УДК 531.36 : 534.1; 62-50

© 2004 г. А. С. Ковалева

УПРАВЛЕНИЕ ЧАСТОТАМИ И ФАЗАМИ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Строится ограниченное по норме локально оптимальное управление, минимизирующее уклонение частот и фаз нелинейной системы от резонансных значений при действии ограниченных возмущений. Показано, что управление не зависит от вида возмущения и структуры консервативной части системы. Как пример, построены частотное и фазовое управления вынужденными колебаниями системы двух слабо связанных осцилляторов.

Известно [1, 2], что исследование возмущенного движения в окрестности резонанса сводится к исследованию движения "эквивалентного маятника". Фаза движения маятника соответствует сдвигу фаз, а его частота – уклонению частот системы от резонансной поверхности. На фазовой плоскости выделяются области колебаний и вращения маятника, и определяется сепаратриса резонанса, разделяющая эти области. Переход через сепаратрису из области ограниченных колебаний в область вращения соответствует неограниченному возрастанию частотной расстройки и срыву резонанса. Цель управления – противодействовать выходу системы из допустимой области под действием возмущений.

Эта модель позволяет воспользоваться хорошо развитыми асимптотическими методами управления колебательными системами [3, 4]. Формально процедура усреднения применима к достаточно широкому классу систем, но на практике задача оптимального управления траекторией нелинейной системы до выхода из резонансной области на относительно большом интервале времени представляет значительные трудности и разрешима только для системы с одной степенью свободы [5, 6]. Задача упрощается, если рассматривать движение в ограниченной области на относительно коротком интервале времени. В такой постановке рассматривалась задача о выходе из области под действием случайных возмущений [7]. В работе задача о выходе из области заменяется задачей локально оптимального управления [8], минимизирующего в каждый момент времени меру уклонения частот и фаз от резонансных значений. Применение локально оптимального управления позволяет отказаться от детального описания свойств возмущения.

1. Основные уравнения и постановка задачи. Рассмотрим двухчастотную систему со скалярной медленной переменной. Обобщение на многомерный случай обсуждается в разд. 2.

Уравнения движения приведены к стандартной форме системы с быстрыми и медленными переменными

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon f(x, \theta_1, \theta_2) + \varepsilon^n F(x, \theta_1, \theta_2)u + \varepsilon\Delta(x, \theta_1, \theta_2, \xi(t)), \quad x \in X, \ u \in U \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i(x) + \varepsilon f_i(x, \theta_1, \theta_2) + \varepsilon^n G_i(x, \theta_1, \theta_2)u + \varepsilon\Delta_i(x, \theta_1, \theta_2, \xi(t)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\theta_i(\mathrm{mod}\,2\pi)$, $i = 1, 2$, X – открытая область, U – замкнутая область в R_1, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Показатель степени n в коэффициенте ε^n будет выбран таким образом, чтобы управление оставалось слабым, но противодействующим внешним возмущениям в соответствии с требованиями задачи.

Предполагается, что правые части системы (1.1) 2π – периодичны по быстрым фазам θ_1, θ_2 и удовлетворяют требованиям гладкости по всем переменным, обеспечивающим существование решения и справедливость необходимых преобразований при всех допустимых управлениях. Возмущение $\xi(t)$ ограничено, т.е. $|\xi(t)| \le \xi_0$ при всех $t \ge t_0$. Если $\xi(t)$ – случайный процесс, то условие ограниченности выполняется с вероятностью 1.

Определим резонансные соотношения между частотами системы [1, 2]. Рассмотрим среднее по времени функции $f(x, \theta_1(t), \theta_2(t))$

$$\Phi(x, \omega_1, \omega_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x, \omega_1 t + \alpha_1, \omega_2 t + \alpha_2)dt$$

Предположим, что функция Φ не зависит от сдвига фаз α_1, α_2 и имеет линию разрыва

$$\rho(x) = m_1\omega_1(x) + m_2\omega_2(x) = 0 \tag{1.2}$$

при некоторых целочисленных m_1, m_2, не равных одновременно нулю. Уравнение (1.2) определяет резонансное соотношение между частотами системы. Предположим также, что существует единственное изолированное решение x^* уравнения (1.2), такое, что

$$\rho(x^*) = 0, \quad d\rho(x^*)/dx = r \ne 0 \tag{1.3}$$

Будем считать, что средние по времени функций $\Delta(x, \theta_1(t), \theta_2(t), \xi(t))$ и $G_i(x, \theta_1(t), \theta_2(t))$ не порождают новых резонансных соотношений в малой окрестности точки x^*, т.е. не имеют линий разрыва при каких-либо соотношениях между частотами $\omega_1(x^*)$ и $\omega_2(x^*)$.

Пусть в невозмущенной системе существует устойчивый резонансный режим с частотами $\omega_1(x^*)$ и $\omega_2(x^*)$, удовлетворяющими уравнению (1.2). Цель управления состоит в удержании частот системы в окрестности резонанса при действии возмущений, вызывающих уклонение переменной x от значения x^* и приводящих к нарушению резонансного соотношения (1.2). Сформулируем это требование как задачу управления. Выделим допустимую область движения и построим управление, минимизирующее уклонения частот от резонанса.

Следуя стандартной процедуре [1, 2], введем новые переменные υ и φ, характеризующие частотную и фазовую расстройки, соответственно. Запишем

$$\mu\upsilon = \rho(x) = m_1\omega_1(x) + m_2\omega_2(x), \quad \mu = \varepsilon^{1/2}, \quad \varphi = m_1\theta_1 + m_2\theta_2 \tag{1.4}$$

Из условий (1.3), (1.4) следует, что в окрестности резонанса справедливы соотношения

$$x = X(\mu\upsilon) = x^* + \mu x_1 + \mu^2, \quad x_1 = r^{-1}\upsilon; \quad \theta_1 = \theta, \quad \theta_2 = m_2^{-1}(\varphi - m_1\theta) \tag{1.5}$$

Подставляя равенства (1.4), (1.5) в систему (1.1), получим уравнения в стандартной форме с малым параметром μ

$$\begin{aligned}
\dot\upsilon &= \mu[f^*(\varphi, \theta) + \Delta^*(\varphi, \theta, \xi(t))] + \mu^{2n-1}F^*(\varphi, \theta)u + \mu^2 R_1(\upsilon, \varphi, \theta, u, \xi(t), \mu)\\
\dot\varphi &= \mu\upsilon + \mu^{2n}G^*(\varphi, \theta)u + \mu^2 R_2(\upsilon, \varphi, \theta, u, \xi(t), \mu)\\
\dot\theta &= \omega^* + \mu\Omega\upsilon + \mu^{2n}G_1^*(\varphi, \theta)u + \mu^2 R_3(\upsilon, \varphi, \theta, u, \xi(t), \mu)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\theta = \theta_1$, $\omega^* = \omega_1(x^*)$, $\Omega = \omega_{1x}(x^*)$. Коэффициенты системы (1.6) определены соотношениями

$$Z^*(\varphi, \theta) = r^{-1}Z(x^*, \theta, \theta_2(\varphi, \theta))$$
$$G^*(\varphi, \theta) = m_1G_1(x^*, \theta, \theta_2(\varphi, \theta)) + m_2G_2(x^*, \theta, \theta_2(\varphi, \theta)) \tag{1.7}$$

где обозначено $Z = (f, \Delta, F, G_1)$ и $Z^* = (f^*, \Delta^*, F^*, G_1^*)$. Остаточные члены R_i в правой части уравнений (1.6) исчезают при переходе к пределу при $\mu \to 0$, и их явный вид несуществен.

Определим допустимую область движения. Выделим в системе (1.6) порождающую консервативную подсистему

$$\dot{\upsilon} = \mu\beta(\varphi), \quad \dot{\varphi} = \mu\upsilon \tag{1.8}$$

где $\beta(\varphi) = \langle f^*(\varphi, \theta)\rangle$, символ $\langle f\rangle$ означает усреднение по периоду быстрой переменной θ. Уравнения (1.8) описывают движение консервативной системы с гамильтонианом

$$H^{\mu}(\varphi, \upsilon) = \mu H(\varphi, \upsilon), \quad H(\varphi, \upsilon) = U(\varphi) + \upsilon^2/2 \tag{1.9}$$

где $U(\varphi)$ – периодический потенциал, $U_\varphi(\varphi) = -\beta(\varphi)$. Уравнение $\beta(\varphi) = 0$ определяет точку φ^*, соответствующую минимуму потенциала, и седловую точку φ^s, соответствующую его максимуму. В точке минимума

$$U(\varphi^*) = 0, \quad U_{\varphi\varphi}(\varphi^*) = -\beta_\varphi(\varphi^*) = -k^2 < 0$$

В точке максимума

$$U(\varphi^s) = H^s, \quad U_{\varphi\varphi}(\varphi^s) = -\beta_\varphi(\varphi^s) > 0$$

На фазовой плоскости колебаниям маятника соответствует замкнутая область Σ, ограниченная сепаратрисой. Точки $\varphi = \varphi^s$, $\upsilon = 0$ соответствуют узлам сепаратрисы, стационарная точка $\varphi = \varphi^*$, $\upsilon = 0$ определяет параметры устойчивого резонансного режима в невозмущенной системе. Переход через сепаратрису из области колебаний в область вращения маятника понимается как неограниченное возрастание частотной расстройки и соответствует срыву резонанса. Допустимая область движения определена условиями $(\upsilon, \varphi) \in \Sigma$.

Таким образом, управление частотой колебаний в окрестности резонанса сводится к задаче управления возмущенными движениями маятника внутри допустимой области Σ. При такой интерпретации задачи управления полная энергия (1.9) может рассматриваться как мера уклонения от стационарной точки на траекториях системы (1.10).

Пусть $(\upsilon(t_0), \varphi(t_0)) \in \Sigma$ в начальный момент времени t_0. Построим локально оптимальное управление, минимизирующее в каждый момент времени величину производной

$$J(u) = \dot{H} \tag{1.10}$$

при условии $|u| \le U_0$. Локально оптимальное управление определяется соотношением [8]

$$u_{\text{opt}} = \underset{|u| \le U_0}{\operatorname{argmin}} J(u) \tag{1.11}$$

Из определений (1.10), (1.11) следует, что управление (1.11) стремится в каждый момент “максимально уменьшить” энергию эквивалентного маятника, что соответствует минимизации уклонений от невозмущенного состояния $\varphi = \varphi^*$, $\upsilon = 0$.

Вычисляя производную (1.10) на траекториях системы (1.6), получим

$$\dot{H} = -\beta(\varphi)\dot{\varphi} + \upsilon\dot{\upsilon} = -\beta(\varphi)[\mu\upsilon + \mu^{2n}G^*(\varphi, \theta)u + \mu^2 R_2] +$$
$$+ \upsilon\{\mu[f^*(\varphi, \theta) + \Delta^*(\varphi, \theta, \xi(t))] + \mu^{2n-1}F^*(\varphi, \theta)u + \mu^2 R_1\} = \tag{1.12}$$
$$= \mu\upsilon[b(\varphi, \theta) + \Delta^*(\varphi, \theta, \xi(t)) + \mu^{2n-2}F^*(\varphi, \theta)u] - \mu^{2n}\beta(\varphi)G^*(\varphi, \theta)u + \mu^2 R$$

где

$$b(\varphi, \theta) = f^*(\varphi, \theta) - \beta(\varphi), \quad \langle b(\varphi, \theta)\rangle = 0$$

Коэффициент R включает остаточные члены, не влияющие на дальнейшие преобразования.

Введение малого параметра μ позволяет построить квазиоптимальное управление u^*, сходящееся (в том или ином смысле) к оптимальному при $\mu \to 0$, но имеющее более простую структуру. Построим квазиоптимальное управление для двух типов управляемых систем.

1°. $F(x, \theta_1, \theta_2) \neq 0$. В этом случае положим $n = 1$. Тогда при $\mu \to 0$ слагаемое, зависящее от управления, в первом из уравнений (1.6) удерживается в главном приближении, в прочих уравнениях остается малой величиной. Учитывая сравнительную величину слагаемых, входящих в правую часть уравнений (1.12), получим при $\mu \to 0$

$$u^* = -U_0 \operatorname{sign} F^*(\varphi, \theta) \operatorname{sign} \upsilon \tag{1.13}$$

Управление (1.13) создает момент, противодействующий уклонению частот от номинального значения. Из формул (1.7), (1.13) следует закон управления в виде обратной связи

$$u^0(x, y, \theta_1, \theta_2) = -U_0 \operatorname{sign}[r^{-1}F(y, \theta_1, \theta_2)] \operatorname{sign} \upsilon \tag{1.14}$$

Подставляя управления (1.13) или (1.14) в систему (1.1) и повторяя все проведенные преобразования, получим, что уравнения (1.6) и соответственно значения функционалов (1.10) при $u = u^*$ и $u = u^0$ совпадают. Отметим, что управления (1.13), (1.14) не зависят от структуры неуправляемой системы и возмущения. Единственный параметр системы, требующий определения – знак коэффициента r. Квазиоптимальность управлений (1.13) и (1.14) доказывается с помощью стандартных рассуждений.

Оценим предельные возможности управления. Внося управления (1.13) или (1.14) в систему (1.6) и усредняя все слагаемые, за исключением помехи, получим частично усредненную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{\upsilon}_0 &= \mu[\beta(\varphi_0) + \Delta^*(\varphi_0, \theta, \xi(t)) - U_0 f_0(\varphi_0)\operatorname{sign}\upsilon_0] \\ \dot{\varphi}_0 &= \mu\upsilon_0, \quad \dot{\theta} = \omega^* + \mu\Omega\upsilon_0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

где $f_0(\varphi) = \langle|F^*(\varphi, \theta)|\rangle$, т.е. $f_0(\varphi) \geq 0$. Запишем изменение полной энергии системы (1.15) в виде

$$\dot{E} = \mu[-\beta(\varphi_0)\dot{\varphi}_0 + \upsilon_0\dot{\upsilon}_0] = \mu[-U_0 f_0(\varphi_0)|\upsilon_0| + \Delta^*(\varphi_0, \theta, \xi(t))\upsilon_0] \tag{1.16}$$

Очевидно, что уклонения системы от номинального состояния уклонения могут увеличиваться под действием возмущений, но управление уменьшает уклонения по сравнению с неуправляемой системой. В общем случае оценка предельных возможностей затруднена. Если $|\Delta^*(\varphi_0, \theta, \xi(t))| \leq \Delta_0$ и при всех допустимых значениях φ_0, θ,

$\xi(t)$ справедливо неравенство $U_0 f_0(\varphi_0) > \Delta_0$, то $\dot{E} < 0$ в каждый момент времени. В этом случае уклонения от номинального состояния уменьшаются, и $\varphi \to \varphi^*$, $\upsilon \to 0$ при $t \to \infty$.

Оценка предельных возможностей уточняется, если известны свойства возмущения. Пусть $\xi(t)$ – периодический или почти периодический процесс, такой, что равномерно по φ существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Delta^*(\varphi, \omega^* t, \xi(t))dt = 0 \tag{1.17}$$

Тогда, заменяя частично усредненную систему усредненной и вычисляя полную энергию на траекториях усредненной системы, получим

$$\dot{E} = -\mu U_0 f_0(\varphi_0)|\upsilon_0| < 0 \tag{1.18}$$

Очевидно, что при любом $U_0 > 0$ уклонения от номинального состояния уменьшаются и $\varphi \to \varphi^*$, $\upsilon \to 0$ при $t \to \infty$.

Физическая интерпретация полученного решения вытекает из уравнений (1.15): для "эквивалентного маятника" управление u^* или u_0 эквивалентно сухому трению с максимально возможным коэффициентом.

При сделанных предположениях управление непосредственно влияет на величину частотной расстройки υ, фазовая расстройка φ изменяется в силу уравнений (1.6) или (1.8). Определим величину

$$H^{\upsilon} = \upsilon^2/2 \tag{1.19}$$

как меру уклонения частоты от номинального значения. Построим управление u^{υ}, удовлетворяющее ограничению $|u^{\upsilon}| \le U_0$ и минимизирующее в каждый момент времени величину производной $\dot{H}^{\upsilon}$, т.е.

$$J^{\upsilon}(u) = \dot{H}^{\upsilon}, \quad u^{\upsilon} = \underset{|u| \le U_0}{\operatorname{argmin}} J^{\upsilon}(u) \tag{1.20}$$

Повторяя приведенные рассуждения, получим, что

$$u^{\upsilon} = u^* = -U_0 \operatorname{sign} F^*(\varphi, \theta) \operatorname{sign} \upsilon \tag{1.21}$$

Управление (1.21) и соответственно управления (1.13), (1.14) можно назвать управлением по частоте.

2°. $F(x, \theta_1, \theta_2) = 0$. В этом случае положим $n = 1/2$. В первом из уравнений (1.6) управление отсутствует, в уравнениях для фаз остается слабым. Содержательный пример рассмотрен в разд. 2.

Из условий (1.11), (1.12) получим при $\mu \to 0$

$$u^* = U_0 \operatorname{sign} G^*(\varphi, \theta) \operatorname{sign} \beta(\varphi) \tag{1.22}$$

В допустимой области Σ переменная φ изменяется между значениями φ^* и φ^s, соответствующими минимуму и максимуму потенциала $U(\varphi)$. Отсюда, в частности, следует, что во всей рассматриваемой области

$$\operatorname{sign} U_{\varphi}(\varphi) = \operatorname{sign}(\varphi - \varphi^*) \tag{1.23}$$

Учитывая, что $U_\varphi(\varphi) = -\beta(\varphi)$, и принимая во внимание соотношения (1.7), (1.22), (1.23), получим законы управления в виде

$$u^* = -U_0 \operatorname{sign} G^*(\varphi, \theta) \operatorname{sign}(\varphi - \varphi^*)$$

$$u^0(x, \theta_1, \theta_2) = -U_0 \operatorname{sign}[m_1 G_1(x, \theta_1, \theta_2) + \tag{1.24}$$

$$+ m_2 G_2(x, \theta_1, \theta_2)] \operatorname{sign}(\varphi - \varphi^*), \quad \varphi = m_1\theta_1 + m_2\theta_2$$

Подставляя управления (1.24) в систему (1.6) и усредняя все слагаемые за исключением возмущения, получим частично усредненную систему

$$\dot{\upsilon}_0 = \mu[\beta(\varphi_0) + \Delta^*(\varphi_0, \theta, \xi(t))]$$

$$\dot{\varphi}_0 = \mu[\upsilon_0 - U_0 g_0(\varphi_0) \operatorname{sign}(\varphi_0 - \varphi^*)] \tag{1.25}$$

$$\dot{\theta} = \omega^* + \mu\Omega\upsilon_0$$

где $g_0(\varphi) = \langle|G^*(\varphi, \theta)|\rangle$, т.е. $g_0(\varphi) \geq 0$. В общем случае оценка предельных возможностей управления затруднена. Если выполняется условие (1.17), то в результате усреднения получим укороченную систему

$$\dot{\upsilon}_0 = \mu\beta(\varphi_0), \quad \dot{\varphi}_0 = \mu[\upsilon_0 - U_0 g_0(\varphi_0) \operatorname{sign}(\varphi_0 - \varphi^*)] \tag{1.26}$$

Учитывая, что $\beta(\varphi) = -U_\varphi(\varphi)$ и принимая во внимание соотношения (1.23), запишем изменение полной энергии системы (1.26) в виде

$$\dot{E} = \mu[-\beta(\varphi_0)\dot{\varphi}_0 + \upsilon_0\dot{\upsilon}_0] = -\mu U_0 g_0(\varphi_0)|\beta(\varphi_0)| < 0 \tag{1.27}$$

Из неравенства (1.27) следует, что при выполнении условия (1.17) $\varphi \to \varphi^*$, $\upsilon \to 0$ при $t \to \infty$.

При сделанных предположениях управление непосредственно влияет на величину фазовой расстройки φ, частотная расстройка υ изменяется в силу уравнений (1.25). Определим величину

$$H^\varphi = (\varphi - \varphi^*)^2/2 \tag{1.28}$$

как меру уклонения фазы от номинального значения. Построим управление u^φ, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq U_0$ и минимизирующее в каждый момент времени величину производной $\dot{H}^\varphi$. Положив $n = 1/2$ и дифференцируя функцию (1.28) на траекториях системы (1.6), получим при $\mu \to 0$

$$\dot{H}^\varphi = \mu\dot{\varphi}(\varphi - \varphi^*) = \mu[\upsilon + G^*(\varphi, \theta)u](\varphi - \varphi^*) \tag{1.29}$$

Слагаемые высших порядков малости по μ не рассматриваются. Минимизируя правую часть уравнения (1.29) по u при условии $|u| \leq U_0$, получим управление

$$u^\varphi = u^* = -U_0 \operatorname{sign} G^*(\varphi, \theta) \operatorname{sign}(\varphi - \varphi^*) \tag{1.30}$$

Управление (1.30) и, соответственно, управления (1.24) можно назвать управлениями по фазе.

Из равенств (1.21), (1.30) следует, что в зависимости от типа системы и управления общий критерий (1.10) можно заменять критериями (1.19) или (1.28).

2. Управление частотой вынужденного движения связанных колебательных систем. Предположим, что слабое периодическое возбуждение усиливается с помощью резонансного контура и передается на вход нелинейной системы с помощью слабых связей. Цель управления – поддержать частоту колебаний нелинейной системы при наличии помех, возникающих как непосредственно в системе, так и в резонансном контуре или цепи управления. Исследуем возможности различных схем управления по частоте и по фазе.

Управление, воздействующее непосредственно на нелинейную систему. Уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi} + \varepsilon b\dot{\psi} + \Omega^2\psi + \varepsilon g_1(\psi, \xi_1(t)) = \varepsilon a \sin\Omega t + \varepsilon s(x, \dot{x}) \\ &\ddot{x} + \varepsilon n\dot{x} + \phi(x) + \varepsilon g_2(x, \xi_2(t)) = \varepsilon q(\psi, \dot{\psi}) + \varepsilon u \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $\phi(x) = d\Pi(x)/dx$, $\Pi(x)$ – потенциал консервативной части системы, $\xi_{1,2}(t)$ – возмущения, удовлетворяющие условиям разд. 1. Функции $q(\psi, \dot{\psi})$ и $s(x, \dot{x})$ отражают взаимное влияние двух подсистем. Управление u строится по критериям разд. 1.

Приведем систему (2.1) к стандартной форме. Обозначим $\dot{x} = z$ и введем новые переменные y, θ_2 по формулам [1]

$$y = \frac{1}{2}z^2 + \Pi(x), \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial x} = \frac{\omega(y)}{z(y,x)}, \quad z(y,x) = \pm\sqrt{2(y - \Pi(x))}, \quad \omega(y) = \frac{2\pi}{T(y)} \tag{2.2}$$

где

$$T(y) = \oint\limits_{y = \mathrm{const}} \frac{dx}{z(y,x)}$$

Соотношения (2.2) определяют формальные зависимости $x = X(y, \theta_2)$ и $\dot{x} = z(y, x) = Z(y, \theta_2)$. Для переменных ψ, $\dot{\psi}$ введем стандартную замену

$$\psi = R\cos\theta_1, \quad \dot{\psi} = -\Omega R\sin\theta_1 \tag{2.3}$$

Подставляя новые переменные (2.2), (2.3) в уравнения (2.1) и используя обозначения разд. 1, приведем систему (2.1) к виду

$$\begin{aligned} &\dot{R} = -\frac{\varepsilon}{\Omega}[\Psi(R, \theta_1, \theta_3) + S(y, \theta_2) + \Delta_1(R, \theta_1, \xi_1(t))]\sin\theta_1 \\ &\dot{y} = \varepsilon\{f(y, \theta_2) + [Q(R, \theta_1) + u]Z(y, \theta_2) + \Delta_2(y, \theta_2, \xi_2(t))\} \\ &\dot{\theta}_1 = \Omega - \frac{\varepsilon}{\Omega R}[\Psi(R, \theta_1, \theta_3) + S(y, \theta_2) + \Delta_1(R, \theta_1, \xi(t))]\cos\theta_1 \\ &\dot{\theta}_2 = \omega(y) + \varepsilon\frac{\partial\omega}{\partial y}\{f(y, \theta_2) + [Q(R, \theta_1) + u]Z(y, \theta_2) + \Delta_2(y, \theta_2, \xi_2(t))\} \\ &\dot{\theta}_3 = \Omega \end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned} &\Psi(R, \theta_1, \theta_3) = b\Omega R\sin\theta_1 + a\sin\theta_3, \quad f(y, \theta_2) = -nZ^2(y, \theta_2) \\ &S(y, \theta_2) = s(X(y, \theta_2), Z(y, \theta_2)), \quad Q(R, \theta_1) = q(R\cos\theta_1, -\Omega R\sin\theta_1) \\ &\Delta_1(R, \theta_1, \xi_1(t)) = -g_1(R\cos\theta_1, \xi_2(t)) \\ &\Delta_2(y, \theta_2, \xi_2(t)) = -g_2(X(y, \theta_2), \xi_2(t))Z(y, \theta_2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Нелинейные связи порождают бесконечное число резонансных соотношений типа $n\omega(y) = m\Omega$. В дальнейшем считаем, что цель управления – поддержать резонансные колебания по первой гармонике, т.е. условия (1.2), (1.3) примут вид

$$\rho(y^*) = \omega(y^*) - \Omega = 0, \quad d\rho(y^*)/dy = d\omega(y^*)/dy = r \neq 0 \tag{2.6}$$

Для анализа движения в окрестности резонанса используем преобразование (1.4). Введем новые переменные

$$\begin{aligned} &\varphi = \theta_2 - \theta_3, \quad \varphi_1 = \theta_1 - \theta_3, \quad \theta_3 = \theta \\ &\mu\upsilon = \rho(y) = \omega(y) - \Omega, \quad \mu = \varepsilon^{1/2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Подставляя выражения (2.6), (2.7) в систему (2.4) и пренебрегая несущественными слагаемыми высших порядков, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{R} = \mu^2 P_1(R, \varphi, \varphi_1, \theta, \xi_1(t)), \quad \dot{\varphi}_1 = \mu^2 P_2(R, \varphi, \varphi_1, \theta, \xi_1(t)) \\ &\dot{\upsilon} = \mu[f^*(\varphi, \theta) + F^*(\varphi, \theta)u + Y^*(R, \varphi, \theta) + \Delta_2^*(\theta, \xi_2(t))] = \\ &= \mu[F^*(\varphi, \theta)u + V(R, \varphi, \theta, \xi_2(t))] \\ &\dot{\varphi} = \mu\upsilon + \mu^2 rV(R, \varphi, \theta, \xi_2(t)), \quad \dot{\theta} = \Omega \end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$Y^* = r^{-1}Q(R, \theta + \varphi_1)Z(y^*, \theta + \varphi), \quad F^* = r^{-1}Z(y^*, \theta + \varphi)$$

Коэффициенты f^*, F^*, Δ_2^* определяются так же, как и в разд. 1, коэффициенты $P_{1,2}$ получены подстановкой величин $y = y^*$, $\theta_1 = \theta + \varphi_1$, $\theta_2 = \theta + \varphi$ в правые части соответствующих уравнений системы (2.4) и их вид не существен для дальнейших преобразований.

Коэффициент V в третьем уравнении зависит от медленной переменной R, и в системе (2.8) не удается выделить консервативную подсистему типа (1.8). Вместе с тем из уравнений (2.8) следует, что управление u непосредственно влияет на частотную расстройку υ. Поэтому для построения управления воспользуемся критерием минимизации частотной расстройки (1.20). Повторяя все необходимые рассуждения, получим, что частотное управление вида

$$u^\upsilon = -U_0 \operatorname{sign} F^*(\varphi, \theta) \operatorname{sign} \upsilon \tag{2.9}$$

совпадающее с (1.21). Учитывая, что

$$F^*(\varphi, \theta) = r^{-1}Z(y^*, \theta + \varphi), \quad Z(y, \theta + \varphi) = \dot{x}$$

построим управление в виде обратной связи

$$u^\upsilon = -U_0 \operatorname{sign}(r^{-1}\dot{x}) \operatorname{sign}[\omega(y) - \Omega] \tag{2.10}$$

Полученное решение означает, что при сделанных предположениях квазиоптимальное управление противодействует уклонению частоты нелинейной системы от номинального значения и не зависит от возмущения и параметров линейной подсистемы. Единственный параметр, необходимый для построения управления (2.10) – знак постоянного коэффициента $r = \omega_y(y^*)$. Этот параметр часто может быть определен без вычисления частоты $\omega(y)$: $r > 0$, если в малой окрестности точки y^* система “жесткая”, и $r < 0$, если система “мягкая”. Отметим, что управление зависит не только от медленной частотной расстройки υ, но и от быстрой переменной $\dot{x}$.

Управление частотой возбуждения. Предположим, что управление не может воздействовать на систему как дополнительная внешняя сила или связь, но может влиять на частоту возбуждения. Уравнения управляемого движения примут вид

$$\ddot{\psi} + \varepsilon b\dot{\psi} + \Omega^2\psi + \varepsilon g_1(x, \xi_1(t)) = \varepsilon a \sin\theta_3 + \varepsilon s(x, \dot{x})$$
$$\ddot{x} + \varepsilon n\dot{x} + \phi(x) + \varepsilon g_2(x, \xi_2(t)) = \varepsilon q(\psi, \dot{\psi}) \tag{2.11}$$
$$\dot{\theta}_3 = \Omega + \varepsilon^{1/2}u$$

В правых частях уравнений (2.11) использованы обозначения системы (2.1). Замены переменных (2.2), (2.3) приводят уравнения (2.11) к стандартной форме, отличающейся от уравнений (2.4) тем, что последнее уравнение заменяется соответствующим уравнением системы (2.11), а в остальных уравнениях следует положить $u = 0$.

Резонансное соотношение и замена переменных в окрестности резонанса определены выражениями (2.6), (2.7). Уравнения движения в новых переменных примут вид

$$\dot{R} = \mu^2 P_1, \quad \dot{\varphi}_1 = -\mu u + \mu^2 P_2$$
$$\dot{\upsilon} = \mu V, \quad \dot{\varphi} = \mu\upsilon - \mu u + \mu^2 rV, \quad \dot{\theta} = \Omega + \mu u \tag{2.12}$$

Функции $P_{1,2}$ и V определены так же, как в системе (2.8).

Управление u входит в три уравнения системы (2.12). Если задача состоит в поддержании резонансного режима нелинейного звена системы (2.11) независимо от динамики резонансного контура, то строится управление, минимизирующее критерий (1.28). Повторяя все необходимые рассуждения, используя соотношение (1.30) и учитывая, что в системе (2.12) коэффициент $G^* = -1$, получим

$$u^{\varphi} = U_0 \operatorname{sign}(\varphi - \varphi^*) \tag{2.13}$$

Управление (2.13) противодействует уклонению фазы нелинейной системы от номинального значения и не зависит от возмущения и параметров нелинейной системы и резонансного контура.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00011) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 03-51-5547).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
2. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
3. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
4. *Ковалева А.С.* Управление колебательными и виброударными системами. М.: Наука, 1990. 255 с.
5. *Ковалева А.С.* Асимптотическое решение задачи оптимального управления нелинейными колебаниями в окрестности резонанса // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 913–922.
6. *Kovaleva A.S.* Control of resonance oscillations in stochastic systems // Computational Stochastic Mechanics / Ed. G. Deodatis. Rotterdam: Millpress, 2003. P. 335–341.
7. *Ковалева А.С.* Управление частотой движения вблизи резонанса при случайных возмущениях параметров // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 294–305.
8. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.

Москва
e-mail: a.kovaleva@ru.net

Поступила в редакцию
23.X.2003