УДК 531.36:62–50

© 2004 г. В. И. Матюхин

УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Развивается цикл исследований, связанных с проблемой управляемости нелинейных динамических систем. Рассматриваются системы, которые имеют механическую природу (колесные средства передвижения, транспортные и обрабатывающие системы, манипуляторы). Для механических систем общего класса, которые могут содержать неголономные связи, устанавливаются критерии управляемости; аналогичные критерии были установлены ранее для голономных систем [1–4]. Найденные условия управляемости имеют наглядный физический смысл. Например, для управляемости манипуляционного робота требуется, чтобы управляющие силы доминировали над иными обобщенными силами (силами веса, силами сопротивления внешней среды). Доминирование необходимо по амплитуде сил. Дополнительные условия связаны со свойствами наложенных на систему связей. По существу требуется, чтобы соотношения связей допускали возможность надлежащего изменения координат и скоростей механической системы в исследуемой области.

1. Объект исследования. Объект исследования – динамические системы, движение которых описываются уравнениями Лагранжа первого рода [5–7]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + M_i + R_i, \quad R_i = \sum_{s=1}^{g} \Lambda_s f_{si} \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} f_{si}(q)\dot{q}_i = 0 \tag{1.2}$$

Здесь и далее индексы пробегают следующие значения: $i, j = 1, 2, \ldots, N$; $s = 1.2, \ldots, g$; $r = g+1, g+2, \ldots, N$.

Система (1.1), (1.2) описывает движение многих механических систем. Она может описывать движение голономных систем в зависимых координатах, если по каким-либо причинам описание связей (1.2) желательно учитывать в явной форме [5–7], например, когда замена исходных обобщенных координат приводит к потере наглядности, выразительности исследуемой задачи управления или когда изучаются реакции наложенных связей. Система (1.1),(1.2) может описывать также движение неголономных систем, если соотношения (1.2) описывают неголономные механические связи. Речь идет, прежде всего, о системах с качением: автомобиль, поезд, самолет на взлетной полосе и т.д., а также об электромеханических системах со скользящими контактами [5–13].

Используются стандартные обозначения: q_i, $\dot{q}_i$ – обобщенные координаты и скорости системы, N – число координат, R_i – реакции связей (1.2), Λ_s – неопределенные множители Лагранжа, $\{Q_i + M_i\}$ – обобщенные силы. Величины M_i рассматриваются как управляющие силы (управления), которые создаются управляющими устройствами системы – приводами. Величины $Q_i = Q_i(q, \dot{q}, t)$ определяются внешними силами, которые воздействуют на механическую систему. Через $T = T(q, \dot{q})$ обозначена кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{1.3}$$

Величины a_{ij} связаны с распределением масс механической системы (1.1) и характеризуют ее инерционные свойства. Для кинетической энергии T выполнены известные в механике неравенства

$$\lambda_1|\dot{q}|^2 \le T \le \lambda_2|\dot{q}|^2, \quad |\dot{q}|^2 = \sum_{i=1}^{N}\dot{q}_i^2, \quad \lambda_p = \mathrm{const} \ge 0 \tag{1.4}$$

при любых значениях q_i, $\dot{q}_j$.

Для формального анализа свойства управляемости системы (1.1) вводятся следующие предположения о свойствах изучаемого объекта. Будем полагать, что в неравенствах (1.4)

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \infty \tag{1.5}$$

Значения сил Q_i в системе (1.1) при всех q_i, $\dot{q}_j$ и $t \ge t^0$ (t^0 – некоторый момент времени) будем считать ограниченными:

$$|Q_i(q, \dot{q}, t)| \le h_i, \quad h_i = \mathrm{const} \ge 0 \tag{1.6}$$

Линейные формы (1.2) предполагаются линейно независимыми:

$$\mathrm{rank}\,\|f_{si}\| = g \tag{1.7}$$

Это предположение считается естественным в динамике систем с неголономными связями.

В качестве *допустимых* управлений в системе (1.1) рассматриваются функции времени $M(t) = \{M_1(t), \ldots, M_N(t)\}$, значения которых при всех t ограничены:

$$|M_i(t)| \le H_i, \quad H_i = \mathrm{const} \ge 0 \tag{1.8}$$

Класс таких функций обозначим через $U = U(H_i)$.

В качестве решений системы (1.1), (1.2) рассматриваются функции времени $q = q(t)$, $t > t^0$ с абсолютно непрерывной производной. На этом множестве решений функции $M_i(t)$, $Q_i(q, \dot{q}, t)$ предполагаются суммируемыми на любом конечном интервале времени. Функции $a_{ik}(q)$, $\partial a_{ij}(q)/\partial q_k$, $f_{ik}(q)$ предполагаются непрерывными. Введенные формальные предположения представляются достаточно естественными [1–13].

2. Постановка задачи. Свойство управляемости систем вида (1.1), (1.2) будет пониматься в смысле Калмана.

Определение 1. Система (1.1), (1.2) называется управляемой в ее пространстве состояний $\{q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots \dot{q}_N\}$ в классе допустимых управлений U, если для произвольных точек $S^f = (q^f, \dot{q}^f)$ и $S^e = (q^e, \dot{q}^e)$ пространства существует некоторое допустимое управление $M(t) \in U$, при котором система (1.1), (1.2) может перейти из S^f в S^e за некоторое конечное время.

Для голономных механических систем условия управляемости были получены ранее [1–3]. Такой системой будет система (1.1), (1.2)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i+M_i \tag{2.1}$$

если связи (1.2) не учитывать. Условие управляемости системы (2.1) имеет вид

$$H_i > h_i \tag{2.2}$$

Числа h_i, H_i введены в соотношениях (1.6), (1.8). Иначе говоря, требуется, чтобы управления M_i механической системы доминировали над обобщенными силами Q_i по размаху. Подобные условия представляются естественными. Если вес груза превышает грузоподъемность манипулятора, то управлять такой системой, очевидно, затруднительно.

Заметим, что, если связи (1.2) голономны, то система (1.1), (1.2) также может быть приведена к системе типа (2.1). Условия управляемости такой системы аналогичны условиям (2.2). Заметим также, что связи (1.2) являются голономными, если могут быть приведены к виду геометрических связей. Речь здесь о том, что некоторые системы дифференциальных уравнений (1.2) можно проинтегрировать, а ее интегралы записать в форме соотношений $\sum\tilde{f}_{si}(q)=0$, которые содержат только координаты системы. Существуют примеры связей (1.2), когда это невозможно (такие связи называют неголономными).

В общем случае система (1.1), (1.2) не обязательно является голономной механической системой. Для неголономной системы известные критерии управляемости непосредственно не применимы. Задача настоящей работы состоит в том, чтобы найти условия управляемости механических систем вида (1.1), (1.2) в классе U ограниченных управлений.

3. Подсистема связей. В исследовании вопроса об управляемости системы (1.1), (1.2) важную роль играют свойства ее подсистемы (1.2) – подсистемы, описывающей механические связи. Эти свойства могут существенно определять возможности управления исходной системой (1.1),(1.2). Действительно, подсистема связей (1.2) может содержать элемент, например, вида $\dot{q}_1 = 0$. В этом случае $q_1(t)\equiv q_i(0)$, $t\ge 0$, и система (1.2) не может быть переведена в точку q_1^* фазового пространства, для которой $q_1^* \ne q_1(0)$. Следовательно, система (1.1), (1.2) не является управляемой. Приведенный пример является формальным, однако соотношение $\dot{q}_1 = 0$ отвечает всем признакам описания некоторой механической связи (пример приведен только для простоты изложения). Общая цель работы состоит в том, чтобы обратить внимание на такого рода обстоятельства и разработать соответствующий метод исследования проблемы управляемости.

Именно, рассмотрим подсистему связей (1.2)

$$\sum_{i=1}^{N} f_{si}(q)\dot{q}_i = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, g \tag{3.1}$$

как некоторую независимую систему дифференциальных уравнений. Пространство состояний системы (3.1) имеет вид $\{q_1, \ldots q_N\}$, N – размерность пространства. В системе (3.1) имеется g уравнений, причем $N>g$. Последнее неравенство является следствием того естественного предположения, что исходная механическая система имеет хотя бы одну степень свободы, т.е. $n\ge 1$, где $n = N-g$.

Таким образом, в системе (3.1) число N переменных больше, чем число g уравнений. Отсюда вытекает, что системы вида (3.1) могут обладать следующей особенностью: через одну и ту же точку пространства состояний $\{q_1, \ldots, q_N\}$ могут проходить несколько решений системы (3.1) (см. конкретный пример в разд. 7). Скажем, через некоторую точку $s^+ = (q_1^+, \ldots, q_N^+)$ могут проходить различные решения $q^p(t) = (q_1^p(t), \ldots, q_N^p(t))$, $t \geq t^1$ $(p = 1, 2, \ldots)$ системы (3.1), т.е.

$$q^p(t^1) = s^+, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

Тогда для точки s^+ можно ввести множество

$$Z(s^+, \tau) = \{q^1(t^1 + \tau), q^2(t^1 + \tau), \ldots\} \tag{3.3}$$

Элементы этого множества – точки $q^1(t^1 + \tau)$, $q^2(t^1 + \tau)$, ... пространства $\{q_1, \ldots, q_N\}$ состояний системы (3.1). Множество $Z(s^+, \tau)$ аналогично множеству достижимости, которое имеет смысл для управляемых динамических систем [14, 15]. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 2. Точку $s^- = (q_1^-, \ldots, q_N^-)$ пространства состояний $\{q_1, \ldots, q_N\}$ системы (3.1) будем называть достижимой из точки $s^+ = (q_1^+, \ldots, q_N^+)$, если существует такая допустимая траектория $q^*(t)$ движения системы (3.1), что $q^*(t^1) = s^+$, $q^*(t^1 + \tau) = s^-$, где $0 \leq \tau < \infty$.

В определении 2 речь идет по существу о следующем свойстве системы (3.1). Пусть для системы (3.1) заданы две точки s^+ и s^-. Пусть в некоторый начальный момент времени t^1 система (3.1) находится в точке s^+, т.е. $(q_1(t^1), \ldots, q_N(t^1)) = s^+$. Пусть также в некоторый момент времени $t = t^1 + \tau$ множество (3.3) $Z(s^+, \tau)$ содержит точку s^-. Если $\tau < \infty$, то точка s^- достижима из точки s^+ согласно определению 2. Таким образом, определение 2 отмечает тот факт, что некоторые точки пространства $\{q_1, \ldots, q_N\}$ могут быть соединены конечными отрезками траекторий системы (3.1). Оказывается, это обстоятельство важно далее для анализа свойства управляемости исходной механической системы.

Определение 3. Допустимыми траекториями в определении 2 будем считать функции времени $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_N(t))$, для которых производные $\ddot{q}_j(t)$ непрерывны.

Введение указанного класса допустимых траекторий обусловлено тем, что решения $q(t)$ системы (3.1) далее предполагается рассматривать в качестве решения исходной системы (1.1), (1.2). С этой точки зрения интерес представляют не любые, а достаточно гладкие решения системы (3.1). В частности, здесь необходимо учесть ограничения (1.6), (1.8), накладываемые на управления и обобщенные силы Q_i и M_i исходной механической системы. Поэтому далее рассматриваются такие решения $q(t)$ системы (3.1), для которых производные $\ddot{q}_j(t)$ непрерывны.

Сформулируем следующее предположение, которое лежит в основе исследования свойства управляемости исходной системы (1.1), (1.2).

Свойство достижимости. Любая точка $s^- = (q_1^-, \ldots, q_N^-)$ пространства состояний $\{q_1, \ldots, q_N\}$ системы (3.1) достижима из его произвольной точки $s^+ = (q_1^+, \ldots, q_N^+)$ в классе допустимых траекторий.

Содержательный пример системы (3.1), которая обладает свойством достижимости, исследован в разд. 7. Интуитивно ясно, что описанное свойство существенно для решения вопроса об управляемости исходной системы (1.1), (1.2). Именно, пусть подсистема связей (1.2) не обладает свойством достижимости, т.е. пусть некоторая точка s^- не достижима из некоторой точки s^+. Тогда система (1.1), (1.2) в общем случае не будет обладать свойством управляемости.

4. Основной результат.

Теорема 1. Пусть для системы (1.1), (1.2) выполнены условия (1.3)–(1.8). Пусть заданы произвольные постоянные H_i, удовлетворяющие условию

$$H_i > h_i, \quad 1 = 1, 2, \ldots, N \tag{4.1}$$

Пусть для подсистемы (1.2) системы (1.1), (1.2) справедливо свойство достижимости. Тогда система (1.1), (1.2) является управляемой в ее фазовом пространстве $\{q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N\}$ в классе управлений $U(H_i)$.

Доказательство теоремы 1 приведено в разделе 5.

Смысл теоремы 1 состоит в том, что механическая система (1.1), (1.2) может быть переведена в любую точку фазового пространства системы. При этом неважно, где система находилась в начальный момент времени. Для этого достаточно, чтобы управляющие силы M_i, $|M_i| \le H_i$ системы доминировали над силами Q_i, $|Q_i| \le h_i$ согласно условию (4.1). Утверждение теоремы 1 ранее было получено [1, 2] без учета наложенных связей (1.2) (заметим, что условие (4.1) совпадает с условием (2.2)). В отличие от этого в теореме 1 управляемость механической системы обоснована в предположении, что такие связи допускаются. Надо только, чтобы для подсистемы связей (1.2) было дополнительно выполнено свойство достижимости. Заметим также следующее. Пусть для системы (2.1) выполнены условия (2.2), и она является управляемой. Тогда система (2.1) останется управляемой, если на нее наложить связи (1.2). Это будет так, если связи обладают свойством достижимости.

Интерес представляет вопрос о том, сколь далеки условия (4.1) теоремы 1 от необходимых. Покажем, что при нарушении условия (4.1) система (1.1),(1.2) может быть неуправляемой. Именно, пусть вместо условий (4.1) справедливы условия

$$H_i = h_i \tag{4.2}$$

Рассмотрим частный случай системы (1.1), (1.2), где $Q_i = 0$, и следовательно, $h_i = H_i = 0$. Отсюда вытекает соотношение $\dot{T}(t) = 0$, $t \ge 0$ (при выводе которого можно учесть доказательство приводимой ниже леммы 1). Следовательно, такая система (1.1), (1.2) не может быть переведена в точки фазового пространства, где обобщенные скорости системы достаточно велики. Поэтому система не управляема.

Полезность приведенной теоремы 1 иллюстрируется примером в разд. 7.

5. Доказательство теоремы 1: сведение к теореме 2, а затем к теореме 3. В основе доказательства теоремы 1 лежит схема, разработанная Е.С. Пятницким [1, 2].

Рассмотрим систему

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = m_i(t) + R_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \\ \sum_{i=1}^{N} f_{si}(q)\dot{q}_i = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, g\end{gathered} \tag{5.1}$$

В нее переходит исходная система (1.1), (1.2), если искомые управления M_i выбрать в форме

$$M_i(t) = -Q_i(q(t), \dot{q}(t), t) + m_i(t) \tag{5.2}$$

Величины $m_i(t)$ будем рассматривать в качестве новых управлений и введем класс таких управлений.

Класс u управлений включает функции времени $m_i(t)$ вида (5.2), удовлетворяющие условиям

$$|m_i(t)| \le H_i^0, \quad H_i^0 = \text{const} > 0 \tag{5.3}$$

Пусть система (5.1) управляема в классе u. Покажем, что тогда исходная система (1.1), (1.2) управляема в классе U.

Действительно, пусть существует некоторое управление $m^*(t)$, которое переводит систему (5.1) из произвольной точки S^f в произвольную точку S^e за некоторое конечное время по некоторой траектории $q = q^*(t)$. Тогда, очевидно, управление

$$M_i^*(t) = -Q_i(q^*(t), \dot{q}^*(t), t) + m_i^*(t) \tag{5.4}$$

будет переводить систему (1.1), (1.2) из точки S^f в S^e также за конечное время.

Управление (5.4) будет принадлежать классу U. Для этого положительные числа H_i^0 в неравенствах (5.3) выберем, исходя из условий

$$H_i^0 = H_i - h_i \tag{5.5}$$

Кроме того, будем полагать, что соотношения (5.4) выполнены при

$$t \ge t^0 \tag{5.6}$$

Последнее условие связано с учетом предположения (1.6), которое выполнено для исходной системы (1.1), (1.2). Таким образом, утверждение теоремы 1 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть задана произвольная система (5.1), которая удовлетворяет условиям (1.3)–(1.7). Пусть для системы (5.1) выполнено свойство достижимости. Пусть также заданы некоторые положительные числа H_i^0, которые определяют класс $u(H_i^0)$ допустимых управлений. Пусть заданы две произвольные точки S^f и S^e фазового пространства системы (5.1). Тогда существует некоторое управление из класса u, которое при $t \ge t^0$ переводит систему (5.1) из точки S^f в точку S^e за некоторое конечное время.

В частном случае теорема 2 имеет вид следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть задана произвольная система (5.1), которая удовлетворяет условиям (1.3)–(1.7). Пусть для системы (5.1) выполнено свойство достижимости. Пусть также заданы некоторые положительные числа H_i^0. Пусть задана произвольная точка S^f фазового пространства системы (5.1). Тогда существует управление из класса $u(H_i^0)$, которое переводит систему (5.1) из точки S^f в начало координат $S^0 = (0, 0)$ за некоторое конечное время.

Теорема 2 оказывается следствием теоремы 3. Действительно, согласно теореме 3 существует управление, которое переводит систему (5.1) из S^f в начало координат $S^0 = (0, 0)$ за некоторое конечное время. Управление, которое переводит систему из начала координат в точку S^e, также существует.

Действительно, в системе (5.1) изменим направление времени, т.е. сделаем замену

$$t = t^1 - \theta \tag{5.7}$$

Тогда получим систему

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = m_i(t^1 - \theta) + R_i, \quad \sum_{i=1}^{N} f_{si}(q) q_i' = 0 \tag{5.8}$$

Выражения для кинетической энергии T и реакций связей аналогичны выражениям (1.3) и второй формуле (1.1) соответственно, $q' = dq/d\theta$. Через t^1 в (5.7) обозначена постоянная, подлежащая определению. Система (5.8), как и система (5.1), удовлетворяет условиям (1.3)–(1.7) (при тех же параметрах λ_1, λ_2, h_i), для нее справедливо свойство достижимости. Поэтому для системы (5.8) все условия теоремы 3 выполнены.

Это означает, что система (5.8) может быть переведена из произвольной точки S^e в начало координат S^0 за некоторое конечное время. Соответствующее управление из класса u обозначим через $m_i^1(\theta)$. Тогда, очевидно, управление вида $m_i^{11}(t) = m_i^1(t^1 - t)$ переведет систему (5.1) из начала координат в точку S^e также за конечное время.

Покажем, что управление $m_i^{11}(t)$ будет переводить систему (5.1) из точки S^0 в точку S^e при $t \geq t^0$, что требуется в теореме 2. Для того чтобы это показать, постоянную t^1 в равенстве (5.7) выберем надлежащим образом. Именно, пусть система (5.1) при $t = t^0$ начинает свое движение из точки S^f, а в некоторый момент времени $t = t^{00}$ попадает в точку S^0. Аналогично, система (5.8) из точки S^e при $\theta = \theta^0$ в точку S^0 попадает в некоторый момент времени $\theta = \theta^{00}$. Положим $t^1 = t^{00} + \theta^{00}$ в равенстве (5.7). Тогда управлению $m_i^1(\theta)$ будет отвечать отрезок $[\theta^0, \theta^{00}]$, а управлению $m_i^{11}(t)$ – отрезок $[t^{00}, t^{00} + (\theta^{00} - \theta^0)]$. Следовательно, управление $m_i^{11}(t)$ начнет переводить систему (5.1) из S^0 в S^e в нужный момент времени $t = t^{00} \geq t^0$. Итак, теорема 2 вытекает из теоремы 3.

6. Доказательство теоремы 3. Доказательство теоремы 3 опирается на следующие два основных свойства механических систем вида (5.1): 1) систему (5.1) можно полностью затормозить и перевести на координатную плоскость, 2) систему (5.1) можно перемещать из одной точки координатной плоскости в другую.

На фиг. 1 управление m^f останавливает систему (5.1), управление m^{f0} переводит ее из точки координатной плоскости в начало координат.

Возможность торможения системы (5.1) (за счет управления m^f) и возможность перемещения системы (5.1) из одной точки координатной плоскости в другую (за счет управления m^{f0}) определяют следующие леммы. Леммы завершают доказательство теоремы 3.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда существует некоторое управление m^f класса u, которое за конечное время переводит систему (5.1) из произвольной начальной точки $S^f = (q^f, \dot{q}^f)$ в некоторую точку вида $S^{f0} = (q^{f0}, 0)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда существует некоторое управление $m^{f0}(t)$ класса u, которое за конечное время переводит систему (5.1) из произвольной точки вида $S^{f0} = (q^{f0}, 0)$ в начало координат $S^0 = (0, 0)$.

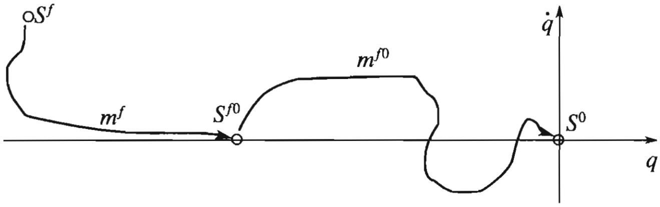
Доказательство леммы 1. Рассмотрим механическую систему вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -H_i^0 \operatorname{sign}(\dot{q}_i) + R_i, \quad \sum_{i=1}^{N} f_{si}\dot{q}_i = 0, \quad t \geq 0 \tag{6.1}$$

В систему (6.1) переходит рассматриваемая механическая система (5.1) при использовании управления

$$m_i = m_i^f = -H_i^0 \operatorname{sign}(\dot{q}_i) \tag{6.2}$$

(это управление m^f на фиг. 1). Управления (6.2) являются допустимыми, т.е. принадлежат классу u. В системе (6.1) начальные условия $q(0) = q^f$, $\dot{q}(0) = \dot{q}^f$ произвольны



Фиг. 1

согласно условиям теоремы 3. Лемма верна, если на движениях системы (6.1) справедливы соотношения

$$|\dot{q}_i(\tau)| = 0, \quad \exists\tau\colon 0 \le \tau < \infty \tag{6.3}$$

Действительно, на движениях системы (6.1) выполнены известные в механике соотношения

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i\{m_i^f + R_i\} \tag{6.4}$$

Для реакций R_i в любой момент времени справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i R_i = 0 \tag{6.5}$$

Действительно, из предположения об идеальности наложенных на систему (6.1) связей следует

$$\sum_{i=1}^{N} \delta q_i R_i = 0 \tag{6.6}$$

По определению равенство (6.6) справедливо для любого вектора $(\delta q_1, \ldots, \delta q_N)$, который удовлетворяет системе

$$\sum_{i=1}^{N} f_{si}\delta q_i = 0 \tag{6.7}$$

Вектор $(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)$ в равенстве (6.5) удовлетворяет системе (6.7), поскольку удовлетворяет описанию связей в системе (6.1). Следовательно, для вектора $(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)$ справедливо равенство (6.6), т.е. равенство (6.5).

При учете соотношений (6.5) и (6.2) равенство (6.4) можно записать в виде

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i\{-H_i^0 \operatorname{sign}(\dot{q}_i)\}$$

Отсюда следуют соотношения

$$\dot{T} = -\sum_{i=1}^{N} |\dot{q}_i| H_i^0 \le -\lambda\sqrt{T}, \quad \lambda = \mathrm{const} > 0 \tag{6.8}$$

где учитываются неравенства (1.4), (1.5) и неравенства $H_i^0 > 0$. Для решений дифференциального неравенства (6.8) справедливо соотношение

$$T(t) = 0, \text{ при } t \geq \tau, \quad \tau = 2\sqrt{T(0)}/\lambda \tag{6.9}$$

Отсюда при учете (1.4) следуют искомые равенства (6.3).

Доказательство леммы 2. Запишем исходную систему (5.1) в эквивалентной форме уравнений Маджи вида [5]

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N}(L_i - m_i)b_{ir} = 0, \quad r = g+1, \ldots, m,\\ \sum_{i=1}^{N} f_{si}\dot{q}_i = 0, \quad L_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\end{gathered} \tag{6.10}$$

Через b_{ir} обозначены некоторые функции $b_{ir} = b_{ir}(q)$, причем

$$\operatorname{rank}\|b_{ir}\|_{i=1,N}^{r=g+1,N} = n, \quad n = N - g \geq 1 \tag{6.11}$$

Замечания. 1°. Для построения системы (6.10) исходные уравнения (5.1) записываются сначала в общей форме уравнений Даламбера – Лагранжа

$$\sum_{i=1}^{N}(L_i - m_i)\delta q_i = 0 \tag{6.12}$$

(учтено, что связи (1.2) предполагаются идеальными). Далее учитывается, что виртуальные перемещения δq_i в соотношении (6.12) удовлетворяют g уравнениям (6.7). Следовательно, виртуальные перемещения δq_i можно выразить через некоторые $n = N - g$ независимых параметров e_r [5]

$$\delta q_i = \sum_{r=g+1}^{N} b_{ir}e_r$$

Это позволяет получить из уравнений (6.12) уравнения (6.10).

2°. Функции $b_{ir} = b_{ir}(q)$ в системе (6.10) можно построить в явном виде следующим образом. Рассмотрим систему

$$\sum_{i=1}^{N} f_{si}(q)\dot{q}_i = 0, \quad s = 1, \ldots, g, \quad \sum_{i=1}^{N} f_{ri}(q)\ddot{q}_i = \dot{\pi}_r, \quad r = g+1, \ldots, N \tag{6.13}$$

Первая группа соотношений в системе (6.13) совпадает с описаниями связей (1.2). Вторая группа соотношений введена дополнительно. Здесь $\dot{\pi}_r$ ($r = g + 1, g + 2, \ldots, N$) – некоторые величины (квазискорости в соответствующей системе уравнений Аппеля). Соотношения второй группы определяют функции $f_{ri}(q)$ ($r = (g + 1, \ldots, N)$), на которые наложено следующее нестеснительное условие [5, 6]:

$$\operatorname{rank}\|f_{ri}\|_{r=1,N}^{i=1,N} = N \tag{6.14}$$

3°. Пример конкретного выбора функций $f_{rj}(q)$ дан в разд. 7. Функции $b_{ir} = b_{ir}(q)$ в системе (6.10) могут быть связаны с функциями $f_{ri}(q)$ соотношением

$$BF = E, \quad B = \|b_{ij}\|_{j=1,N}^{i=1,N}, \quad F = \|f_{ij}\|_{j=1,N}^{i=1,N}, \quad \operatorname{rank}F = N \tag{6.15}$$

E – единичная матрица.

Лемма 2 вытекает из следующего утверждения: существуют такие функции $q^* = q^*(t)$ и $m^{f0} = m^{f0}(t)$, что $q^*(t)$, $0 \le t \le \tau < \infty$ является решением системы (6.10) при управлении $m = m^{f0}(t)$, причем

$$\left|m_i^{f0}(t)\right| \le H_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad 0 \le t \le \tau \tag{6.16}$$

$$q^*(0) = q^{f0}, \quad \dot{q}^*(0) = 0, \quad q^*(\tau) = 0, \quad \dot{q}^*(\tau) = 0 \tag{6.17}$$

где q^{f0} – произвольный заданный вектор.

Доказательство утверждения. Некоторая функция $q^* = q^*(t)$, $0 \le t \le \tau$ будет решением системы (6.10) при некотором управлении $m^{f0} = m^{f0}(t)$, если справедливы соотношения вида

$$\sum_{i=1}^N L_i|_{q = q^*(t)} b_{ir}(q^*) \equiv \sum_{i=1}^N m_i^{f0}(t) b_{ir}(q^*), \quad r = g+1, \ldots, N$$

и неравенства (6.16). Эти соотношения и неравенства справедливы, если справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^N |L_l||_{q = q^*(t)} |b_{ir}(q^*)| \le \sum_{i=1}^N H_i^0 |b_{ir}(q^*)|, \quad 0 \le t \le \tau$$

или неравенства

$$|L_i||_{q = q^*(t)} \le H_i^0, \quad 0 \le t \le \tau$$

которые запишем в развернутой форме

$$\left|\sum_{j=1}^N a_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j,p=1}^N \left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_p} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jp}}{\partial q_i}\right]\dot{q}_p\dot{q}_j\right|\Bigg|_{q = q^*(t)} \le H_i^0, \quad 0 \le t \le \tau \tag{6.18}$$

Покажем, что неравенства (6.18) – следствие свойства достижимости для связей, которое предполагается справедливым в теореме 3.

Действительно, согласно свойству достижимости существует некоторая функция $q^1 = q^1(t)$, которая удовлетворяет связям (1.2) при $0 \le t \le \tau^1$. Функция $q^1 = q^1(t)$ удовлетворяет также заданным начальным условиям (6.17) вида

$$q^1(0) = q^{f0}, \quad q^1(\tau^1) = 0$$

причем функции $\ddot{q}_i^1(t)$ непрерывны.

Из свойства непрерывности функции $\ddot{q}_i^1(t)$ в интервале $0 \le t \le \tau^1$ следуют оценки

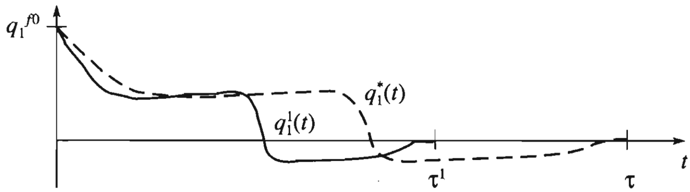
$$\begin{gathered}\left|q_i^1(t)\right| \le D^0, \quad \left|\dot{q}_i^1(t)\right| \le D^1, \quad \left|\ddot{q}_i^1(t)\right| \le D^2, \\ i = 1, 2, \ldots, N, \quad 0 \le t \le \tau^1; \quad D^p = \text{const} \ge 0\end{gathered} \tag{6.19}$$

Учтем далее, что функции $a_{ik}(q)$ непрерывны вместе с производными (согласно предположениям теоремы 3). Поэтому в области $|q_j^1| \le D^0$ существуют оценки

$$\begin{gathered}\left|a_{ij}(q^1)\right| \le d, \quad \left|\partial a_{ij}(q^1)/\partial q_p\right| \le d, \\ i, j, p = 1, 2, \ldots, N, \quad d = \text{const} \ge 0\end{gathered} \tag{6.20}$$

В качестве искомой функции $q^* = q^*(t)$ в неравенствах (6.18) рассмотрим функцию (фиг. 2)

$$q^*(t) = q^1(\gamma t), \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad 0 \le t \le \tau, \quad \tau = \tau^1/\gamma \tag{6.21}$$



Фиг. 2

По построению функция $q^*(t)$, так же как и $q^1 = q^1(t)$, изменяется в области (6.19) вида $|q_j^*(t)| \le D^0$. Поэтому для $q^* = q^*(t)$ справедливы оценки вида (6.20). Тогда неравенства (6.18) следуют из неравенств вида

$$\sum_{j=1}^{N} d|\ddot{q}_j^*(t)| + \sum_{j,p=1}^{N}\left[d+\frac{1}{2}d\right]|\dot{q}_p^*(t)||\dot{q}_j^*(t)| \le H_i^0, \quad 0 \le t \le \tau \tag{6.22}$$

Для производных $\dot{q}_j^*(t)$ в (6.22) справедливы выражения

$$\dot{q}_j^*(t) = \gamma\frac{d}{d\theta}(q_j^1(\theta)), \quad |\dot{q}_j^*(t)| \le \gamma D^1, \quad 0 \le t \le \tau \tag{6.23}$$

(учтены неравенства (6.19)). Аналогично

$$|\ddot{q}_j^*(t)| \le \gamma^2 D^2, \quad 0 \le t \le \tau \tag{6.24}$$

При учете соотношений (6.23), (6.24) система неравенств (6.22) следует из системы

$$\sum_{j=1}^{m} d\gamma^2 D^2 + \sum_{j,p=1}^{m}\left[d+\frac{1}{2}d\right](\gamma D^1)^2 \le H_i^0$$

Эти неравенства справедливы, если число $\gamma > 0$ выбрать достаточно малым. Следовательно, функция $q^*(t)$ удовлетворяет системе неравенств (6.18). Иначе говоря, $q^*(t)$ – движение системы (6.10) (существует соответствующее управление из класса u).

Заметим, наконец, что функция $q^*(t)$ в (6.21), как и $q^1(t)$, удовлетворяет начальным условиям (6.17), поскольку

$$q^*(0) = q^1(0), \quad q^*(\tau) = q^1(\gamma\tau) = q^1(\tau^1) = 0$$

Кроме того, функция $q^*(t)$ – решение подсистемы связей (1.2) системы (6.10), т.е.

$$z_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} f_{si}(q^*(t))\frac{d}{dt}(q_i^*(t)) \equiv 0, \quad 0 \le t \le \tau \tag{6.25}$$

Тождества (6.25) устанавливаются из соотношений

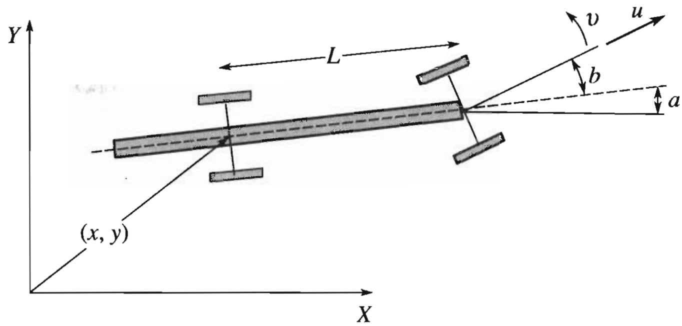
$$z_s\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) = \sum_{i=1}^{N} f_{si}(q^1(\theta))\gamma\frac{d}{d\theta}(q_i^1(\theta)), \quad \theta = \gamma t \tag{6.26}$$

Именно, из равенств (6.26) следует

$$z_s(\theta/\gamma) = 0, \quad 0 \le \theta \le \tau^1$$

т.е. следуют равенства (6.25). Отсюда вытекает утверждение.

7. Пример управляемой неголономной системы. Для демонстрации полезности приведенных выше формальных утверждений с прикладной точки зрения рассмат-



Фиг. 3

ривается пример механической системы (фиг. 3). Устанавливается, что она является управляемой.

Система на фиг. 3 представляет собой простейшую модель колесного средства передвижения (типа автомобиля). Она содержит корпус и задний мост, а также управляемый ведущий передний мост. Инерционные свойства системы определяются массой m и моментом инерции J корпуса и заднего моста, а также моментом инерции I переднего моста. Положение переднего моста характеризуется углом b и определяется моментом v. Передние колеса являются ведущими – к переднему мосту приложена сила u. Величины u и v – управления.

Уравнения движения этой механической системы запишем в форме уравнений Лагранжа первого рода

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= u\cos(a+b) + A\sin a + B\cos a \operatorname{tg} b \\ m\ddot{y} &= u\sin(a+b) - A\cos a + B\sin a \operatorname{tg} b \\ J\ddot{a} &= Lu\sin b - BL, \quad I\ddot{b} = v \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$f \overset{\text{def}}{=} \dot{x}\sin a - \dot{y}\cos a = 0, \quad F \overset{\text{def}}{=} \dot{x}\cos a \operatorname{tg} b + \dot{y}\sin a \operatorname{tg} b - L\dot{a} = 0 \tag{7.2}$$

Предполагается, что система содержит две связи (7.2). Первое соотношение (7.2) отражает предположение о том, что задние колеса не проскальзывают в направлении вдоль осей колес, второе – аналогичное предположение для передних колес. A и B – множители Лагранжа. Для упрощения анализа здесь предполагается, что передний мост и корпус слабо влияют друг на друга (масса и момент инерции переднего моста малы). Предполагается также, что центр масс корпуса находится в точке (x, y), J – момент инерции корпуса относительно этой точки.

Для подсистемы связей (7.2) системы (7.1), (7.2) справедлив аналог указанного выше свойства достижимости.

Теорема А. Для произвольных точек (x^f, y^f, a^f) и (x^e, y^e, a^e) области $(x, y, a\}$ пространства состояний $\{x, y, a, b\}$ подсистемы связей (7.2) существует некоторая траектория $\{x^*(t), \ldots, b^*(t)\}$, а также конечный момент времени τ, такие, что

$$x^*(0) = x^f, \ldots, a^*(0) = a^f, \quad x^*(\tau) = x^e, \ldots, a^*(\tau) = a^e \tag{7.3}$$

$$|\ddot{x}^*(t)| \le \alpha, \ldots, |\ddot{b}^*(t)| \le \alpha, \quad |b^*(t)| \le \beta, \quad 0 \le t \le \tau \tag{7.4}$$

где $\alpha > 0$, $0 < \beta < \pi/2$ произвольные, заранее заданные числа.

Иначе говоря, аналог свойства достижимости здесь удается обосновать, а не предполагать, как это было выше.

Справедлив также следующий аналог теоремы 1.

Теорема Б. Пусть заданы произвольные постоянные H_i, удовлетворяющие условию

$$H_1 > 0, \quad H_2 > 0 \tag{7.5}$$

Тогда система (7.1), (7.2) является управляемой в области $\{x, y, a, \dot{x}, \dot{y}, \dot{a}\}$ ее фазового пространства $\{x, y, a, b, \dot{x}, \dot{y}, \dot{a}, \dot{b}\}$ в классе допустимых управлений вида

$$|u(t)| \le H_1, \quad |v(t)| \le H_2 \tag{7.6}$$

Замечание. В сформулированных теоремах А и Б рассматривается не полное фазовое пространство системы (7.1), (7.2), а только его часть, куда не входит переменная b. Это связано со следующими обстоятельствами. В задаче управления колесной системой (фиг. 3) положение b рулевой колонки по существу играет роль управления. Изменять переменную b достаточно только в ограниченном интервале, например, в области $|b| < \pi/2$. Поэтому с прикладной точки зрения исследовать управляемость системы (7.1), (7.2) во всем фазовом пространстве системы не имеет смысла. Заметим также, что для системы (7.1), (7.2) условия теоремы 1 не выполнены. В частности, уравнения связей (7.2) не являются непрерывными, например, при $b = \pi/2$. В этом состоит формальная причина, которая определила формулировку теорем А и Б.

Доказательство теоремы А. В теореме А речь идет об аналоге свойства достижимости для системы связей (7.2). Это свойство по существу сродни свойству управляемости для управляемых систем. Именно, систему (7.2) запишем в форме (6.13) вида

$$\dot{x} = \dot{\pi}\cos a, \quad \dot{y} = \dot{\pi}\sin a, \quad \dot{a} = \dot{\pi}\,\mathrm{tg}\, b/L \tag{7.7}$$

В системе (7.7) величины $\dot{\pi}$ и b формально будем рассматривать как управляющие параметры (управления). Если система (7.7) может быть переведена из точки $s^f = (x^f, y^f, a^f)$ в точку $s^e = (x^e, y^e, a^e)$ за счет некоторых управлений $\dot{\pi}$ и b, то точка s^e системы (7.2) будет достижима из точки s^f.

Лемма А. Система (7.7) является управляемой в ее пространстве состояний $\{x, y, a\}$ в классе допустимых управлений $\dot{\pi}(t)$ и $b(t)$ вида

$$|\dot{\pi}| \le \gamma_1, \quad |\ddot{\pi}| \le \gamma_2, \quad |b| \le \beta_1, \quad |\dot{b}| \le \beta_2, \quad |\ddot{b}| \le \beta_3 \tag{7.8}$$

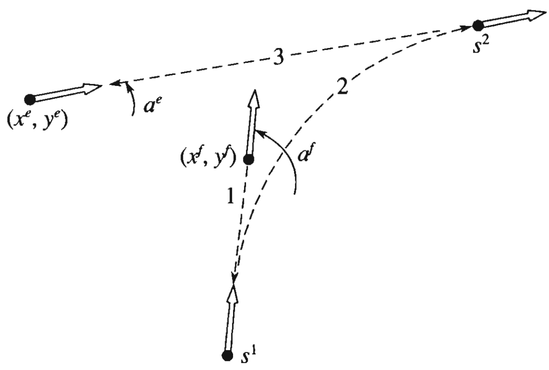
где γ_p, β_p – произвольные заданные постоянные, удовлетворяющие условию

$$\gamma_p > 0, \quad \beta_p > 0, \quad \beta_1 < \pi/2 \tag{7.9}$$

Доказательство леммы А приведено ниже.

Очевидно, существуют такие числа γ_p, β_p в неравенствах (7.9), что на движении системы (7.7) будут справедливы неравенства (10.8). Поэтому из леммы А следует, что аналог свойства достижимости будет справедлив для системы (7.2), что утверждается в теореме А.

Введение класса управлений (7.8) обусловлено использованием свойства управляемости системы (7.7) для доказательства теоремы А. Именно, свойства управлений $\dot{\pi}(t)$ и $b(t)$, найденных в лемме А, должны учитываться далее в анализе исходной системы (7.1), (7.2). В частности, функции $\dot{\pi}(t)$ и $b(t)$ должны удовлетворять этим уравнениям, а значит, их производные $\ddot{\pi}$ и $\ddot{b}$ должны быть ограничены. Здесь принима-



Фиг. 4

ются во внимание также ограничения (7.6), налагаемые на исходные управления u и v. Поэтому ограниченными предполагаются величины $\dot{\pi}$ и b в соотношениях (7.8).

Доказательство леммы А. Движение системы (7.7) из точки s^f в точку s^e состоит из трех основных этапов: 1) система из исходной точки s^f перемещается по прямой 1 в некоторую точку s^1, 2) система по существу разворачивается до заданного угла a^e и попадает в точку s^2, 3) система по прямой 3 перемещается в конечную точку s^e.

Пример траектории движения системы из исходной точки $s^f = (x^f, y^f, a^f)$ в заданную точку $s^e = (x^e, y^e, a^e)$ показан на фиг. 4.

Утверждение A_1. Как бы ни располагались точки s^f, s^1 на прямой 1, всегда существуют допустимые управления $\dot{\pi}_1(t)$, $b_1(t)$, которые переводят систему (7.7) из s^f в s^1 за некоторое конечное время t_1.

Аналогичное утверждение справедливо и для этапа перемещения системы из точки s^2 в точку s^e (фиг. 4). Поэтому цель второго этапа перемещения системы (7.7) по кривой *2* состоит по существу в том, чтобы перевести систему из точки s^1 в какую-нибудь точку s^2 на прямой *3*.

Утверждение A_2. Каковы бы ни были прямые *1* и *3*, на них всегда существуют точки s^1 и s^2, а также существуют допустимые управления $b_2(t)$, $\dot{\pi}_2(t)$, которые переводят систему (7.7) из s^1 в s^2 за некоторое конечное время t_2.

Таким образом, для прямых *1* и *3* сначала строятся точки s^1 и s^2. Только затем система (7.7) переводится из s^f в s^1, далее – в s^2, и, наконец, в s^e. Следовательно, утверждение леммы А о возможности перемещения системы из s^f в s^e следует из приведенных утверждений A_1, A_2.

Доказательства утверждений A_1, A_2 приводятся в Приложении.

Схема доказательства теоремы Б. Доказательство следует приведенному выше доказательству теоремы 3. Устанавливается, что систему (7.1), (7.2) можно полностью затормозить и перевести на координатную плоскость. Кроме того, систему (7.1), (7.2) можно перемещать из одной точки координатной плоскости в другую (с учетом утверждения теоремы А).

Для остановки система (7.1), (7.2) записывается в форме системы уравнений Аппеля с квазискоростями $\dot{\pi} = \dot{x}\cos a + \dot{y}\sin a$ и $\dot{b}$ [5, 6]. Эта система содержит уравнение (7.7), а также уравнения

$$\ddot{\pi}\left\{m + \frac{J\,\mathrm{tg}^2 b}{L^2}\right\} = -J\dot{\pi}\dot{b}\frac{\mathrm{tg}\,b}{L^2\cos^2 b} + \frac{u}{\cos b}, \quad I\ddot{b} = v \tag{7.10}$$

За счет управления типа

$$v = -H_2 \operatorname{sign}(\dot{b} + e\sqrt{|b|}\operatorname{sign} b), \quad e = \text{const} > 0$$

система (7.7), (7.10) за конечное время выводится на режим движения вида $b(t) = 0$ [10]. В этом случае первое уравнение системы (7.10) принимает вид $\ddot{\pi}\{m\} = u$. За счет управления $u = -H_1 \operatorname{sign}(\dot{\pi})$ система (7.7), (7.10) полностью останавливается, т.е. обеспечивается условие $\dot{\pi} = 0$ (также за конечное время).

Заметим, что описанная остановка системы осуществляется не так, как в общем случае (теорема 3). Дело в том, что уравнения (7.1), (7.2) не являются частным случаем приведенных выше систем общего вида (5.1). Именно, в системе имеется существенный дефицит управлений (в первые три уравнения (7.1), (7.2) входит только одно управление u). Кроме того, управление u входит в уравнения с коэффициентами, которые могут обращаться в нуль.

Для перемещения в координатной плоскости система (7.1), (7.2) записывается в форме уравнений Маджи вида

$$m(\ddot{x}\cos a + \ddot{y}\sin a) + J\ddot{a}\operatorname{tg} b/L = u/\cos b, \quad I\ddot{b} = v, \quad f = 0, \quad F = 0 \tag{7.11}$$

Для построения уравнений (7.11) можно учесть аналогичное преобразование в доказательстве леммы 2. В связи с этим заметим, что уравнения связей (7.1) могут быть записаны в расширенной форме (6.13) вида

$$f = 0, \quad F = 0, \quad \dot{x}\cos a + \dot{y}\sin a = \dot{\pi} \tag{7.12}$$

Заметим также, что на основе уравнений (7.12), в частности, строятся уравнения (7.10), (7.11). Заметим наконец, что в систему (7.11) переходит система (7.1), (7.2) при исключении множителей A и B.

Далее для системы (7.11) устанавливается существование такого движения $\{x^*(t), y^*(t), a^*(t), b^*(t)\}$ из точки (x^f, y^f, a^f) в точку (x^e, y^e, a^e), что соответствующие управления допустимы:

$$|u^*(t)| \le H_1, \quad |v^*(t)| \le H_2$$

Здесь учитывается утверждение теоремы А. В частности, соответствующие числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ в неравенствах (7.4) определяются по заданным числам $H_i > 0$ в условиях (7.5) теоремы Б.

8. Приложение. *Доказательство утверждения A_1.* Движение системы (7.7) будет происходить по прямой из заданной точки s^f в заданную точку s^1, если использовать управления вида $\dot{\pi}_1(t)$, $b_1(t)$, показанные на фиг. 5.

Действительно, в этом случае из уравнений (7.7) следуют соотношения

$$a(t) = \text{const} \tag{8.1}$$

$$x(t) = x(0) + \cos a \Pi(t), \quad y(t) = y(0) + \sin a \Pi(t), \quad \Pi(t) = \int_0^t \dot{\pi}(y)dy \tag{8.2}$$

Для точек s^f и s^1 (фиг. 4) соотношения (8.2) принимают вид

$$x^f = x^1 + \cos a^f \Pi_1(t_1), \quad y^f = y^1 + \sin a^f \Pi_1(t_1),$$
$$\Pi_1(t) = \int_0^t \dot{\pi}_1(y)dy; \quad t_1 = T + 2\tau \tag{8.3}$$

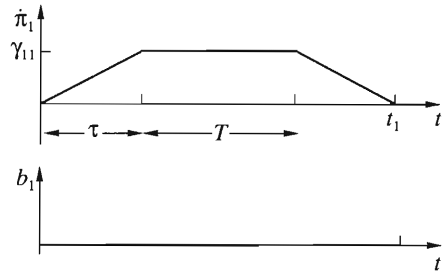
Для существования величины $\Pi_1(T + 2\tau)$, удовлетворяющей системе (8.3), будем полагать, что

$$\cos a^f \neq 0, \quad \sin a^f \neq 0$$

Это условие всегда можно обеспечить за счет поворота системы координат.

Для управления $\dot\pi_1$ на фиг. 5 справедливо соотношение

$$\Pi_1(T+2\tau) = \gamma_{11}(\tau+T), \quad \gamma_{11} = \text{const} \geq 0$$



Фиг. 5

Поэтому соотношения (8.3) примут вид

$$x^f = x^1 + \cos a^f \gamma_{11}(\tau+T), \quad y^f = y^1 + \sin a^f \gamma_{11}(\tau+T) \tag{8.4}$$

Потребуем, чтобы числа γ_{11}, τ и T дополнительно удовлетворяли условиям

$$|\gamma_{11}| \leq \gamma_1, \quad |\gamma_{11}/\tau| \leq \gamma_2 \tag{8.5}$$

В этом случае управление $\dot\pi_1$ будет удовлетворять условиям (7.8) допустимости управлений (управление $b_1(t) = 0$ этим условиям удовлетворяет). Очевидно, положительные числа γ_{11}, τ и T, удовлетворяющие системе (8.5), существуют. Это означает, что допустимые управления $\dot\pi_1(t)$, $b_1(t)$ также существуют.

В приведенных выше рассуждениях подразумевалось, что

$$b_1(0) = 0, \quad \dot\pi_1(0) = 0 \tag{8.6}$$

Иначе говоря, предполагалось, что $\dot\pi^f = 0$, $b^f = 0$, где $\dot\pi^f$, b^f – начальные значения управлений в начальной точке $s^f = (x^f, y^f, a^f)$. Заметим, что указанные условия могут быть реализованы в исходной системе (7.1), (7.2). Действительно, согласно схеме доказательства теоремы Б система (7.1), (7.2) полностью останавливается, только затем осуществляется этап перемещения в координатной плоскости (теорема А и лемма A_1). Таким образом, условие $\dot\pi^f = 0$ будет выполнено. Условие $b^f = 0$ может быть также реализовано. Именно, переменная b удовлетворяет четвертому уравнению системы (7.1), (7.2), которое не зависит от других переменных системы. Поэтому положение $b = 0$ всегда может быть обеспечено. При этом состояние системы (7.1), (7.2) изменится, что, однако несущественно для доказательства настоящего утверждения.

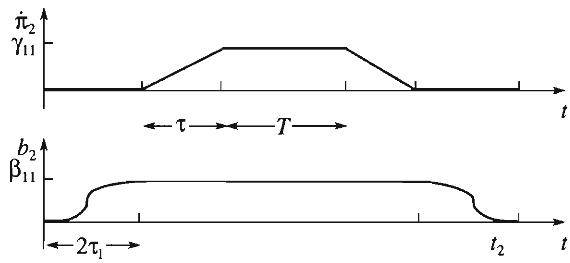
Доказательство утверждения A_2. Пусть заданы две непараллельные произвольные прямые *1* и *3*. Если исходные прямые *1* и *3* параллельны, то система (7.7) предварительно разворачивается (соответствующие управления подобны управлениям $b_2(t)$, $\dot\pi_2(t)$, см. ниже). Покажем, что на прямых существуют точки s^1 и s^2 (фиг. 4), а также существуют допустимые управления $b_2(t)$, $\dot\pi_2(t)$, которые переводят систему (7.7) из точки s^1 в точку s^2 за некоторое конечное время t_2.

Рассмотрим разворот системы (7.7) на заданный угол

$$a^f \to a^e \tag{8.7}$$

где a^f – значение угла a в исходной точке s^1, a^e – в конечной точке s^2 (фиг. 4). Согласно последнему уравнению системы (7.7) ее угловое положение изменяется следующим образом:

$$a(t) = a(0) + \frac{1}{L}\int_0^t \dot\pi \operatorname{tg} b dy \tag{8.8}$$



Фиг. 6

Для a^f, a^e это соотношение примет форму

$$a^e = a^f + \frac{1}{L}\int_0^{t_2} \dot{\pi}_2(t)\operatorname{tg}(b_2(t))dt \tag{8.9}$$

где t_2 – время осуществления маневра (8.7).

В качестве управлений $\dot{\pi}_2(t)$, $b_2(t)$, реализующих цель (8.7), используются управления, представленные на фиг. 6. Здесь управление b_2 меняется только при $\dot{\pi}_2 = 0$, а $\dot{\pi}_2$ меняется только при $b_2(t) = \text{const}$. Это позволяет упростить приводимые ниже выражения.

При учете указанных особенностей соотношение (8.9) запишем в формах

$$a^e = a^f + \frac{\operatorname{tg}\beta_{11}}{L}\int_0^{t_2} \dot{\pi}_2 dt, \quad a^e = a^f + \frac{\operatorname{tg}\beta_{11}}{L}(\gamma_{11}(\tau + T)) \tag{8.10}$$

Заметим, что согласно фиг. 6 предполагается, что $\dot{\pi}_2(0) = 0$, $b_2(0) = 0$. Иначе говоря, в точке s^1 управления $\dot{\pi}_1$, b_1 принимают нулевые значения. Это допускается, поскольку согласно утверждению A_1 справедливы равенства $\dot{\pi}_1(t_1) = 0$, $b_1(t_1) = 0$ и аналогичные равенства для производных.

Покажем, что управления $\dot{\pi}_2(t)$, $b_2(t)$ будут удовлетворять условиям (7.8) допустимости управлений. Для этого управление $b_2(t)$ (при $t \in [0, 2\tau_1]$) будем искать в форме функции, производная которой имеет вид

$$\ddot{b}_2(t) = \beta_{31}, \quad t \in [0, \tau_1], \quad \ddot{b}_2(t) = -\beta_{31}, \quad t \in [\tau_1, 2\tau_1], \quad \beta_{31} = \text{const} \geq 0$$

В этом случае

$$\dot{b}_2(t) = \beta_{31}t, \quad t \in [0, \tau_1], \quad \dot{b}_2(t) = \beta_{31}(2\tau_1 - t), \quad t \in [\tau_1, 2\tau_1]$$

$$b_2(t) = \beta_{31}t^2/2, \quad t \in [0, \tau_1], \quad b_2(t) = \beta_{31}(-\tau_1^2 + 2\tau_1 t - t^2/2), \quad t \in [\tau_1, 2\tau_1]$$

Отсюда следует

$$b_2(2\tau_1) = \beta_{31}\tau_1^2$$

Поэтому последнее выражение (8.10) примет окончательную форму

$$a^e = a^f + \frac{\operatorname{tg}(\beta_{31}\tau_1^2)}{L}(\gamma_{11}(\tau + T)) \tag{8.11}$$

Потребуем, чтобы числа β_{31}, τ_1, γ_{11}, τ и T дополнительно удовлетворяли условиям

$$|\gamma_{11}| = \gamma_1, \quad |\gamma_{11}/\tau| \leq \gamma_2, \quad |\beta_{31}\tau_1^2| \leq \beta_1, \quad |\beta_{31}\tau_1| \leq \beta_2, \quad |\beta_{31}| \leq \beta_3 \tag{8.12}$$

В этом случае управлений $\dot{\pi}_2(t)$, $b_2(t)$ будут удовлетворять условиям (7.8) допустимости управлений. Очевидно, существуют положительные числа β_{31}, τ_1, γ_{11}, τ и $T \geq 0$, которые удовлетворяют системе (8.11), (8.12). Например, положительные числа β_{31}, τ_1 могут быть выбраны только из условий (8.12). При этом положительные числа γ_{11}, τ и $T \geq 0$ обеспечат выполнение остальных условий.

Это означает, что существуют допустимые управления $\dot{\pi}_2(t)$, $b_2(t)$, при которых система (7.7) разворачивается на угол a^e согласно соотношению (8.7). Рассмотренные управления $\dot{\pi}_2(t)$, $b_2(t)$ по существу решают исходную задачу перевода системы (7.7) из точки s^1 в точку s^2 за некоторое конечное время (фиг. 4). Действительно, через

$$\Delta x = x^1 - x^2, \quad \Delta y = y^1 - y^2$$

обозначим изменение координат системы (7.7) за время t_2 ее разворота (8.9). Тогда вектор

$$e = (\Delta x, \Delta y)$$

определит координаты x^1, y^1 искомого положения точки $s^1 = (x^1, y^1, a^f)$ на прямой 1 (фиг. 4). Утверждение A_2 доказано.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (040100391а) и Комплексной программы РАН (19-1.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пятницкий Е.С.* Критерии полной управляемости классов механических систем с ограниченными управлениями // ПММ. Т. 66. 1996. Вып. 5. С. 707–718.
2. *Пятницкий Е.С.* Критерий полной робастной управляемости механических систем с ограниченными управлениями // Докл. РАН. 1997. Т. 352. № 5. С. 620–623.
3. *Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Управляемость механических систем в классе управлений, ограниченных вместе с производной // Тез. докл. Междунар. конф. по проблемам управления. Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2003 г. Т.1. С. 32–33.
4. *Матюхин В.И.* Управляемость неголономных механических систем в классе ограниченных управлений. // Тез. докл. Междунар. конф. по проблемам управления. Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2003 г. Т. 1. С. 30–31.
5. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
7. *Аппель П.* Теоретическая механика. М: Физматгиз, 1960. Т. 1. 516 с., Т. 2. 624 с.
8. *Мухарлямов Р.Г.* Об уравнениях движения механических систем // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 12. С. 2048–2056.
9. *Пятницкий Е.С.* Динамика неголономных систем // Сб. научно-методических статей. Теоретическая механика. М.: Изд-во МГУ. 2000. Вып. 23. С. 72–86.
10. *Матюхин В.И.* Стабилизация движения механических систем с неголономными связями // ПММ. Т. 63. Вып. 5. 1999. С. 725–735.
11. *Матюхин В.И.* О реализации неголономных механических связей // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 6. С. 3–11.
12. *Matyukhin V.I.* Force/motion control of manipulator with incomplete information. Proc. 4th ECPD Intern. Conf. on Advanced Robotics, Intelligent Automation and Active Systems. Moscow, Russia, 1998. P. 72–77.
13. *Матюхин В.И.* Универсальные законы управления механическими системами. М.: МАКС пресс, 2001. 249 с.
14. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
15. *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.

Москва
e-mail: matyuhin@ipu.rssi.ru

Поступила в редакцию
6.V.2003