x(t, 0) = 0$$

Для приведенной выше математической модели решалась задача о повороте нагрузки из заданного начального углового положения в конечное, причем в начале и в конце маневра должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi_0, \quad \dot{\phi}(0) = 0, \quad w(0, x) = w_t(0, x) = 0 \\ u(0, x) &= u_t(0, x) = z_t(0, x) = \gamma_t(0, x) = 0 \\ z(0, x) &= Z_0(x), \quad \gamma(0, x) = G_1(x) \\ \phi(\eta_1) &= \phi_1, \quad \dot{\phi}(\eta_1) = 0, \quad w(\eta_1, x) = w_t(\eta_1, x) = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$u(\eta_1, x) = u_t(\eta_1, x) = z_t(\eta_1, x) = 0$$

$$\gamma_t(\eta_1, t) = 0, \quad z(\eta_1, x) = Z_0(x), \quad \gamma(\eta_1, x) = G_2(x)$$

где

$$\eta_1 = \frac{T_1}{\tau_1}, \quad Z_0(x) = -\mu\chi_2 \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}(\alpha + 1)x^3 + \frac{1}{4}(1 + 2\alpha)x^2 \right] \Delta$$

$$G_1(x) = -\mu\chi_3\alpha\Delta x(R_2\cos\phi_0 - R_3\sin\phi_0)$$

$$G_2(x) = -\mu\chi_3\alpha\Delta x(R_2\cos\phi_1 - R_3\sin\phi_1)$$

4. Управление движением нагрузки. Решение системы (3.2) будем строить в виде рядов по степеням параметра μ . Пусть $\mu = 0$, тогда

$$w^{(0)}(t, x) = u^{(0)}(t, x) = z^{(0)}(t, x) = \gamma^{(0)}(t, x) \equiv 0$$

Следовательно,

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i u^{(i)}(t, x), \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i w^{(i)}(t, x), \quad z = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i z^{(i)}(t, x) \quad (4.1)$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \gamma^{(i)}(t, x), \quad \phi = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \phi^{(i)}(t), \quad \tilde{Q} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \tilde{Q}^{(i)}(t) \quad (4.2)$$

Пусть $\dot{\phi}^{(0)}(t)$ – заданный закон изменения угловой скорости нагрузки. Предположим, что $\phi^{(i)} \equiv 0$ для любых $i > 0$. Выделим в уравнениях (3.2) и в краевых условиях коэффициенты при нулевой и первой степенях μ . Для первого приближения получим выражения

$$u^{(1)}(t, x) \equiv 0, \quad w^{(1)}(t, x) = f_1(x)\Lambda_1(t), \quad f_1(x) = \frac{1}{2}\chi_1\alpha \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \quad (4.3)$$

$$z^{(1)}(t, x) = -\chi_2 \left\{ \left[\frac{x^4}{24} - (\alpha + 1)\frac{x^3}{6} + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{x^2}{2} \right] \Delta - \alpha\Lambda_2(t) \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right] \right\} \quad (4.4)$$

$$\gamma^{(1)}(t, x) = h_1(x)\ddot{\phi}^{(0)} + p_1(x)\Lambda_3(t), \quad h_1(x) = -\lambda_3x, \quad p_1(x) = -\alpha\chi_3\Delta x \quad (4.5)$$

где

$$\Lambda_1(t) = \ddot{\phi}^{(0)}(R_3\cos\phi^{(0)} + R_2\sin\phi^{(0)}) + (\dot{\phi}^{(0)})^2(R_3\sin\phi^{(0)} + R_2\cos\phi^{(0)})$$

$$\Lambda_2(t) = \ddot{\phi}^{(0)}(R_2\cos\phi^{(0)} - R_3\sin\phi^{(0)}) - (\dot{\phi}^{(0)})^2(R_2\sin\phi^{(0)} + R_3\cos\phi^{(0)})$$

$$\Lambda_3(t) = R_2\cos\phi^{(0)} - R_3\sin\phi^{(0)}$$

$$\tilde{Q}(t) = \ddot{\phi}^{(0)}(t) + \Delta_1\Lambda_3(t)$$

Выделяя коэффициенты при μ^n , получим рекуррентные формулы для n -го приближения $u^{(n)}, w^{(n)}, z^{(n)}, \gamma^{(n)}$ ($n > 1$)

$$\begin{aligned}
 u^{(n)}(t, x) &\equiv 0, \quad w_{xxxx}^{(n)} = (f_{n-1}'' - \chi_1 f_{n-1}) \frac{d^{2(n-1)}}{dt^{2(n-1)}} \Lambda_1(t) \\
 z_{xxxx}^{(n)} &= (g_{n-1}'' - \chi_2 g_{n-1}) \frac{d^{2(n-1)}}{dt^{2(n-1)}} \Lambda_2(t) \\
 \gamma_{xx}^{(n)} &= h_{n-1} \phi^{(2n)} + p_{n-1} \frac{d^{2(n-1)}}{dt^{2(n-1)}} \Lambda_3(t) \\
 w^{(n)}(t, 0) &= w_x^{(n)}(t, 0) \equiv 0 \\
 w_{xx}^{(n)}(t, 1) &= -\lambda_1 f_{n-1}'(1) \frac{d^{2(n-1)}}{dt^{2(n-1)}} \Lambda_1(t) \\
 z_{xx}^{(n)}(t, 1) &= -\lambda_2 g_{n-1}'(1) \frac{d^{2(n-1)}}{dt^{2(n-1)}} \Lambda_2(t) \\
 w_{xxx}^{(n)}(t, 1) &= [\chi_1 \alpha f_{n-1}(1) + f_{n-1}'(1)] \frac{d^{2(n-1)}}{dt^{2(n-1)}} \Lambda_1(t) \\
 z_{xxx}^{(n)}(t, 1) &= [\chi_2 \alpha g_{n-1}(1) + g_{n-1}'(1)] \frac{d^{2(n-1)}}{dt^{2(n-1)}} \Lambda_2(t) \\
 \gamma^{(n)}(t, 0) &= \gamma_x^{(n)}(t, 1) = 0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $f_i(x), g_i(x), h_i(x)$ и $p_i(x)$ – полиномы.

Для обеспечения выполнения условий (3.3) до n -го порядка включительно необходимо подбирать функцию $\dot{\phi}^{(0)}(t)$, удовлетворяющую условиям (2.8). Как и в предыдущей задаче, коэффициенты разложений (4.1), (4.2) имеют вид полиномов по x .

5. Результаты расчетов. Вычисления были проделаны для следующих значений параметров:

$$\rho = 5500 \text{ кг/м}^3, \quad E = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad l = 1 \text{ м}, \quad T = 2 \text{ с}, \quad m = 14 \text{ кг}$$

$$R_1 = 0.15 \text{ м}, \quad R_2 = R_3 = 0.1 \text{ м}, \quad \tau = 0.02 \text{ с}, \quad \tau_1 = 0.02 \text{ с}, \quad T_1 = 0.2 \text{ с}, \quad \eta_1 = 10$$

$$A = B = 0.05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad C = 0.1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad \mu = 9.167 \cdot 10^{-5}, \quad \alpha = 0.507, \quad \eta = 100$$

Предполагалось, что сечение балки представляет собой круг радиуса $r = 0.04$ м. Законы изменения скоростей брались в виде

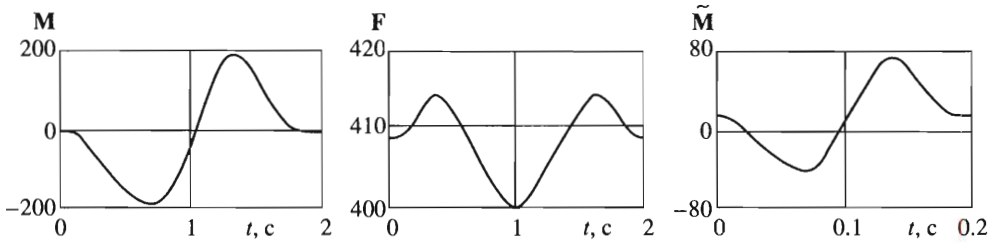
$$\phi^{(0)}(t) = A_1 t^5 (t - \eta)^5, \quad \dot{\phi}^{(0)}(t) = A_2 t^5 (t - \eta_1)^5, \quad \tilde{z}_i(t) = A_3 \sin^5\left(\frac{\pi t}{\eta}\right)$$

Предполагалось, что

$$\phi(\eta) = -10.8, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(\eta_1) = -5\pi/4, \quad \tilde{z}(\eta) = 0.679$$

Отсюда

$$A_1 = -3 \cdot 10^{-18}, \quad A_2 = -10.9 \cdot 10^{-8}, \quad A_3 = 0.02$$



Фиг. 3

Это соответствует максимуму модулей угловых скоростей

$$\dot{\varphi}_{\max} \approx 14.6 \text{ c}^{-1}, \quad \dot{\psi}_{\max} \approx 53.3 \text{ c}^{-1}$$

При расчетах брались разложения до второго порядка по μ . На фиг. 3 представлены графики зависимостей управляющих моментов и сил для модели движения упругого манипулятора с полезной нагрузкой (осуществлен обратный переход от безразмерных величин к размерным).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00079), в рамках Федеральной целевой программы "Интеграция" (Т0267, Б0053) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-1835.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управляемом вращении упругого стержня // ПИММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 587–595.
2. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Кумакшиев С.А., Чернов А.А. Активное гашение колебаний крупногабаритных несущих конструкций посредством перемещения внутренних масс // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 135–145.
3. Бербюк Б.Е., Демидюк М.В. Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами // МГТ. 1984. № 2. С. 59–67.
4. Голубев Ю.Ф., Дитковский А.Е. Управление вращением упругого стержня на плоскости без возбуждения упругих колебаний // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 1. С. 160–165.
5. Голубев Ю.Ф., Дитковский А.Е. Управляемое движение упругого манипулятора // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 6. С. 166–176.
6. Austin Y., Formal'sky A. On the feedforward torques and reference trajectory for flexible two-link arm // Multibody System Dynamics. 1999. V. 3. № 3. P. 241–265.
7. Филиппов А.П. Колебания упругих систем. Киев: Изд-во АН УССР, 1956. 322 с.
8. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.

Москва
e-mail: golubev@keldysh.ru

Поступила в редакцию
15.V.2003