

УДК 531.36:534.1; 62–50

© 2004 г. Л. Д. Акуленко

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯМИ БИФИЛЯРНОГО МАЯТНИКА

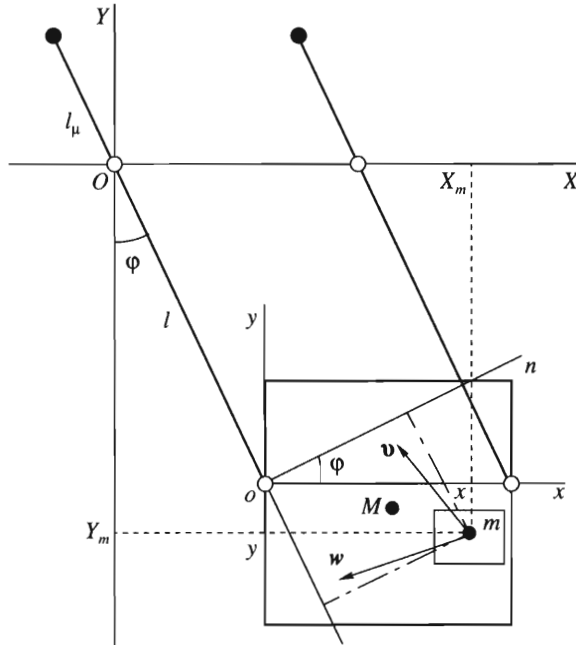
Исследуются управляемые колебательные и вращательные движения твердого тела на плоскопараллельном бифилярном подвесе. С телом связан управляемый объект, относительное положение которого может изменяться регулируемым образом. В качестве управляющего воздействия принимаются векторы ускорения или скорости перемещения объекта относительно тела. Величины управляющих воздействий считаются малыми по сравнению с силами тяготения, что позволяет в безразмерных переменных ввести малый параметр. Рассмотрены конкретные области ограничений (прямоугольник, эллипс, наклонный отрезок). С помощью асимптотических методов построено решение первого приближения для задачи оптимального управления энергией колебаний и вращений системы. Отдельно изучены случаи малых колебаний и быстрых вращений. Установлены и прокомментированы качественные особенности управляемых движений бифилярного маятника.

Построение, исследование и оптимизация управляемых движений для вращательно-колебательных систем типа маятника представляют значительный прикладной интерес применительно к задачам функционирования приборов, аэрокосмических тросовых систем, подъемно-транспортных механизмов, аттракционов и др., см. [1, 2] и библиографию. На практике могут быть реализованы разные способы управляющего воздействия: внешнее – посредством силы или (и) момента сил относительно фиксированной оси [1], инерционное – посредством управляемого перемещения точки подвеса [1, 2], параметрическое – при помощи регулируемого изменения длины подвеса [2] или относительного перемещения внутренних масс [2–4] и др.

Ниже исследуется задача оптимального по быстрдействию управления плоскими колебаниями и вращениями системы типа маятника – твердого тела на плоскопараллельном бифилярном подвесе (фигура). В качестве управляющих воздействий принимаются регулируемые по ускорению или скорости относительные перемещения внутренней массы (модель “вращающихся качелей” или “чешских качелей”). Отметим, что движения тела на бифилярном подвесе обладают специфическими свойствами.

1. Постановка задачи. Для определенности и простоты рассматривается симметричная реализация подвеса с помощью абсолютно жестких штанг одинаковой длины l (фигура). При этом твердое тело M может иметь произвольное распределение масс. Неподвижные шарниры подвесов связаны с горизонтальной осью X инерциальной системы XU ; расстояние между ними равно d . Расстояние между подвижными шарнирами на теле M также равно d , так что движения тела оказываются поступательными. Отрезки, соединяющие последовательно шарниры, образуют параллелограмм. Центр масс M тела и все его точки движутся по окружностям радиуса l с неподвижными центрами в системе XU . Эти движения и ориентация осей штанг относительно вертикали U определяются углом φ .

Далее считается, что тело M является несущим, и к нему присоединен несомый объект массы m посредством голономных нестационарных связей. Этот объект (в частности, материальная точка) может совершать относительные поступательные



движения. Для описания перемещений вводится связанная с телом система координат xu , ось x которой проходит через точки подвижных шарниров, а левый шарнир – начало. В этой системе точка M (центр масс несущего тела) неподвижна и имеет постоянные координаты x_M, y_M , а центр масс m подвижного объекта описывается координатами x_m, y_m , т.е. вектором \mathbf{r}_m , которые могут изменяться во времени t регулируемым образом [2, 4].

Координаты X_M, Y_M и X_m, Y_m точек M и m в инерциальной системе XU представимы выражениями

$$\begin{aligned} X_M &= l \sin \varphi + x_M, & Y_M &= -l \cos \varphi + y_M, & l, x_M, y_M &= \text{const} \\ X_m &= l \sin \varphi + x, & Y_m &= -l \cos \varphi + y, & x_m &\equiv x, & y_m &\equiv y \end{aligned} \quad (1.1)$$

не зависящими от параметра d . Для сокращения записи нижний индекс m , характеризующий подвижную точку, далее опускается. Дифференцированием выражений (1.1) получаются компоненты скоростей, на основе которых вычисляется кинетическая энергия K системы с учетом суммарной кинетической энергии K_μ вращательных движений штанг подвеса

$$\begin{aligned} K &= K_M + K_m + K_\mu, & K_M &= \frac{1}{2} M l^2 \dot{\varphi}^2, & K_\mu &= \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \\ K_m &= \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{\varphi} v_n + v^2), & v_n &= \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi, & v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь I – суммарный момент инерции штанг (и противовесов, см. ниже) относительно фиксированных шарниров, v_n – нормальная к осям подвеса составляющая векто-

ра относительной скорости \mathbf{v} точки m . Для построения уравнения движения нужно найти потенциальную энергию W и функцию Лагранжа L системы

$$W = W_M + W_m + W_\mu, \quad W_M = MgY_M, \quad W_m = mgY_m, \quad W_\mu = -\mu gl_\mu \cos \varphi$$

$$L = K - W = \frac{1}{2}I^*\dot{\varphi}^2 + ml\dot{\varphi}v_n + \frac{1}{2}mv^2 - W, \quad I^* = (M + m)l^2 + I \quad (1.3)$$

В выражениях (1.3) используются представления (1.1) для Y_M, Y_m и (1.2) для K .

Отметим, что кинетическая энергия K – однородная квадратичная форма переменных $\dot{\varphi}, \dot{x}, \dot{y}$. Потенциальная энергия W_μ (1.3) элементов подвеса определяется суммарной массой μ и приведенным плечом сил тяготения l_μ , которое может принимать как положительные, так и отрицательные (или нулевые) значения из-за наличия противовесов. Для простоты предполагается распределения масс штанг и противовесов таковыми, что центры масс лежат на осях, соединяющих точки подвижных и неподвижных шарниров. Потенциальная энергия W_m (1.3) точки m определяется обобщенной координатой φ и переменной величиной l согласно (1.1).

Далее считается заданным относительное движение $\mathbf{r}(t)$ точки m , т.е. функции $x(t), y(t)$. Пренебрегая возможными возмущающими факторами, на основе функции Лагранжа L (1.3) получим уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + v^2 \sin \varphi = -\gamma w_n, \quad w_n = \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi, \quad w_l = -\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi$$

$$\gamma = ml/I^*, \quad v^2 = g(Ml + ml + \mu l_\mu)/I^*, \quad v^2 > 0 \quad (1.4)$$

Здесь w_n и w_l – нормальная и параллельная осям штанг составляющая вектора относительного ускорения \mathbf{w} точки m соответственно, v – частота малых колебаний бифилярного маятника при $w_n \equiv 0$. По форме уравнение (1.4) совпадает с полученным для физического маятника, точка подвеса которого перемещается [1, 2]. Естественно рассматривать функции $\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)$ в качестве управляющих воздействий. Тогда для системы, описываемой уравнением (1.4), могут быть поставлены и исследованы содержательные задачи оптимального управления колебательными и вращательными движениями. В рамках стандартных методов теории оптимального управления требуемому изменению могут быть подвергнуты переменные $\varphi, \dot{\varphi}, x, \dot{x}, y, \dot{y}$ посредством управляющих воздействий \ddot{x}, \ddot{y} , т.е. вектора \mathbf{w} относительного ускорения точки m .

В прикладных задачах часто имеет место ситуация, когда относительная скорость \mathbf{v} перемещения внутренней массы m (или скорость точки подвеса [1, 2]) может изменяться практически мгновенно в некоторой ограниченной области. Это приводит к управлению импульсного типа и требует разработки специальных приемов решения соответствующей нелинейной задачи управления и оптимизации. Импульсные воздействия приводят к разрывной (кусочно гладкой) функции $\dot{\varphi}(t)$, однако функция $\varphi(t)$ будет непрерывной и кусочно гладкой с угловыми точками (абсолютно непрерывной). Для рассматриваемой системы это затруднение преодолевается введением гамильтоновых переменных (φ, β)

$$\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I^*\dot{\varphi} + mlv_n$$

$$H = \beta\dot{\varphi} - L = \frac{\beta^2}{2I^*} - \frac{ml}{I^*}\beta v_n + \frac{(mlv_n)^2}{2I^*} - \frac{mv^2}{2} + W(\varphi, y) \quad (1.5)$$

Здесь β – обобщенный импульс (момент импульса), H – функция Гамильтона системы. Уравнения движения не содержат обобщенных (импульсных) функций и имеют вид

$$\dot{\varphi} = H'_\beta = \frac{\beta}{I^*} - \frac{ml}{I^*} v_n, \quad v_n = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi, \quad v_t = -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi \quad (1.6)$$

$$\dot{\beta} = -H'_\varphi = -v^2 I^* \sin \varphi + (ml/I^*) \beta v_t - (m^2 l^2 / I^*) v_n v_t$$

Для системы (1.6) естественно взять в качестве управляющих воздействий функции $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, которые могут быть кусочно непрерывными, в частности релейными. Величина v_t имеет смысл тангенциальной составляющей вектора относительной скорости, т.е. проекции \mathbf{v} на оси штанг.

Отметим основные свойства движения бифилярного маятника, описываемого уравнениями в форме Лагранжа (1.4) и Гамильтона (1.6). При $w_n \equiv 0$, т.е. $\mathbf{w} \equiv 0$, уравнение (1.4) имеет первый интеграл стандартного вида

$$E = \frac{1}{2} I^* \dot{\varphi}^2 - g(Ml + ml + \mu l_\mu) \cos \varphi = \text{const} \quad (1.7)$$

который характеризует полную энергию колебаний или вращений маятника без учета в W_m (1.3) величины mgy , где $y = y^0 + \dot{y}^0 t$. С помощью интеграла (1.7) уравнение полностью интегрируется в эллиптических функциях [1, 2]. Если положить $\dot{y} = 0$, то (первым) интегралом будет также функция $E + mgy$, $y = \text{const}$.

Система (1.6) при $\mathbf{v} \equiv 0$ имеет первый интеграл вида (см. (1.5))

$$H = \frac{1}{2} \beta^2 / I^* + W(\varphi, y) = \text{const} \quad (1.8)$$

так как $y = y^0 = \text{const}$. На основе соотношения (1.8) она полностью интегрируется в эллиптических функциях.

Величина H характеризует полную энергию колебаний или вращения маятника с учетом слагаемого mgy .

Решение и исследование задач управления движениями нелинейной колебательной системы представляют известные аналитические и вычислительные трудности [1, 2]. Они значительно возрастают при наложении сложных ограничений на управление \mathbf{w} или \mathbf{v} при учете фазовых ограничений, например на допустимые положения $\mathbf{g}(t)$ точки m , т.е. координаты $x(t)$, $y(t)$, а также при задании дополнительных требований на конечные значения \mathbf{g} и \mathbf{v} . Для приложений, однако, существенный интерес представляет построение упрощенных локально оптимальных [1] или квазиоптимальных [1, 2] режимов управления, которые имеют наглядный явно выраженный резонансный характер. Соответствующие воздействия должны быть в определенном смысле слабыми, так что на интервале времени, равном периоду колебаний или вращений, происходит относительно малое изменение основных параметров движения, например энергии, амплитуды колебаний, скорости вращений и т.п. На больших интервалах, содержащих много (практически несколько) периодов, должно происходить значительное квазиоптимальное по заданному критерию качества изменение указанных характеристик движения маятника (и подвижного объекта).

Такой подход связан с применением асимптотических методов оптимального управления [2], основанных на принципе максимума [5] и методах разделения движений (усреднения) [6, 7]. Его предполагается использовать ниже для решения задач типа оптимального быстрогодействия при управлении вращательно-колебательными движениями

ми систем (1.4), (1.6). Рассматриваются типичные области (ограничения) допустимых значений \mathbf{w}, \mathbf{v} : прямоугольник (в частности, квадрат или отрезок), эллипс (в частности, круг) или отрезок прямой, наклоненной под произвольным фиксированным углом к соответствующим осям координат. Далее вводится малый числовой параметр и управляемые системы преобразуются к стандартной форме [1, 2].

2. Приведение задач управления к стандартному виду. Для придания уравнениям движения безразмерной формы с малым параметром вводится аргумент θ и единица длины ρ следующим образом: $\theta = vt, x = \rho\xi, y = \rho\eta$, где ξ, η – безразмерные относительные координаты точки m , а величина ρ выбирается из дополнительных условий. Основное требование заключается в относительной малости управляющих воздействий [2].

Так, в случае уравнения (1.4) в результате указанных замен получим

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \sin\phi &= -\varepsilon w_n, \quad \varepsilon = \gamma\rho, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \\ w_n &= \ddot{\xi} \cos\phi + \dot{\eta} \sin\phi \quad (|w_n|, |\ddot{\xi}|, |\dot{\eta}| \sim 1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Точками вновь обозначены производные по аргументу $\theta = vt$. Функция w_n (2.1) получается из w_n (1.4) делением на ρv^2 (за ней сохранено старое обозначение). Малость числового параметра ε обеспечивается отношением $ml\rho/I^* \ll 1$. Аналогичное (2.1) представление уравнения (1.4) получается при введении вместо ρ единицы ускорения b . Тогда параметр $\varepsilon = \gamma b/v^2$ и, в частности, $\varepsilon = \gamma l$ при $b = lv^2$, а функция w_n в (2.1) получается делением исходной на b .

Для системы (1.6) посредством процедуры обезразмеривания получим выражения

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \chi - \varepsilon v_n, \quad \chi = \beta/(I^*v), \quad \varepsilon = \gamma\rho = ml\rho/I^* \ll 1 \\ \dot{\chi} &= -\sin\phi + \varepsilon\chi v_l - \varepsilon^2 v_n v_l, \quad v_n = \dot{\xi} \cos\phi + \dot{\eta} \sin\phi, \quad v_l = -\dot{\xi} \sin\phi + \dot{\eta} \cos\phi \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь χ – нормированный импульс, безразмерные компоненты $|v_n|, |v_l| \sim 1$ (за ними сохранены старые обозначения). Величины v_n, v_l получаются делением исходных на ρv . Если вместо единицы длины ρ ввести единицу скорости v , то малый параметр $\varepsilon = \gamma v/v$ и, в частности, $\varepsilon = \gamma l$ при $v = lv$.

Уравнения (2.1), (2.2) приводятся к стандартному виду слабоуправляемых систем с вращающейся фазой [1, 2]. В качестве медленной переменной берется полная энергия E колебаний или вращений системы (без учета величины η , см. выше), обусловленная переменными $\phi, \dot{\phi}$ для (2.1) и ϕ, χ для (2.2) соответственно

$$E = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + 1 - \cos\phi, \quad E = \frac{1}{2}\chi^2 + 1 - \cos\phi \quad (2.3)$$

Связь между ϕ и E, ψ (ψ – фаза невозмущенных колебаний или вращений) задается посредством эллиптических интегралов [1, 2]. Однако для дальнейшего она не требуется, поскольку при решении задач управления в первом приближении по параметру ε усреднение уравнений по ψ проводится с помощью интегралов (2.3). Уравнение первого приближения для E (после отбрасывания величин $O(\varepsilon^2)$ в случае системы (2.2)) представимо в виде

$$\dot{E} = \varepsilon(\mathbf{f}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_w(\phi, \dot{\phi}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{w}; \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_v(\phi, \chi), \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} \quad (2.4)$$

Структура вектор-функции \mathbf{f} (2.4) определяется типом управляющего воздействия: по ускорению (2.1) или по скорости (2.2). Для упрощения операции максимизации соответствующей функции Гамильтона задачи оптимального по критерию быс-

тродействия управления считается, что области U допустимых значений $\mathbf{u} \in U$ имеют вид прямоугольника $U^{(1)}$, эллипса $U^{(2)}$ или наклонного отрезка $U^{(3)}$

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= \{\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T : |u_1| \leq a_1, |u_2| \leq a_2\}, \quad a_{1,2} = \text{const} \\ U^{(2)} &= \{\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T : (u_1/a_1)^2 + (u_2/a_2)^2 \leq 1\}, \quad a_{1,2} = \text{const} \\ U^{(3)} &= \{\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T : u_1 = u \cos \delta, u_2 = u \sin \delta, |u| \leq a\}, \quad a, \delta = \text{const} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Компоненты u_1, u_2 могут быть заданы в различных системах координат. Далее рассматривается два способа: в связанной с телом системе xu и в системе nl , поворачивающейся вместе со штангами на угол φ (см. фигуру), а именно,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{w}_0 &= (\ddot{\xi}, \ddot{\eta})^T \equiv (w_x, w_y)^T, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_0 = (\dot{\xi}, \dot{\eta})^T \equiv (v_x, v_y)^T, \quad \mathbf{u} \in U_0^{(i)} \\ \mathbf{u} = \mathbf{w}_\varphi &= (w_n, w_l)^T, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_\varphi \equiv (v_n, v_l)^T, \quad \mathbf{u} \in U_\varphi^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выражения (2.6) имеют наглядное геометрическое содержание.

Таким образом, согласно представлениям (2.5), (2.6) имеет место соответствие $u_1 = w_x, u_2 = w_y$ или $u_1 = w_n, u_2 = w_l$ для области U_0 или U_φ соответственно; аналогично $u_1 = v_x, u_2 = v_y$ или $u_1 = v_n, u_2 = v_l$.

Компоненты w_n, w_l вектора \mathbf{w}_φ определены в (1.4), а v_n, v_l вектора \mathbf{v}_φ – в (2.2). С помощью выражений (2.1), (2.2) для компонент векторов $\mathbf{f}_w, \mathbf{f}_v$ получаются выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{w_0} &= (-\dot{\varphi} \cos \varphi, -\dot{\varphi} \sin \varphi)^T, \quad \mathbf{f}_{v_0} = (-\sin \varphi, \chi^2)^T \\ \mathbf{f}_{v_0} &= (-\chi^2 + \cos \varphi) \sin \varphi, \chi^2 \cos \varphi - \sin^2 \varphi)^T, \quad \mathbf{f}_{w_\varphi} = (-\dot{\varphi}, 0)^T \end{aligned} \quad (2.7)$$

Связь переменных $\dot{\varphi}, \chi$ с E, φ задается согласно формулам замены (2.3). Зависимость от фазы ψ получается неявной (посредством эллиптических функций и интегралов). Уравнение для ψ , как отмечалось, не потребуется [1, 2].

Ставится задача оптимального по быстродействию изменения энергии E колебаний или вращений

$$E(0) = E^0, \quad E(\theta^f) = E^f, \quad \theta^f \rightarrow \min, \quad \mathbf{u} \in U \quad (2.8)$$

согласно уравнению (2.4). Рассматривается четыре типа управляющих воздействий (2.6), (2.7), для каждого из которых имеется три области допустимых значений (2.5) (итого 12 вариантов задачи управления). Отметим, что число режимов управления удваивается (и равно 24) вследствие различного описания движения в состоянии колебаний и вращений. Поэтому представляется нецелесообразным подробное решение для всех случаев, которые могут различаться весьма незначительно. В теоретическом и прикладном аспектах интересно выявление основных свойств управляемых движений, а также сопоставление различных способов управления.

Наряду с энергией (или амплитудой) при дополнительных условиях могут быть взяты в качестве управляемых медленных переменных относительные скорость \mathbf{v} (для системы (2.1)) или положение \mathbf{g} (для (2.2)). Такие задачи существенно труднее для эффективного решения. Поэтому на начальном этапе следует ограничиться исследованием более простых задач управления (2.4)–(2.8). Затем можно определить значения указанных дополнительных переменных и произвести их корректировку без существенного (в пределах погрешности $O(\varepsilon)$) изменения основной переменной [2].

Значительный интерес представляет механизм управления колебаниями и вращениями бифилярного маятника, обусловленный перемещением массы m вдоль фикси-

рованной достаточно гладкой кривой $x = x(s)$, $y = y(s)$, в том числе замкнутой. Ускорение \ddot{s} или скорость \dot{s} изменения параметра s этой кривой естественно принять за управляющее воздействие для системы (2.1) или (2.2) соответственно. Эти задачи требуют отдельного обсуждения.

3. Управление движениями посредством регулируемого ускорения. Рассматривается задача (2.4)–(2.8) при $\mathbf{u} = \mathbf{w}$, т.е. $\mathbf{u} = \mathbf{w}_0 \in U_0^{(i)}$ или $\mathbf{u} = \mathbf{w}_\varphi \in U_\varphi^{(i)}$ согласно соответствующим выражениям (2.6), (2.7). Ее приближенное с относительной погрешностью $O(\epsilon)$ решение строится на основе асимптотических методов оптимального управления [1, 2]. Можно установить, что квазиоптимальное управление является локально оптимальным:

$$\mathbf{w}^* = -\underset{\mathbf{w}}{\text{argmax}}(\mathbf{f}_w, \mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \in U, \quad \sigma = \text{sign}(E - E^f) \quad (3.1)$$

Компоненты вектор-функции \mathbf{f}_w определены в (2.7). Искомое управление получается в форме синтеза, т.е. по принципу обратной связи, и требует высокоточных непрерывных измерений переменных φ , $\dot{\varphi}$. Выражения для \mathbf{w}^* (3.1) удается построить в явном виде для областей $U_{0,\varphi}^{(i)}$ (2.5). Область $U_{0,\varphi}^{(1)}$, имеющая форму прямоугольника, приводит к функциям

$$\begin{aligned} w_x^* &= a_1 \sigma \text{sign}(\dot{\varphi} \cos \varphi), & w_y^* &= a_2 \sigma \text{sign}(\dot{\varphi} \sin \varphi), & \mathbf{w}^* &\in U_0^{(1)} \\ w_n^* &= a_1 \sigma \text{sign} \dot{\varphi}, & -a_2 \leq w_l^* \leq a_2, & & \mathbf{w}^* &\in U_\varphi^{(1)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Согласно соотношениям (3.2) управление w_l^* может быть произвольным в допустимых пределах, поскольку уравнение движения (2.4), как следует из выражений (2.7), не зависит от w_l . Кроме того, в случае ограничения $U_\varphi^{(1)}$ управляющее воздействие w_n^* эквивалентно ограниченному моменту сил относительно фиксированной оси [1, 2].

Аналогично в случае эллиптической области $U^{(2)}$ (2.5) согласно соотношениям (3.1) получаются выражения

$$\begin{aligned} w_x^* &= n_x a_1 \sigma \text{sign} \dot{\varphi}, & w_y^* &= n_y a_2 \sigma \text{sign} \dot{\varphi}, & \mathbf{w}^* &\in U_0^{(2)} \\ n_x &= h_x/h, & n_y &= h_y/h, & h_x &= a_1 \cos \varphi, & h_y &= a_2 \sin \varphi, & h &= |\mathbf{h}| \\ w_n^* &= a_1 \sigma \text{sign} \dot{\varphi}, & w_l^* &\equiv 0, & \mathbf{w}^* &\in U_\varphi^{(2)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь n_x , n_y – компоненты единичного вектора. Как и выше, управление $\mathbf{w}^* \in U_\varphi^{(2)}$ эквивалентно ограниченному моменту сил. В частном случае круговой области $U_0^{(2)}$ (при $a_1 = a_2 = a$) вектор \mathbf{w}^* направлен по нормали к осям штанг, т.е. коллинеарно вектору $\mathbf{w}^* \in U_\varphi^{(2)}$, а управление эквивалентно осевому моменту сил.

Весьма интересная в теоретическом и полезная в прикладном аспектах ситуация, когда вектор управления $\mathbf{u} \in U_{0,\varphi}^{(3)}$ (2.5), т.е. ускорение объекта m направлено под постоянным углом $\pi/2 - \delta$ к осям y , l , приводит к выражениям для синтеза управления

$$\begin{aligned} w_x^* &= a \sigma \text{sign}(\dot{\varphi} \cos(\varphi - \delta)) \cos \delta, & w_y^* &= a \sigma \text{sign}(\dot{\varphi} \cos(\varphi - \delta)) \sin \delta \\ w_n^* &= a \sigma \text{sign} \dot{\varphi} |\cos(\varphi - \delta)|, & |\delta| \leq \pi/2, & & \mathbf{w}^* &\in U_0^{(3)} \\ w_n^* &= a \sigma \text{sign} \dot{\varphi} \cos \delta, & w_l^* &= a \sigma \sin \dot{\varphi} \sin \delta, & \mathbf{w}^* &\in U_\varphi^{(3)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Эффективность управления $\mathbf{u} \in U^{(3)}$ весьма сильно зависит от угла δ , особенно при малых $|\varphi|$, см. выражения (3.4) и ниже. Кроме того, при $\mathbf{w}^* \in U_\varphi^{(3)}$ управление эквивалентно простому варианту управления посредством ограниченного момента сил, как и при других ограничениях, см. (3.2), (3.3).

Приближенное исследование оптимального по быстродействию изменения приведенной энергии E колебательных или вращательных движений маятника проводится на основе усредненного по фазе ψ уравнения (2.4) после подстановки выражений $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{w_0, \varphi}(\varphi, \dot{\varphi})$ (2.7) и $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*(\varphi, \dot{\varphi})$ (3.2)–(3.4). При этом переменные $\varphi, \dot{\varphi}$ предполагаются выраженными через E, ψ в силу замены, отвечающей невозмущенному движению ($\varepsilon = 0$), которая может быть представлена с помощью эллиптических функций и интегралов [1, 2]. Реализация такого подхода весьма трудоемка; она оправдана в случае малых (квазилинейных) колебаний. В общем случае нелинейных колебаний и вращений более эффективной оказывается процедура усреднения правой части “вдоль невозмущенной траектории” [1, 2, 7], т.е. с использованием соотношения $d\theta = d\varphi/\dot{\varphi}$ и с последующим интегрированием по φ . Схема усреднения имеет вид

$$\langle w_n^* \dot{\varphi} \rangle_\psi \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_n^* \dot{\varphi} d\psi = \frac{1}{T} \int_0^T w_n^* \dot{\varphi} d\theta = \frac{1}{T} \oint w_n^* d\varphi \equiv W(E) \quad (3.5)$$

В зависимости от режима движения (колебания $E < 2$ или вращения $E > 2$) выражения для периода $T(E)$ и интеграла по замкнутому контуру (3.5), отвечающему фазовой траектории $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0(E, \varphi)$, имеют различные представления. Так, в режиме колебаний получаются формулы

$$\oint w_n^* d\varphi = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} [w_n^*(\varphi, \dot{\varphi}_0^+) - w_n^*(\varphi, \dot{\varphi}_0^-)] d\varphi, \quad \dot{\varphi}_0^\pm \equiv \sqrt{2}(E - 1 + \cos \varphi)^{1/2} \quad (3.6)$$

$$T = T_v(E) = 4\mathbf{K}(k_v), \quad k_v \equiv \sqrt{E/2}, \quad 0 < k_v < 1$$

$$E < 2, \quad \varphi_0 = \varphi_0(E) = \arccos(1 - E)$$

Здесь $\mathbf{K}(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода по модулю $k = k_v$; значение для амплитуды φ_0 берется в первых двух квадрантах: $0 < \varphi_0 < \pi$ ($0 < E < 2$). Квадратуры (3.6) находятся в элементарных функциях или эллиптических интегралах. Квазилинейные колебания ($k_v \ll 1$) приводят к существенно более простым выражениям [1, 2].

В режиме вращений имеют место формулы

$$\oint w_n^* d\varphi = \int_0^{\pm 2\pi} w_n^*(\varphi, \dot{\varphi}_0^\pm) d\varphi, \quad T = T_r(E) = 2k_r \mathbf{K}(k_r) \quad (3.7)$$

$$k_r = \sqrt{2/E}, \quad 0 < k_r < 1, \quad E > 2, \quad \dot{\varphi}_0^\pm \gtrless 0, \quad |\varphi| < \infty$$

Знаки \pm отвечают положительным или отрицательным (против или по часовой стрелке) вращательным движениям тела M (вращениям штанг). Для определенности рассматривается случай положительных вращений (знак плюс). Квадратуры (3.7) берутся в элементарных функциях или эллиптических интегралах. В случае быстрых вращений $k_r \ll 1$ ($E \gg 1$) выражения (3.7) могут быть существенно упрощены.

В результате согласно соотношениям (3.5)–(3.7) усредненная правая часть уравнения для E (2.4) выражается через эллиптические интегралы и элементарные функции, содержащие неизвестную E . Это позволяет ввести “медленное время” – аргумент $\tau = \epsilon\theta$, разделить переменные E , τ и определить приближенные с относительной погрешностью $O(\epsilon)$ значения функционала (времени оптимального быстрогодействия) и энергии

$$\tau = \int_{E_0}^E \frac{d\zeta}{W(\zeta)}, \quad \tau^f = \epsilon\theta^f = \int_{E_0}^{E^f} \frac{dE}{W(E)}, \quad W(E) = \langle w_n^* \dot{\phi}_0 \rangle_\psi \quad (3.8)$$

Отметим, что знак функции $W(E)$ совпадает со знаком разности $E - E^0 \neq 0$. Отмеченный выше относительно простой случай, приводящий к ограниченному эквивалентному моменту сил (см. (3.2)–(3.4)), описывается в режимах колебаний и вращений функциями W_v и W_r соответственно

$$\begin{aligned} W_v(E) &= -\gamma_v \text{sign}(E - E^f) (\mathbf{K}(\sqrt{E/2}))^{-1} \arccos(1 - E), \quad 0 < E^0, \quad E < 2 \\ W_r(E) &= -\gamma_r \text{sign}(E - E^f) (\sqrt{2/E} \mathbf{K}(\sqrt{2/E}))^{-1}, \quad 2 < E^0, \quad E < \infty \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь γ_v, γ_r – числовые коэффициенты, определяемые значениями параметров a_1, a (a_2 не влияет на решение). Поскольку $\gamma_{v,r}$ пропорциональны a_1 или a , то из соотношений (3.9) следует, что система неуправляема при $a_1 = 0$ или $a = 0$ в рассматриваемом первом приближении по ϵ . Этот факт представляется интересным в механическом аспекте.

Для общей ситуации $\gamma_{v,r} > 0$; введением аргумента $\tau' = \gamma_{v,r}\tau$ система записывается в виде, не содержащем параметров. Это позволяет построить универсальную зависимость $E = E(\tau', E^0)$ [1, 2]. Аналитическое и численное исследование управляемых колебаний и вращений не представляет трудностей. В частности, при $E \ll 1$ (квазилинейные колебания) и $E \gg 1$ (быстрые вращения) функции $W_{v,r} \sim \sqrt{E}$, что свидетельствует о квадратической по τ' зависимости E . При $E \sim 1$, особенно в окрестности $E = 2$, т.е. сепаратрисы на фазовой плоскости ($\phi, \dot{\phi}$), могут быть проведены численные расчеты. Они также показывают, что в целом зависимость $E(\tau, E^0)$ “близка” к отрезку параболы для всех τ при $E^0 \neq 2$; окрестность $E^0 = 2$ требует дополнительного исследования.

Если $E \rightarrow 2$, то $k_{v,r} \rightarrow 1$ снизу, а периоды колебаний или вращений $T_{v,r} \rightarrow \infty$. Это обстоятельство затрудняет применение и обоснование метода усреднения [8, 9]. Кроме того, правая часть формально усредненного уравнения (2.4) стремится к нулю при $E \rightarrow 2$: $W(2) = 0$, т.е. скорость перехода через сепаратрису равна нулю. Однако эта особенность интегрируема, что не приводит к “застреванию”, и, кроме того, погрешность метода усреднения составляет величину $O(\epsilon \ln \epsilon^{-1})$ для $\theta \sim 1/\epsilon$. Таким образом, метод усреднения оказывается применимым для произвольных допустимых значений приведенной энергии E . При численном интегрировании в малой окрестности значения $E = 2$, например при $E^f = 2$, можно пользоваться асимптотикой [1]

$$\gamma\tau \approx \frac{|E - 2|}{2\pi} \left(1 + \ln \frac{32}{|E - 2|} \right), \quad \gamma = \gamma_{v,r} \quad (3.10)$$

Формула (3.10) позволяет осуществить “переход” из режима колебаний во вращения и наоборот. Универсальная кривая $E(\tau', 2)$ построена, и приведено полное решение задачи оптимального управления в первом приближении по ϵ [1].

Рассмотрим кратко оптимальную эволюцию энергии E колебаний или вращений, когда области управляющих воздействий \mathbf{u} задаются в связанной с телом M системе

координат x согласно соотношениям (3.2)–(3.4): $\mathbf{w}^* \in U_0^{(i)}$, ($i = 1, 2, 3$). Выражения для усредненных правых частей в режиме колебаний $W_v(E)$ и вращений $W_r(E)$ соответственно имеют вид при $i = 1$ ($U_0^{(1)}$ – прямоугольник)

$$\begin{aligned} W_v(E) &= -\text{sign}(E - E^f)(\mathbf{K}(\sqrt{E/2}))^{-1}[a_1(2E - E^2)^{1/2} + a_2E], \quad 0 < E \leq 1 \\ W_v(E) &= -\text{sign}(E - E^f)(\mathbf{K}(\sqrt{E/2}))^{-1}[a_1(2 - (2E - E^2)^{1/2}) + a_2E], \quad 1 \leq E < 2 \\ W_r(E) &= -2\text{sign}(E - E^f)(a_1 + a_2)(\sqrt{2/E}\mathbf{K}(\sqrt{2/E}))^{-1}, \quad E > 2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Функция $W_v(E)$ непрерывна и гладка всюду, в том числе при $E = 1$ ($W'_v(1 - 0) = W'_v(1 + 0)$). Усредненная система интегрируема согласно соотношениям (3.8), (3.11) и может быть исследована аналитическими и численными методами. Ее поведение качественно совпадает с изученным выше при $a_1 > 0$. Если же $a_1 = 0$, то имеет место управляемость всюду, кроме положения покоя $E = 0$. Это означает, что при $E^0 > 0$, $E^f > 0$ требуется конечное время τ^f (3.8); в случае $E^0 = 0$ или $E^f = 0$ задача управления на интервале $\theta^f \sim \varepsilon^{-1}$ неразрешима. Аналогично изложенному выше проводится исследование асимптотик решения при $E \ll 1$ ($a_1 > 0$), $E \approx 2$ (см. (3.10)) и $E \gg 1$. Вместо аргумента τ может быть введен $\tau' = a_0\tau$, $a_0 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, и построено универсальное семейство кривых $E(\tau', E^*, \alpha)$, где E^* – фиксированное значение (в частности, $E^* = 2$); параметр α определяется соотношениями $\cos \alpha = a_1/a_0$, $\sin \alpha = a_2/a_0$. Отметим, что в режиме вращений $E > 2$ эффективность обеих компонент w_x^* , w_y^* одинакова и определяется величиной ограничения a_1 , a_2 соответственно.

Рассмотрим также кратко случай эллиптической области $U_0^{(2)}$, см. (2.5), (3.3). Усреднение согласно соотношениям (3.5) приводит к выражениям для правых частей $W_{v,r}(E)$ вида

$$\begin{aligned} W_v(E) &= -a_1 \text{sign}(E - E^f)(\mathbf{K}(\sqrt{E/2}))^{-1} F(\varphi_0(E), k_1), \quad a_1 \geq a_2 \\ W_v(E) &= -a_2 \text{sign}(E - E^f) \left(\mathbf{K} \left(\frac{\sqrt{E}}{2} \right) \right)^{-1} \left[E_*(k_2) - F \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0(E), k_2 \right) \right], \quad a_2 \geq a_1 \\ k_1^2 &= (a_1^2 - a_2^2)a_1^{-2}, \quad k_2^2 = (a_2^2 - a_1^2)a_2^{-2}, \quad 0 \leq k_{1,2} \leq 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$W_r(E) = -2a_{1,2} \text{sign}(E - E^f)(\sqrt{2/E}\mathbf{K}(\sqrt{2/E}))^{-1} E_*(k_{1,2})$$

Здесь \mathbf{K} – полный, F – неполный эллиптические интегралы первого рода по соответствующим модулям $k_{v,r}$, $k_{1,2}$, E_* – полный эллиптический интеграл второго рода по модулю k_1 или k_2 . В частности, при $a_1 = a_2 = a(U_0^{(2)})$ – круг модули $k_{1,2} = 0$ и имеет место рассмотренный случай ограниченного по величине момента сил, см. (3.9), (3.10). Качественные особенности управляемого движения при $a_1 = 0$ (эллипс вырождается в отрезок $(-a_2, a_2)$ вдоль оси y) повторяют изученные выше для прямоугольной области $U_0^{(1)}$. Для $E \ll 1$ и $E \gg 1$ справедливы приведенные ранее асимптотики (квадра-

тичная зависимость от τ); при $E \approx 2$ справедливы асимптотика (3.10) и комментарии к ней.

Исследуем весьма кратко задачу управления в случае “области” $U_0^{(3)}$ – отрезка длины $2a$, наклоненного под углом δ к оси x . Это управление можно рассматривать как результат проектирования компонент $w_{x,y}$ вектора $\mathbf{w}_* \in U_0^{(1)}$ на эту прямую, см. (3.4). После усреднения согласно соотношениям (3.6), (3.7) получаются выражения для $W_{v,r}(E)$ вида (3.11) при $a_1 = a|\cos \delta|$, $a_2 = a|\sin \delta|$. Учитывая эти представления для $a_{1,2}$, можно дать полное аналитическое и численное исследование и построить универсальное семейство решений $E(\tau', E^*, \delta)$. Такое полное решение и анализ зависимости от величин δ, E^0, E^f всех параметров движения приведены ранее [1, 2]. Весьма интересной представляется качественная взаимосвязь решений в случае различных областей $U_0^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) (2.5) допустимых значений управления \mathbf{w} .

Отметим, что возможный дрейф объекта m относительно тела M может быть устранен либо в процессе управления колебаниями или вращениями либо по его окончании посредством плавных (нерезонансных) воздействий [1, 2]. Может представить интерес исследование более общего класса задач совместного управления движениями тела M и объекта m , что, однако, представляет значительные вычислительные трудности.

4. Управление движениями посредством регулируемой скорости. Рассмотрим теперь менее изученную задачу (2.4)–(2.8) при $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, т.е. $\mathbf{v}_0 \in U_0^{(i)}$ или $\mathbf{v}_\varphi \in U_\varphi^{(i)}$, ($i = 1, 2, 3$). Приближенное с относительной погрешностью $O(\epsilon)$ решение строится с помощью асимптотических методов оптимального управления [1, 2], аналогично построениям в разд. 3. Квазиоптимальное управление является локально оптимальным и определяется соотношением

$$\mathbf{v}^* = -\sigma \underset{\mathbf{v}}{\text{argmax}}(\mathbf{f}_v, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in U = U_{0,\varphi}^{(i)}, \quad \sigma = \text{sign}(E - E^f) \tag{4.1}$$

Вектор-функция \mathbf{f}_v определена в (2.7). Искомые функции $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_\varphi$ могут быть найдены в форме синтеза и требуют высокоточных непрерывных измерений фазовых координат $\varphi, \dot{\varphi}$.

Для прямоугольной области $U_{0,\varphi}^{(1)}$ (2.5) согласно соотношению (4.1) получаются выражения $\mathbf{v}_{0,\varphi}$ и правых частей уравнения (2.4) (индекс v опускается для краткости)

$$\begin{aligned} v_{x,y} &= -a_{1,2} \sigma \text{sign} f_{x,y}, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})^0 = -\sigma(a_1|f_x| + a_2|f_y|) \\ f_x &= -(\chi^2 + \cos \varphi) \sin \varphi, \quad f_y = \chi^2 \cos \varphi - \sin^2 \varphi \\ v_{n,l} &= -a_{1,2} \sigma \text{sign} f_{n,l}, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})^\varphi = -\sigma(a_1|\sin \varphi| + a_2\chi^2) \\ f_n &= -\sin \varphi, \quad f_l = \chi^2, \quad \sigma = \text{sign}(E - E^f) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Выражения (4.2) существенно сложнее, чем (3.2), что весьма затрудняет дальнейшее численно-аналитическое исследование, в частности проведение усреднения аналогично (3.5)–(3.7). Анализ несколько упрощается в случае малых колебаний ($|\varphi| \ll 1$) или быстрых вращений ($|\chi| \gg 1$).

Для эллиптической области $U_{0,\varphi}^{(2)}$ (2.5) определение управлений и правых частей уравнения (2.4) приводит к однотипным формулам

$$\begin{aligned}
 v_{x,y} &= -a_{1,2} \sigma n_{x,y}, & n_{x,y} &= h_{x,y}/h^0, & h_{x,y} &= a_{1,2} f_{x,y} \\
 h^0 &= (h_x^2 + h_y^2)^{1/2}, & (\mathbf{f}, \mathbf{v})^0 &= -\sigma h^0(\varphi, \chi) \\
 v_{n,l} &= -a_{1,2} \sigma n_{n,l}, & n_{n,l} &= h_{n,l}/h^\Phi, & h_{n,l} &= a_{1,2} f_{n,l} \\
 h^\Phi &= (h_n^2 + h_l^2)^{1/2}, & (\mathbf{f}, \mathbf{v})^\Phi &= -\sigma h^\Phi(\varphi, \chi)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Функции $\mathbf{f}^0, \mathbf{f}^\Phi$ имеют вид (4.2). Полученные выражения (4.2) весьма громоздки и не допускают явного усреднения в классе табулируемых функций. Как и выше, они существенно упрощаются при анализе квазилинейных колебаний или быстрых вращений.

Для одномерной области $U_{0,\varphi}^{(3)}$ (2.5) синтез приближенно оптимальных управлений (4.1) и правые части уравнения (2.4) имеют вид

$$\begin{aligned}
 v_{x,n} &= -\sigma u^{0,\varphi} \cos \delta, & v_{y,l} &= -\sigma u^{-0,\varphi} \sin \delta \\
 u^{0,\varphi} &= a \operatorname{sign} f_*^{0,\varphi}, & f_*^{0,\varphi} &= f_{x,n} \cos \delta + f_{y,l} \sin \delta, & (\mathbf{f}, \mathbf{v})^{0,\varphi} &= -a \sigma |\mathbf{f}_*^{0,\varphi}|
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

В общем случае аналитическая процедура усреднения невозможна в известных табулируемых функциях. При $E \sim 1$ усреднение может быть осуществлено с учетом зависимости $\chi^2 = 2(E - 1 + \cos \varphi)$ и дифференциальной связи $d\theta = d\varphi/\chi$ аналогично схеме (3.5)

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\psi \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbf{f}, \mathbf{v}) d\psi = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) d\theta = \frac{1}{T} \oint (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \frac{d\varphi}{\chi} \equiv V(E) \tag{4.5}$$

Анализ функции $V(E)$ (4.5) свидетельствует, что качественные особенности управляемого движения при $E \sim 1$ аналогичны установленным выше в разд. 3 при “управлении по ускорению”. Система оказывается управляемой для всех $E \geq 0$, если $a_1 > 0$, $|\delta| < \pi/2$; при $a_1 = 0$ или $|\delta| = \pi/2$ для $E^0 = 0$ или $E^f = 0$ управляемость на интервале $\tau \sim 1$ ($\theta \sim \varepsilon^{-1}$) не имеет места. Переход фазовой траектории φ, χ через сепаратрису $E = 2$ осуществляется согласно асимптотике типа (3.10).

В общей ситуации могут быть построены универсальные однопараметрические семейства посредством введения аргумента $\tau' = a_0 \tau$ для (4.2), (4.3) или $\tau' = a\tau$ для (4.4) с угловым параметром α или δ соответственно, см. разд. 3. Случай малых (квазилинейных) колебаний тела M допускает значительные модификацию и обобщение постановки задачи с учетом относительного положения (x, y) объекта m . Ее исследование может быть осуществлено асимптотическими и численными методами аналогично изученной ранее задаче об управлении колебаниями маятника с регулируемой по скорости перемещениями точкой подвеса [1, 2].

Рассмотрим другой предельный случай управляемых движений, когда $|\chi| \gg 1$ (“быстрые вращения”), т.е. $E \sim \chi^2 \gg 1$. Тогда выражения (4.2)–(4.4) для управления \mathbf{v} могут быть существенно упрощены с помощью метода возмущений. В качестве малого параметра λ может быть взята величина $\lambda = 1/E^f \ll 1$ после нормировки переменной E в уравнении (2.4). С относительной погрешностью $O(\lambda)$ для управлений и правых частей получаются представления, которые имеют ясный механический смысл и могут быть просто использованы при реальном управлении вращающимися качелями в режиме сравнительно быстрых вращений.

Для области прямоугольной формы $U^{(1)}$ вместо (4.2) получаются выражения первого приближения по λ для управлений и правых частей, а также для средних (4.5), вида

$$\begin{aligned} v_x &= a_1 \sigma \operatorname{sign} \sin \varphi, \quad v_y = -a_2 \sigma \operatorname{sign} \cos \varphi, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})^0 = -2\sigma E(a_1 |\sin \varphi| + a_2 |\cos \varphi|) \\ v_n &\equiv 0, \quad v_l = -a_2 \sigma, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})^\varphi = -2a_2 \sigma E, \quad \mathbf{v}_{0, \varphi} \in U_{0, \varphi}^{(1)} \\ V_0(E) &= -(4/\pi)(a_1 + a_2)\sigma E, \quad V_\varphi(E) = -2a_2 \sigma E \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из соотношений (4.6) следует, что для области $U_0^{(1)}$ управляющие воздействия v_x, v_y одинаково эффективны; для области $U_\varphi^{(1)}$ управление v_l существенно эффективнее, чем v_n (в противоположность случаю малых колебаний).

К сходным выражениям вместо (4.3) приводят ограничения в форме эллиптической области $U^{(2)}$ (см. (3.12))

$$\begin{aligned} v_x &= a_1 \sigma h_x/h, \quad v_y = -a_2 \sigma h_y/h \\ h_x &= a_1 \sin \varphi, \quad h_y = a_2 \cos \varphi, \quad h = |\mathbf{h}|, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})^0 = -2\sigma E h \\ v_n &\equiv 0, \quad v_l = -a_2 \sigma, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})^\varphi = -2a_2 \sigma E, \quad \mathbf{v}_{0, \varphi} \in U_{0, \varphi}^{(2)} \\ V_0(E) &= -(4/\pi)a_{1,2} E_*(k_{1,2}) \sigma E \quad (a_1 \leq a_2), \quad V_\varphi(E) = -2a_2 \sigma E \end{aligned} \quad (4.7)$$

Сравнение выражений (4.6) и (4.7) для V_φ свидетельствует о их совпадении в первом приближении по λ ; коэффициент в V_0 (4.6) больше, чем в V_0 (4.7), поскольку область $U^{(1)}$ "шире" $U^{(2)}$ при одинаковых a_1, a_2 . Аналогично (4.6) управляющие воздействия v_x, v_y (4.7) обладают одинаковой эффективностью; управление v_l существенно (на порядок по λ) эффективнее, чем v_n . Для одномерной области $U^{(3)}$ из соотношений (4.4), (4.5) следуют искомые выражения

$$\begin{aligned} v_x &= a \sigma \operatorname{sign}(\cos \delta \sin \varphi), \quad v_y = -a \sigma \operatorname{sign}(\sin \delta \cos \varphi) \\ (\mathbf{f}, \mathbf{v})^0 &= -2a \sigma E(|\cos \delta \sin \varphi| + |\sin \delta \cos \varphi|), \quad \mathbf{v} \in U_{0, \varphi}^{(3)} \\ v_n &\equiv 0, \quad v_l = -a \sigma \operatorname{sign}(\sin \delta), \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})^\varphi = -2a \sigma E |\sin \delta| \\ V_0(E) &= -(4/\pi)a(|\cos \delta| + |\sin \delta|)\sigma E, \quad V_\varphi(E) = -2a |\sin \delta| \sigma E \end{aligned} \quad (4.8)$$

Анализ функций V_0, V_φ (4.8) и их сопоставление с другими $V_{0, \varphi}$ (4.6), (4.7) проводится аналогично, как и выше.

Усредненные уравнения элементарно интегрируются

$$E = E^0 \exp(-c \sigma^0 \tau), \quad \tau^f = c^{-1} |\ln(E^0/E^f)|, \quad \sigma^0 = \operatorname{sign}(E^0 - E^f) \quad (4.9)$$

Коэффициент c в выражениях (4.9) принимает различные значения в соответствии с выражениями (4.6)–(4.8). Качественной особенностью управляемых движений системы в режиме быстрых вращений посредством регулируемого изменения относительной скорости \mathbf{v} является экспоненциальное во времени изменение энергии E . Ранее этот факт не отмечался, хотя были получены соответствующие уравнения управляемого движения маятника с регулируемой длиной подвеса [4], из которых следует этот качественный вывод. Отметим, что в случае колебаний удастся добиться параболического во времени изменения энергии; при переходе через сепаратрису это изменение близко к линейному во времени. Кроме того, из соотношений (4.6)–

(4.8) следует, что среднее $\langle \mathbf{v}_0 \rangle_\psi = 0$, т.е. относительный дрейф объекта m относительно тела M невелик при управлении $\mathbf{v}_0 \in U_0^{(i)}$. Управление $\mathbf{v}_\varphi \in U_\varphi^{(i)}$ приводит к значительному относительному перемещению, что может быть неприемлемым при решении прикладных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00157).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
3. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Оптимальное управление раскачиванием и торможением качелей // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 92–101.
4. Акуленко Л.Д. Параметрическое управление колебаниями и вращениями физического маятника (качели) // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 82–91.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
7. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
8. Нейштадт А.И. Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 621–632.
9. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.

Москва
e-mail: kumak@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
21.V.2003