

УДК 531.36

© 2004 г. Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко, Т. Ю. Петрова

**ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ**

На примере дискретно-континуальной модели нагруженного следящей силой упруговязкого стержня с абсолютно жестким телом на конце проведено динамическое моделирование устойчивости и импульсных переходных функций системы на основе точного решения уравнений движения.

Влияние диссипативных сил и сосредоточенных масс на устойчивость неконсервативных континуальных моделей с конечномерной аппроксимацией по первым собственным формам исследовалось ранее [1–3].

1. Уравнения движения. Пусть упруговязкий прямолинейный однородный стержень длиной l , внутреннее трение в котором учитывается по Фойгту, консольно закреплен в неподвижном основании (фиг. 1) и нагружен следящей силой P . На конце стержня закреплено в центре масс абсолютно жесткое тело с массой M и моментом инерции A . Линеаризованные в окрестности нулевого состояния $Y(Z, T) = \Phi(T) = 0$ уравнения движения рассматриваемой дискретно-континуальной системы (ДКС) под действием малой силы $F(T)$ (T -время) в безразмерных переменных и параметрах имеют вид

$$m \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = n(t) + f(t), \quad a \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = b(t)$$

$$\left(1 + \gamma \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 y(z, t)}{\partial z^4} + p \frac{\partial^2 y(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 y(z, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$z = 0: \quad y(0, t) = \frac{\partial y(0, t)}{\partial z} = 0; \quad z = 1: \quad y(1, t) = y_1(t), \quad \frac{\partial y(1, t)}{\partial z} = \varphi(t) \quad (1.1)$$

$$n(t) = \left(1 + \gamma \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 y(1, t)}{\partial z^3}, \quad b(t) = -\left(1 + \gamma \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 y(1, t)}{\partial z^2}$$

$$t = 0: \quad y_1(0) = \frac{dy_1(0)}{dt} = \varphi(0) = \frac{d\varphi(0)}{dt} = y(z, 0) = \frac{\partial y(z, 0)}{\partial t} = 0$$

Здесь

$$t = T \left(\rho \frac{l^4}{EI}\right)^{-1/2}, \quad y = \frac{Y}{\delta}, \quad y_1 = \frac{Y_1}{\delta}, \quad z = \frac{Z}{l}, \quad \frac{\delta}{l} \ll 1, \quad \varphi = \frac{l}{\delta} \Phi, \quad p = \frac{l^2}{EI} P$$

$$f = \frac{l^3}{EI\delta} F, \quad m = \frac{M}{\rho l}, \quad a = \frac{A}{\rho l^3}, \quad n = \frac{l^3}{EI\delta} N, \quad b = \frac{l^2}{EI\delta} B, \quad \gamma = h \left(\rho \frac{l^4}{EI}\right)^{-1/2}$$

EI – жесткость сечения стержня при изгибе, ρ – погонная плотность стержня, h – коэффициент внутреннего трения по Фойгту, δ – характерный размер поперечного сечения стержня.

2. Динамическая модель линеаризованной ДКС.

Пусть функции $f(t)$, $y_1(t)$, $\varphi(t)$, $n(t)$, $b(t)$, $y(z, t)$ удовлетворяют условиям существования интегрального преобразования Лапласа по времени t . Тогда из соотношений (1.1) следуют уравнения линеаризованной ДКС в изображениях

$$m\lambda^2 y_1(\lambda) = n(\lambda) + f(\lambda), \quad a\lambda^2 \varphi(\lambda) = b(\lambda) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^4 y(z, \lambda)}{\partial z^4} + \beta(\lambda) \frac{\partial^2 y(z, \lambda)}{\partial z^2} - k^2(\lambda) y(z, \lambda) = 0 \quad (2.2)$$

$$\beta(\lambda) = \frac{P}{1 + \gamma\lambda}, \quad k^2(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{1 + \gamma\lambda}$$

$$z = 0: \quad y(0, \lambda) = \frac{\partial y(0, \lambda)}{\partial z} = 0; \quad z = 1: \quad y(1, \lambda) = y_1(\lambda), \quad \frac{\partial y(1, \lambda)}{\partial z} = \varphi(\lambda) \quad (2.3)$$

$$n(\lambda) = (1 + \gamma\lambda) \frac{\partial^3 y(1, \lambda)}{\partial z^3}, \quad b(\lambda) = -(1 + \gamma\lambda) \frac{\partial^2 y(1, \lambda)}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

Здесь $\lambda = \alpha + i\omega$, $\alpha > \alpha_0$ – параметр преобразования Лапласа, $y_1(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$, $n(\lambda)$, $b(\lambda)$, $y(z, \lambda)$, $f(\lambda)$ – изображения соответствующих оригиналов.

Общее решение однородного обыкновенного дифференциального уравнения (2.2) имеет вид

$$y(z, \lambda) = C_1 \sin r_1 z + C_2 \cos r_1 z + C_3 \operatorname{sh} r_2 z + C_4 \operatorname{ch} r_2 z$$

$$r_{1,2}^2(\lambda) = \pm \frac{\beta(\lambda)}{2} + \left(\left(\frac{\beta(\lambda)}{2} \right)^2 + k^2(\lambda) \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

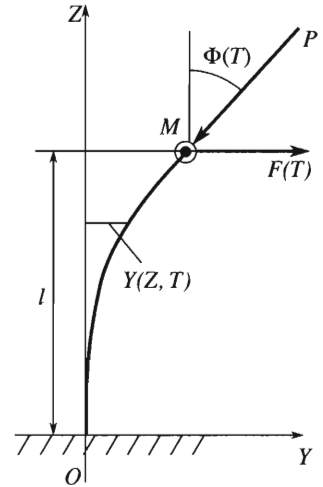
Удовлетворяя граничным условиям (2.3), определяем постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 . Подставляя известную теперь функцию $y(z, \lambda)$ в выражения (2.4) и далее в (2.1), получаем изображение сосредоточенных реакций системы, т.е. параметров возмущенного движения абсолютно жесткого тела

$$y_1(\lambda) = W_1(\lambda) f(\lambda), \quad \varphi(\lambda) = W_2(\lambda) f(\lambda), \quad W_j(\lambda) = \frac{Q_j(\lambda)}{D(\lambda)}, \quad j = 1, 2$$

$$D(\lambda) = m a \lambda^4 + \left(a \frac{\xi_{11}}{\Delta} + m \frac{\xi_{12}}{\Delta} \right) \gamma \lambda^3 +$$

$$+ \left(a \frac{\xi_{11}}{\Delta} + m \frac{\xi_{22}}{\Delta} + \frac{\xi_{11} \xi_{22} - \xi_{12} \xi_{21}}{\Delta^2} \gamma^2 \right) \lambda^2 + \frac{\xi_{11} \xi_{22} - \xi_{12} \xi_{21}}{\Delta^2} (2\gamma\lambda + 1)$$

$$Q_1(\lambda) = a \lambda^2 + \frac{\xi_{22}}{\Delta} (\gamma\lambda + 1), \quad Q_2(\lambda) = -\frac{\xi_{21}}{\Delta} (\gamma\lambda + 1), \quad \Delta = -v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21}$$



Фиг. 1

$$\xi_{11} = -v_{22}(r_1^3 \cos r_1 + r_1 r_2^2 \operatorname{ch} r_2) - v_{21}(-r_1^3 \sin r_1 + r_2^3 \operatorname{sh} r_2) \quad (2.6)$$

$$\xi_{12} = v_{11}(-r_1^3 \sin r_1 + r_2^3 \operatorname{sh} r_2) - v_{12}(r_1^3 \cos r_1 + r_1 r_2^2 \operatorname{ch} r_2)$$

$$\xi_{21} = v_{22}(r_1^2 \sin r_1 + r_1 r_2 \operatorname{sh} r_2) + v_{21}(r_1^2 \cos r_1 + r_2^2 \operatorname{ch} r_2)$$

$$\xi_{22} = -v_{11}(r_1^2 \cos r_1 + r_2^2 \operatorname{ch} r_2) + v_{12}(r_1^2 \sin r_1 + r_1 r_2 \operatorname{sh} r_2)$$

$$v_{11} = \sin r_1 - \frac{r_1}{r_2} \operatorname{sh} r_2, \quad v_{12} = \frac{v_{21}}{r_1} = \cos r_1 - \operatorname{ch} r_2, \quad v_{22} = r_1 \sin r_1 + r_2 \operatorname{sh} r_2$$

Здесь $D(\lambda)$ – характеристический квазимногочлен, $Q_j(\lambda)$ – возмущающие квазимногочлены, $W_j(\lambda)$ – сосредоточенные передаточные функции в форме квазирациональных дробей.

Вводя далее известные согласно выражениям (2.6) изображения сосредоточенных реакций $y_1(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ в соотношения для постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 и подставляя в решение (2.5), получаем изображение распределенной реакции системы

$$y(z, \lambda) = W(z, \lambda)f(\lambda), \quad W(z, \lambda) = \frac{Q(z, \lambda)}{D(\lambda)}$$

$$\begin{aligned} Q(z, \lambda) = & -\frac{a}{\Delta}[\mu_1(z, \lambda)v_{22} + \mu_2(z, \lambda)v_{21}]\lambda^2 + \\ & + \frac{1}{\Delta^2}[\mu_1(z, \lambda)(v_{12}\xi_{21} - v_{22}\xi_{22}) - \mu_2(z, \lambda)(v_{11}\xi_{21} + v_{21}\xi_{22})](\gamma\lambda + 1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\mu_1(z, \lambda) = \sin r_1 z - \frac{r_1}{r_2} \operatorname{sh} r_2 z, \quad \mu_2(z, \lambda) = \cos r_1 z - \operatorname{ch} r_2 z$$

где $Q(z, \lambda)$ – распределенный возмущающий квазимногочлен, $W(z, \lambda)$ – распределенная передаточная функция.

Заметим, что сосредоточенные передаточные функции $W_j(\lambda)$ и распределенная передаточная функция $W(z, \lambda)$ являются изображениями соответственно сосредоточенных по выходам $y_1(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ импульсных переходных функций $q_j(t)$ и распределенной по выходу $y(z, t)$ импульсной переходной функции $q(z, t)$ линеаризованной ДКС, возмущенной функцией Дирака $f(t) = \delta(t)$. При этом $Q(1, \lambda) = Q_1(\lambda)$, $W(1, \lambda) = W_1(\lambda)$.

Выражения (2.6), (2.7) определяют ДКС с динамической моделью стержня, где весь бесконечный спектр собственных частот и форм колебаний стержня учитывается через переменные коэффициенты $\xi_{vj}\Delta^{-1}$ ($v, j = 1, 2$), $\mu_1(z, t)v_{22}\Delta^{-1}$, $\mu_2(z, t)v_{21}\Delta^{-1}$, $\mu_1(z, \lambda)(v_{12}\xi_{21} - v_{22}\xi_{22})\Delta^{-2}$, $\mu_2(z, \lambda)(v_{11}\xi_{21} + v_{21}\xi_{22})\Delta^{-2}$.

3. Устойчивость и импульсные переходные функции динамической модели неконсервативной ДКС. Исследуем устойчивость динамической модели (2.6). Заметим, что функции $\xi_{vj}(\lambda)/\Delta(\lambda)$ ($v, j = 1, 2$) аналитичны при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, справедливы равенства

$$\frac{\xi_{vj}(-i\omega)}{\Delta(-i\omega)} = \frac{\xi_{vj}(i\omega)}{\Delta(i\omega)}, \quad v, j = 1, 2 \quad (3.1)$$

и при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\xi_{vj}}{\Delta \lambda^{\beta_{vj}}} = b_{vj}, \quad v, j = 1, 2 \tag{3.2}$$

$$\beta_{11} = 3/4, \quad b_{11} = -\sqrt{2}\gamma^{-3/4}, \quad \beta_{12} = 1/2, \quad b_{12} = -\gamma^{-1/2}$$

$$\beta_{21} = 1/2, \quad b_{21} = -\gamma^{-1/2}, \quad \beta_{22} = 1/4, \quad b_{22} = \sqrt{2}\gamma^{-1/4}$$

В соответствии с условием (3.1) справедливы равенства

$$\operatorname{Re}D(-i\omega) = \operatorname{Re}D(i\omega), \quad \operatorname{Im}D(-i\omega) = -\operatorname{Im}D(i\omega)$$

$$\operatorname{Re}Q_j(-i\omega) = \operatorname{Re}Q_j(i\omega), \quad \operatorname{Im}Q_j(-i\omega) = -\operatorname{Im}Q_j(i\omega); \quad j = 1, 2 \tag{3.3}$$

Согласно соотношениям (3.2) существуют такие действительные числа χ , β и σ , что

$$\text{при } \operatorname{Re}\lambda \geq 0 \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{D(\lambda)}{\lambda^{n+\chi}} = c_0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{Q_1(\lambda)}{\lambda^{k+\beta}} = c_1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{Q_2(\lambda)}{\lambda^{s+\sigma}} = c_2$$

$$n + \chi > k + \beta + 1, \quad n + \chi > s + \sigma + 1, \quad |c_1| < \infty, \quad |c_2| < \infty, \quad c_0 \neq 0 \tag{3.4}$$

где n, k, s – целые степени, а χ, β, σ – приращение степеней квазимногочленов соответственно $D(\lambda), Q_1(\lambda), Q_2(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty, \operatorname{Re}\lambda \geq 0$.

Отметим случаи, в которых соотношения (3.4) выполняются:

1) если $a \neq 0, m \neq 0, \gamma \neq 0$, то

$$n = 4, \quad \chi = 0, \quad c_0 = ma, \quad k = 2, \quad \beta = 0,$$

$$c_1 = a, \quad s = 1, \quad \sigma = 1/2, \quad c_2 = -b_{21}\gamma \tag{3.5}$$

2) если $a = 0, \gamma \neq 0$, то

$$n = \begin{cases} 3, & m \neq 0, \\ 2, & m = 0, \end{cases} \quad \chi = \begin{cases} 1/2, & m \neq 0, \\ 1, & m = 0, \end{cases} \quad c_0 = \begin{cases} m\gamma b_{12}, & m \neq 0, \\ (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\gamma^2, & m = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

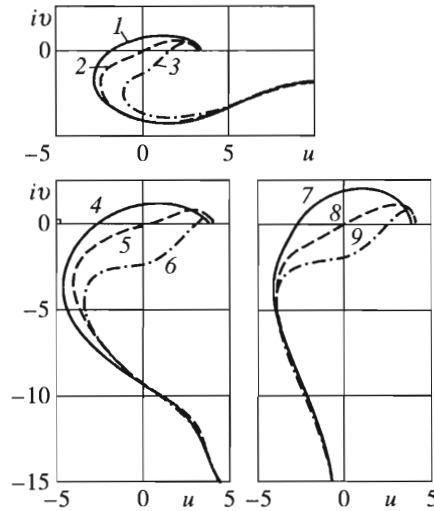
$$k = 1, \quad \beta = 1/4, \quad c_1 = b_{22}\gamma, \quad s = 1, \quad \sigma = 1/2, \quad c_2 = -b_{21}\gamma$$

Таким образом, в указанных случаях соотношения (3.4), (3.3) выполняются, и по известному определению [4, 5] рассматриваемые квазирациональные дроби $W_j(\lambda)$ являются физически возможными. Кроме того, функции $D(\lambda), Q_j(\lambda)$ аналитичны на мнимой оси и в правой половине комплексной плоскости (λ). Следовательно, в соответствии с теоремами [4, 5] об устойчивости квазирациональных дробей динамическая модель (2.6) асимптотически устойчива, если характеристический квазимногочлен $D(\lambda)$ устойчивый, т.е. все его корни лежат слева от мнимой оси на комплексной плоскости (λ). Если хотя бы один корень квазимногочлена $D(\lambda)$ лежит справа от мнимой оси комплексной плоскости (λ), то динамическая модель (2.6) неустойчива. Так как функция $D(\lambda)$ аналитична на мнимой оси и в правой половине комплексной плоскости $\lambda = \alpha + i\omega$ и согласно соотношениям (3.3), (3.4) выполняются условия

$$\text{при } \operatorname{Re}\lambda \geq 0 \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{D(\lambda)}{\lambda^{n+\chi}} = c_0 \neq 0$$

$$\forall \omega \in (-\infty, \infty): \quad D(i\omega) = u(\omega) + i v(\omega) \neq 0, \quad u(-\omega) = u(\omega), \quad v(\omega) = -v(-\omega)$$

то по теореме об устойчивости квазимногочлена [4] все корни квазимногочлена $D(\lambda)$ будут расположены левее мнимой оси комплексной плоскости (λ), если при монотонном возрастании ω от 0 до ∞ вектор $D(i\omega)$ повернется на плоскости $(u, i v)$ от положи-



Фиг. 2

тельной действительной полуоси в положительном направлении на угол $(n + \chi)\pi/2$, т.е. получит приращение аргумента

$$\phi = \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(i\omega) = (n + \chi)\pi/2 \quad (3.7)$$

Из доказательства [4] указанной теоремы следует, что в случае неустойчивого квазимногочлена $D(\lambda)$ при расположении N его корней в правой полуплоскости (λ) вектор $D(i\omega)$ получит приращение аргумента

$$\phi = \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(i\omega) = (n + \chi)\pi/2 - N\pi \quad (3.8)$$

Обратимся теперь к распределенной динамической модели (2.7). Как видно, в любой фиксированной точке $z \in (0, 1]$ срединной линии стержня имеют место равенства

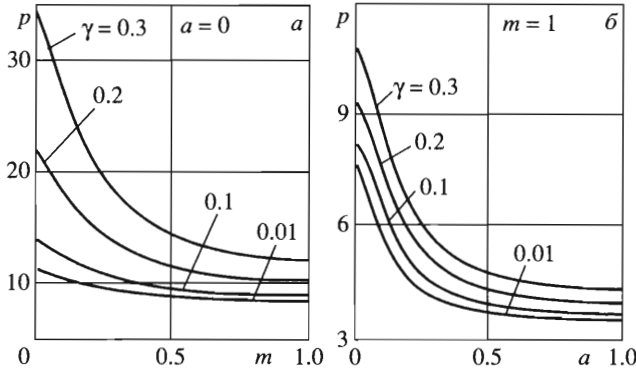
$$y(\lambda) = W(z, \lambda)f(\lambda), \quad W(z, \lambda) = Q(z, \lambda)/D(\lambda)$$

Все рассуждения относительно устойчивости квазирациональных дробей $W_j(\lambda)$ будут справедливы и для квазирациональных дробей $W(z, \lambda)$.

Следовательно, динамическая модель рассматриваемой линеаризованной неконсервативной ДКС в случаях (3.5), (3.6) асимптотически устойчива, если выполняется равенство (3.7), и все корни квазимногочлена $D(\lambda)$ лежат на плоскости (λ) слева от мнимой оси. Более того, расположение годографа вектора $D(i\omega) = u(\omega) + i\nu(\omega)$ на плоскости ($u, i\nu$) при $0 \leq \omega < \infty$ в зависимости от возрастающей следящей силы p позволяет судить о границе области асимптотической устойчивости, которой соответствует критическое значение следящей силы $p = p_*$. При $p > p_*$ система неустойчива, корни характеристического квазимногочлена $D(\lambda)$ переходят в правую половину комплексной плоскости (λ), и число N этих корней можно определить по соотношению (3.8).

Заметим, что в случае $\gamma = 0$ условия (3.4) не выполняются, и квазирациональные дроби $W_j(\lambda)$ не являются физически возможными. Это согласуется с известным выводом [2] о том, что модель неконсервативной системы при $\gamma = 0$ неприемлема и ей соответствует квазикритическая сила, отличная от истинной критической силы p_* , вычисляемой при $\gamma \neq 0$. Далее приведены результаты анализа динамической модели (2.6) по передаточной функции $W_1(\lambda) = Q_1(\lambda)/D(\lambda)$ в случаях (3.5), (3.6) при $\gamma \neq 0$.

На фиг. 2 приведены частотные годографы вектора $D(i\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$ на плоскости ($u, i\nu$) в зависимости от величины следящей силы p для случая упруговязкого стержня



Фиг. 3

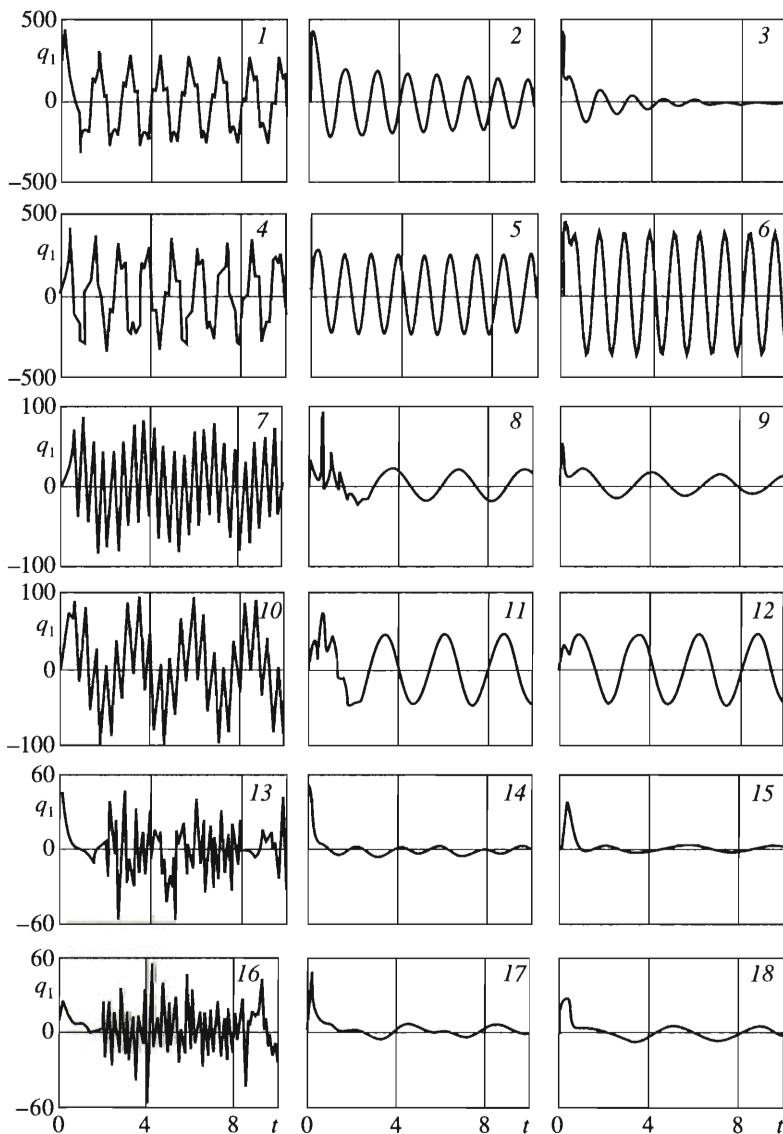
ня с абсолютно жестким телом на конце при $\gamma = 0.1, m = 1, a = 0.4, n = 4, \chi = 0$. При $p = 3.13 < p_*$ (кривая 1) согласно выражению (3.7) имеем $\phi = 2\pi$, и система асимптотически устойчива. При $p = p_* = 4.13$ (кривая 2) линия годографа проходит через точку (0,0), и система находится на границе устойчивости. При $p = 5.13 > p_*$ (кривая 3) имеем $\phi = 0$, т.е. согласно выражению (3.8) два корня характеристического квазимногочлена $D(\lambda)$ перешли в правую половину комплексной плоскости (λ), и система стала неустойчивой. Аналогично для случая упруговязкого стержня с сосредоточенной массой на конце $\gamma = 0.1, m = 1, a = 0, n = 3, \chi = 0.5$ показаны годографы вектора $D(i\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$ асимптотически устойчивой при $p = 5.263 < p_* = 8.263, \phi = 7\pi/4$ (кривая 4) системы, далее системы на границе устойчивости при $p = p_* = 8.263$ (кривая 5) и неустойчивой при $p = 11.263 > p_* = 8.263, \phi = -\pi/4$ (кривая 6) системы.

В случае упруговязкого стержня без груза на конце $\gamma = 0.1, m = 0, a = 0, n = 2, \chi = 1$, как видно по годографам $D(i\omega)$ при $p = 10.38 < p_* = 13.64, \phi = 3\pi/2$ (кривая 7), стержень асимптотически устойчив, при $p = p_* = 13.64$ (кривая 8) на границе устойчивости и при $p = 15.38 > p_* = 13.64, \phi = \pi/2$ (кривая 9) стержень неустойчив. Все рассмотренные выше годографы $D(i\omega)$ приведены в специальном масштабе

$$u + iv = D(i\omega)(\text{Arsh}|D(i\omega)|)/|D(i\omega)|$$

На фиг. 3,а построены границы областей устойчивости при разных коэффициентах внутреннего трения γ для стержня с сосредоточенной массой m на конце при $a = 0$ на плоскости параметров (m, p) . Области устойчивости расположены ниже соответствующих линий. Как видно, увеличение массы m и уменьшение коэффициента внутреннего трения γ снижают значение критической следящей силы p_* и существенно уменьшают область устойчивости. Однако при $\gamma = 0.01$ область устойчивости достигает своего асимптотического наименьшего значения и при дальнейшем уменьшении γ до очень малого значения $\gamma = 0.0001$ линия границы области устойчивости остается практически неизменной. Заметим, что при $m = 0$ и $\gamma = 0.0001$ критическая сила имеет значение $p_* = 10.96$, т.е. на 17.5% превосходит критическую [3] силу $p_* = 9.328$, вычисленную на основе приближенной модели с аппроксимацией по двум первым собственным формам.

На фиг. 3,б для стержня с закрепленным на конце абсолютно жестким телом массой $m = 1$ и моментом инерции $a \in [0, 1]$ на плоскости параметров (a, p) приведены границы областей устойчивости при разных значениях коэффициента γ . Как видно, уменьшение γ и увеличение a существенно уменьшают значение критической следящей силы. Например, $p_* = 3.7$ при $m = 1, a = 1, \gamma = 0.01$.



Фиг. 4

Пусть $f(t) = \delta(t)$ – функция Дирака. Тогда реакция ДКС по выходу $y_1(t)$ на данное возмущение есть сосредоточенная импульсная переходная функция, которая была обозначена ранее через $q_1(t)$. Так как передаточная функция $W_1(\lambda)$ – изображение сосредоточенной импульсной переходной функции (ИПФ) $q_1(t)$ (интеграл Лапласа) с абсциссой абсолютной сходимости $\alpha = \sigma$, то, используя интеграл Меллина, имеем

$$q_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} W(\lambda)e^{\lambda t} d\lambda, \quad \alpha_0 > \sigma, \quad t \geq 0 \tag{3.9}$$

С помощью эффективного алгоритма [6] были вычислены сосредоточенные ИПФ $q_1(t)$ при значениях коэффициента $\gamma = 0.0001, 0.01, 0.1$ внутреннего трения в

стержня в случаях асимптотически устойчивой системы ($p < p_*$) и системы на границе устойчивости ($p = p_*$) при разных вариантах груза, а также без груза на конце стержня.

На фиг. 4 приведены вычисленные ИПФ при разных наборах значений параметров (соответствующий номер набора ниже указан в скобках). Для стержня без груза ($m = a = 0$) на конце стержня при $p = 8$ в случаях $\gamma = 0.0001$ (1), $\gamma = 0.01$ (2), $\gamma = 0.1$ (3) ИПФ (первые три графика) асимптотически устойчивы. Увеличение коэффициента γ приводит к сглаживанию высокочастотных форм, уменьшению амплитуды колебаний и времени переходного процесса. При $p = p_* = 10.96$, $\gamma = 0.0001$ (4); $p = p_* = 10.96$, $\gamma = 0.01$ (5); $p = p_* = 13.63$, $\gamma = 0.1$ (6) (следующие три графика) на границе устойчивости ИПФ принимают форму незатухающих колебаний. При $\gamma = 0.01$ амплитуда высокочастотных форм пренебрежимо мала и конец стержня колеблется на основной форме с амплитудой 300 и частотой 0.85. При $\gamma = 0.0001$ амплитуда высокочастотных форм достигает величины 100, и, следовательно, амплитуда незатухающей ИПФ возрастает до 400.

Для стержня с сосредоточенной на конце массой $m = 1$, $a = 0$ приведены при $p = 6 \leq p_*$ для случаев $\gamma = 0.0001$ (7), $\gamma = 0.01$ (8), $\gamma = 0.1$ (9) асимптотически устойчивые ИПФ, а также ИПФ на границе устойчивости для случаев $p = p_* = 7.9$, $\gamma = 0.0001$ (10); $p = p_* = 7.9$, $\gamma = 0.01$ (11); $p = p_* = 8.26$, $\gamma = 0.1$ (12). Аналогично для стержня с абсолютно жестким телом $m = 1$, $a = 0.4$ на конце приведены при $p = 3 < p_*$ для случаев $\gamma = 0.0001$ (13), $\gamma = 0.01$ (14), $\gamma = 0.1$ (15) асимптотически устойчивые ИПФ, а также ИПФ для случаев $p = p_* = 4$, $\gamma = 0.0001$ (16); $p = p_* = 4$, $\gamma = 0.01$ (17); $p = p_* = 4.13$, $\gamma = 0.1$ (18) на границе устойчивости.

Из приведенных на фиг. 4 графиков видно, что увеличение коэффициента внутреннего трения γ сглаживает высокочастотные формы колебаний, а увеличение следящей силы p приводит к некоторому увеличению частоты и амплитуды основной (низшей) формы колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961, 339 с.
2. Болотин В.В., Гришко А.А., Петровский А.П. О влиянии демпфирующих сил на послекритическое поведение существенно непотенциальных систем // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 2. С. 158–167.
3. Агафонов С.А. Стабилизация параметрическим возбуждением упруговязкого стержня, находящегося под действием следящей силы // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 137–141.
4. Андрейченко К.П., Андрейченко Д.К., Смарунь А.Б. Динамическое моделирование линейных дискретно-континуальных систем // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 183–195.
5. Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.
6. Андрейченко Д.К. Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 7. С. 1030–1044.