УДК 62–50

© 2004 г. А. А. Чикрий, Г. Ц. Чикрий, С. Д. Эйдельман

ЛИНЕЙНЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ ИГРЫ СБЛИЖЕНИЯ

Излагается общий метод решения игровых задач сближения для динамических систем с вольтерровской эволюцией. Этот метод базируется на методе разрешающих функций [1], используется аппарат теории многозначных отображений. Предлагаемая схема охватывает широкий круг функционально-дифференциальных систем, в частности, интегральных, интегро-дифференциальных и дифференциально-разностных систем уравнений, задающих динамику конфликтно-управляемого процесса. Более подробно изучаются игровые задачи для систем с дробными по Риману – Лиувиллю производными и регуляризованными производными Джрбашяна – Нерсесяна (“фрактальные" игры). С использованием асимптотических представлений обобщенных функций Миттаг-Леффлера в рамках схемы метода устанавливаются достаточные условия разрешимости игровых задач.

В теории дифференциальных игр существует ряд фундаментальных методов [2–9], позволяющих установить условия разрешимости задач сближения и уклонения в том или ином классе стратегий. Среди них важное место занимают методы, развитые Н.Н. Красовским и его последователями. В зависимости от взаимной информированности игроков о состоянии процесса, а также о выборе управлений противником, используется различный математический аппарат. Метод разрешающих функций и его различные модификации [1, 10] идейно близки к первому прямому методу Л.С. Понтрягина [3, 6]. Он активно разрабатывается в последнее время и применяется для решения весьма сложных игровых задач, таких как, например, задачи группового и поочередного преследования, задачи с фазовыми ограничениями [1, 7]. В частности, метод дает также обоснование классического правила параллельного сближения для достаточно широкого круга задач [11]. Его главные достоинства – универсальность и возможность получить эффективно проверяемые достаточные условия окончания игры.

1. Постановка задачи, вспомогательные результаты и схема метода. Обозначим через R^n вещественное n-мерное евклидово пространство, а через $R_+ = \{t: t \geq 0\}$ положительную полуось и рассмотрим процесс, описываемый уравнением

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t, \tau)\varphi(u(\tau), \upsilon(\tau))d\tau, \quad t \geq 0 \tag{1.1}$$

Функция $g(t)$, g: $R_+ \to R^n$ измерима (по Лебегу) и ограничена при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, измерима по t, а также суммируема по τ при любом $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u, \upsilon)$, φ: $U \times V \to R^n$, непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V, т.е. $U \in K(R^m)$, $V \in K(R^l)$. Управляющие воздействия игроков $u(\tau)$, u: $R_+ \to U$, и $\upsilon(\tau)$, υ: $R_+ \to V$, – измеримые функции.

Кроме процесса (1.1) задано цилиндрическое терминальное множество

$$M^* = M_0 + M \tag{1.2}$$

где M_0 – линейное подпространство из R^n, а $M \in K(L)$, где L – ортогональное дополнение к M_0 в R^n.

Цели первого (u) и второго (v) игроков противоположны. Первый стремится привести траекторию процесса (1.1) на множество (1.2) за кратчайшее время, второй – максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^*.

Примем сторону первого игрока и будем ориентироваться на выбор противником в качестве управления произвольной измеримой функции со значениями из U. В свою очередь, будем полагать, что если игра (1.1), (1.2) происходит на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока – измеримая функция вида

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U \tag{1.3}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s)\colon 0 \le s \le t\}$ – предыстория управления второго игрока до момента t.

Цель данной работы – установить для процесса (1.1) и (1.2) при условии информированности типа (1.3) достаточные условия разрешимости задачи в пользу первого игрока за некоторое гарантированное время, оценить это время, а также найти управления первого игрока, позволяющие реализовать этот результат.

Перейдем к описанию метода решения задачи.

Обозначим через π ортопроектор, действующий из R^n в L. Положив

$$\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v)\colon u \in U\}$$

рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v), \quad W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множествах соответственно $\Delta \times V$ и Δ, где

$$\Delta = \{(t, \tau)\colon 0 \le \tau \le t < \infty\}$$

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t, \tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

В силу непрерывности функции $\varphi(u, v)$ и условия $U \in K(R^m)$ отображение $\varphi(U, v)$ непрерывно по v в метрике Хаусдорфа. Учитывая предположения о матричной функции $\Omega(t, \tau)$ можно заключить [12], что многозначные отображения $W(t, \tau, v)$ и $W(t, \tau)$ измеримы по τ.

Обозначим через $P(R^n)$ совокупность непустых замкнутых множеств пространства R^n. Тогда, очевидно,

$$W(t, \tau, v)\colon \Delta \times V \to P(R^n), \quad W(t, \tau)\colon \Delta \to P(R^n)$$

В этом случае говорят, что многозначные отображения $W(t, \tau, v)$ и $W(t, \tau)$ являются нормальными по τ [12].

Из условия Понтрягина и результатов работ [1, 12] следует, что при любом $t \ge 0$ существует хотя бы один измеримый по τ селектор $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau)$. В силу предположений о параметрах процесса (1.1) такой селектор $\gamma(t, \tau)$ – суммируемая по τ, $\tau \in [0, t]$, функция при любом фиксированном $t \ge 0$. Обозначим

$$\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau$$

где $\gamma(t, \tau)$ – упомянутый выше селектор.

С помощью функции $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))$ определим функцию

$$\alpha(t, \tau, v) = \sup\{\alpha \ge 0\colon [W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \alpha[M - \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))] \ne \varnothing\} \tag{1.4}$$

и назовем ее разрешающей [1]. В дальнейшем эта функция будет играть ключевую роль.

В силу предположений о параметрах процесса (1.1) и известных результатов [1] функция (1.4) измерима по τ и полунепрерывна сверху по υ.

В дальнейшем будем интересоваться зависимостью функции $\alpha(t, \tau, \upsilon)$ от совокупности переменных (τ, υ). Поэтому зафиксируем t и положим $\alpha(\tau, \upsilon) = \alpha(t, \tau, \upsilon)$. Будем говорить, что функция α: $[0, T] \times V \to R_+$, суперпозиционно измерима, если для любой измеримой функции $\upsilon(\tau)$, υ: $[0, T] \to V$, суперпозиция $\alpha(\tau, \upsilon(\tau))$, α: $[0, T] \to R_+$, – измеримая функция от τ.

Достаточно общим предположением, обеспечивающим суперпозиционную измеримость функции $\alpha(\tau, \upsilon)$, служит предположение об $(L \times B)$-измеримости этой функции [13], т.е. об измеримости относительно σ-алгебры, являющейся произведением σ-алгебр $L[0, T]$ и $B(R^n)$. Эта σ-алгебра состоит из подмножеств множества $[0, T] \times R^n$, порождаемых множествами вида $X \times Y$, где X – измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[0, T]$, а Y – измеримое по Борелю подмножество из R^n.

Обозначим

$$W(T, \tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau) = H(\tau, \upsilon), \quad M - \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) = M_1$$

и введем многозначное отображение

$$\mathfrak{U}(\tau, \upsilon) = \{\alpha \in R_+ : H(\tau, \upsilon) \cap \alpha M_1 \neq \varnothing\} \tag{1.5}$$

Тогда

$$\alpha(\tau, \upsilon) = \sup\{\alpha \in R_+ : \alpha \in \mathfrak{U}(\tau, \upsilon)\}$$

Изучим свойства многозначных отображений вида (1.5).

Имеет место следующий общий результат, обобщающий известное утверждение [12].

Лемма 1. Пусть $X \in P(R^k)$, $F(\omega)$, F: $X \to P(R^k)$, $H(\omega)$, H: $X \to P(R^n)$, нормальные многозначные отображения, а $M(\omega, x)$, M: $X \times R^k \to P(R^n)$ – каратеодориево (измеримое по ω и непрерывное по x) отображение. Тогда отображение

$$\mathfrak{U}(\omega) = \{x \in F(\omega): H(\omega) \cap M(\omega, x) \neq \varnothing\}$$

является нормальным.

Положив в лемме 1 $\omega = (\tau, \upsilon)$, $x = \alpha$ и, соответственно, $F(\omega) = R_+$, а $M(\omega, x) = \alpha M_1$, получим, что отображение $\mathfrak{U}(\tau, \upsilon)$ будет $(L \times B)$-измеримым, так как отображение $H(\tau, \upsilon)$ $(L \times B)$-измеримо в силу измеримости по Лебегу по τ и непрерывности по υ.

Теперь покажем, что функция $\alpha(\tau, \upsilon)$ будет $(L \times B)$-измеримой. Действительно, так как

$$\alpha(\tau, \upsilon) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{U}(\tau, \upsilon)} \alpha = C(\mathfrak{U}(\tau, \upsilon); 1)$$

где $C(X; p)$ – опорная функция множества X в направлении p, то ее $(L \times B)$-измеримость вытекает из $(L \times B)$-измеримости многозначного отображения $\mathfrak{U}(\tau, \upsilon)$ [12].

Таким образом, функция $\alpha(\tau, \upsilon)$ является $(L \times B)$-измеримой, ограниченной снизу нулем и полунепрерывной сверху по υ. Можно показать, что $\inf\limits_{\upsilon \in V} \alpha(\tau, \upsilon)$ – измеримая функция.

Отметим следующее обстоятельство, вытекающее из выражения (4). Если для некоторого t имеет место включение $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \in M$, то $\alpha(t, \tau, \upsilon) = \infty$ при всех $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$.

Введем отображение

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \inf_{\upsilon \in V} \alpha(t, \tau, \upsilon) d\tau \geq 1 \right\} \tag{1.6}$$

Если при некотором t интеграл в соотношении (1.1) принимает значение $+\infty$, то неравенство выполнено автоматически. Если же неравенство в (1.6) не имеет места ни при каком t, то положим $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Таким образом, можно сформулировать основной результат.

Теорема 1. Пусть в игре (1.1), (1.2) выполнено условие Понтрягина и $M = \mathrm{co}M$, причем для некоторой измеримой почти везде ограниченной функции $g(t)$ и измеримого по τ селектора $\gamma(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, многозначного отображения $W(t, \tau)$ множество $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \varnothing$ и $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$, $T < +\infty$. Тогда траектория процесса (1.1) может быть приведена на терминальное множество в момент T с помощью управления вида (1.3).

Доказательство. Рассмотрим случай $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \bar{\in} M$. Пусть $\upsilon_T(\cdot)$ – произвольная измеримая функция со значениями из V. Аналогично описанному ранее подходу [1, 10] введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha(T, \tau, \upsilon(\tau))d\tau, \quad t \in [0, T]$$

Так как функция $\alpha(T, \tau, \upsilon)$ является $(L \times B)$-измеримой, она суперпозиционно измерима, т.е. функция $\alpha(T, \tau, \upsilon(\tau))$ измерима. С другой стороны, в силу предположений о параметрах процесса (1.2), (1.2) она ограничена при почти всех $\tau < T$, и следовательно, интегрируема на любом конечном интервале времени. Отсюда вытекает, что функция $h(t)$ непрерывна, не возрастает и $h(0) = 1$. Поэтому в силу построений существует такой момент времени $t_* = t(\upsilon(\cdot))$, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$.

Участки $[0, t_*)$ и $[t_*, T]$ будем называть в дальнейшем “активным" и "пассивным" соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau, \upsilon) = \{u \in U\colon \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, \upsilon) - \gamma(T, \tau) \in \alpha(T, \tau, \upsilon)[M - \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))]\} \quad (1.7)$$

Так как функция $\alpha(T, \tau, \upsilon)$ является $(L \times B)$-измеримой, $M \in K(R^n)$, а функция $\xi(T, g(T,)\ \gamma(T, \cdot))$ ограничена, то отображение $\alpha(T, \tau, \upsilon)[M - \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))]$ будет $(L \times B)$-измеримым. Кроме того, очевидно левая часть включения в (1.7) – $(L \times B)$-измеримая функция по (τ, υ), непрерывная по u. Отсюда в силу известного утверждения [12] вытекает, что отображение $U(\tau, \upsilon)$ является $(L \times B)$-измеримым. Следовательно, его селектор

$$u(\tau, \upsilon) = \operatorname{lex\,min} U(\tau, \upsilon) \quad (1.8)$$

является $(L \times B)$-измеримой функцией. Управление первого игрока на активном участке $[0, t_*)$ положим равным

$$u(\tau) = u(\tau, \upsilon(\tau)) \quad (1.9)$$

В силу $(L \times B)$-измеримости функция $u(\tau, \upsilon)$ суперпозиционно измерима, и следовательно, функция $u(\tau)$ измерима.

Рассмотрим “пассивный" интервал $[t_*, T]$. Положим в выражении (1.7) $\alpha(T, \tau, \upsilon) \equiv 0$ при $\tau \in [t_*, T]$, $\upsilon \in V$ и управление первого игрока выберем согласно предложенной выше процедуре, используя соотношения (1.7)–(1.9).

В случае $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$ управление первого игрока на интервале $[0, T]$ выберем из тех же соотношений, что и на “пассивном" участке, т.е. по схеме (1.7)–(1.9) с $\alpha(T, \tau, \upsilon) \equiv 0$, $\tau \in [0, T]$, $\upsilon \in V$.

Покажем, что при выборе управления первым игроком в виде (1.9) с учетом соотношений (1.7), (1.8) в каждом из случаев траектория процесса (1.1) в момент T будет приведена на множество M^* при любых управлениях второго игрока.

Из выражения (1.1) имеем

$$\pi z(T) = \pi g(T) + \int_0^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u(\tau), \upsilon(\tau))d\tau \tag{1.10}$$

Проанализируем сначала случай $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \bar{\in} M$. Для этого прибавим и вычтем из правой части равенства (1.10) вектор $\int_0^T \gamma(T, \tau)d\tau$. Используя описанный ранее закон выбора управления первым игроком, из равенства (1.10) получим включение

$$\pi z(T) \in \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))\left[1 - \int_0^{t_*}\alpha(T, \tau, \upsilon(\tau))d\tau\right] + \int_0^{t_*}\alpha(T, \tau, \upsilon(\tau))Md\tau \tag{1.11}$$

Так как M – выпуклый компакт, $\alpha(T, \tau, \upsilon(\tau))$ – неотрицательная функция для $\tau \in [0, t_*)$ и интеграл в квадратных скобках равен единице, то последний интеграл во включении (1.11) равен M, и следовательно, $\pi z(T) \in M$, или $z(T) \in M^*$.

Пусть $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$. Тогда при учете закона управления первого игрока из равенства (1.10) немедленно следует включение $\pi z(T) \in M$.

2. Системы с дробными производными. В этом разделе стандартным образом вводятся классические понятия дробного интеграла (ДИ) и дробной производной (ДП) (в смысле Римана–Лиувилля). Им соответствует уравнение с ДП, где вместо обычных данных Коши в начальный момент времени $t = 0$ следует задавать ДИ подходящего дробного порядка. Это связано с тем, что, вообще говоря, решение такого уравнения имеет особенность при $t = 0$ и только такие обобщенные начальные условия естественны в рассматриваемом случае. Однако по физическим соображениям желательно иметь обычную задачу Коши для уравнений с ДП. М.М. Джрбашян и А.Б. Нерсесян предложили уравнение с ДП, где вместо производных Римана – Лиувилля стоит их регуляризованное значение, а начальные данные – обычные данные Коши. (В дальнейшем введенное ими новое понятие ДП было названо ДП Джрбашяна–Нерсесяна.)

Для $\beta \in (0, 1)$ введем ДИ Римана – Лиувилля порядка β [14] от функции $z(t)$, $t \geq 0$, по формуле

$$(I_{0+}^{\beta}z)(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t \frac{z(s)}{(t-s)^{1-\beta}}ds$$

где $\Gamma(\beta)$ – гамма-функция Эйлера. Тогда ДП Римана – Лиувилля порядка β имеет вид

$$(D_{0+}^{\beta}z)(t) = \frac{d}{dt}(I_{0+}^{1-\beta})(t)$$

а регуляризованная ДП Джрбашяна – Нерсесяна порядка β [11, 15] имеет вид

$$(D^{(\beta)}z)(t) = (D_{0+}^{\beta}z)(t) - \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}z(+0)$$

С каждой из ДП свяжем игровую задачу. Итак, пусть эволюция конфликтно управляемого процесса в первой задаче описывается системой дифференциальных уравнений

$$D^{\beta}\hat{z} = A\hat{z} + \varphi(u, \upsilon), \quad \hat{z} \in R^n, \quad u \in U, \quad \upsilon \in V \tag{2.1}$$

с начальными условиями

$$I^{1-\beta}\hat{z}|_{t=0} = \hat{z}_0 \tag{2.2}$$

а во второй задаче – системой

$$D^{(\beta)}z = Az + \varphi(u, \upsilon), \quad z \in R^n, \quad u \in U, \quad \upsilon \in V \tag{2.3}$$

с начальными условиями

$$z|_{t=0} = z_0 \tag{2.4}$$

В обозначении ДП в соотношениях (2.1), (2.3) некоторые символы опущены для простоты записи.

Кроме динамики процессов (2.1), (2.3) задано терминальное множество вида (1.2), и цели игроков в каждом из случаев аналогичны описанной ранее общей ситуации. Отметим лишь, что в задачах (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) преследователь выбирает управление в виде измеримых функций $u(t) = u(\hat{z}_0, \upsilon_t(\cdot))$ и $u(t) = u(z_0, \upsilon_t(\cdot))$ соответственно со значениями из области U.

Перейдем к нахождению интегральных представлений функций $\hat{z}(t)$ и $z(t)$. Для этого предварительно определим обобщенную матричную функцию Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(B; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)}$$

для любого положительного ρ и комплексного μ, где B – произвольная квадратная матрица порядка n с комплекснозначными элементами. Матричная функция $E_\rho(B; \mu)$ – целая функция аргумента B.

Теорема 2. При выбранных управлениях игроков решение задачи (2.1), (2.2) определяется формулой

$$\hat{z}(t) = t^{\beta-1}E_{1/\beta}(At^\beta; \beta)\hat{z}_0 + z_2(t) \tag{2.5}$$

а решение задачи (2.3), (2.4) – формулой

$$z(t) = E_{1/\beta}(At^\beta; 1)z_0 + z_2(t) \tag{2.6}$$

Здесь

$$\begin{gathered} z_2(t) = \int_0^t \Omega_{11}(t-\tau)F(\tau)d\tau \\ \Omega_{11}(t-\tau) = (t-\tau)^{\beta-1}E_{1/\beta}(A(t-\tau)^\beta; \beta), \quad F(\tau) = \varphi(u(\tau), \upsilon(\tau)) \end{gathered} \tag{2.7}$$

Доказательство. Заметим, что $F(\tau)$ – измеримая, существенно ограниченная при $\tau > 0$ функция. Из этого следует, что интегралы в формулах (2.5), (2.6) абсолютно сходятся.

Доказательство состоит из двух частей. В первой части докажем, что первые слагаемые в формулах (2.5), (2.6) являются решениями однородных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям (2.2) и (2.4) соответственно. Во второй части покажем, что второе слагаемое в формулах (2.5), (2.6) – решение неоднородных уравнений (2.1), (2.3).

То, что функция $z_2(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям, непосредственно следует из ограниченности функций $E_{1/\beta}(A(t-\tau)^\beta; \beta)$ и $F(\tau)$ и того факта, что $\beta > 0$.

Обозначив

$$\hat{z}_1(t) = t^{\beta-1}E_{1/\beta}(At^{\beta};\,\beta)\hat{z}_0$$

переходим к вычислениям:

$$(D^{\beta}\hat{z}_1)(t) \equiv D^{\beta}[t^{\beta-1}E_{1/\beta}(At^{\beta};\,\beta)\hat{z}_0] = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\tau^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k\tau^{\beta k}}{\Gamma(\beta k+\beta)}d\tau\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta k A^k t^{\beta k-1}}{\Gamma(\beta k+1)}\hat{z}_0 \overset{k=k'+1}{=} At^{\beta-1}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{A^{k'}t^{\beta k'}}{\Gamma(\beta k'+\beta)}\hat{z}_0 = A\hat{z}_1(t)$$

Покажем теперь, что $\hat{z}_1(t)$ удовлетворяет начальным условиям. Имеем

$$(I^{1-\beta}\hat{z}_1)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t \frac{\hat{z}_1(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{\beta k}}{\Gamma(\beta k+1)}\hat{z}_0 \xrightarrow{t\to 0}\hat{z}_0$$

Переходим к рассмотрению функции

$$z_1(t) = E_{1/\beta}(At^{\beta};\,1)z_0 \equiv E_{1/\beta}(At^{\beta})z_0$$

где $E_{1/\beta}(At^{\beta})$ – матричная функция Миттаг-Леффлера. Тогда

$$(D^{(\beta)}z_1)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left[\frac{d}{dt}\left(\int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k\tau^{\beta k}}{\Gamma(\beta k+1)}d\tau\right) - t^{-\beta}\right]z_0 =$$

$$= A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^{k-1}t^{\beta(k-1)}}{\Gamma(\beta(k-1)+1)}z_0 = Az_1(t)$$

Кроме того, функция $z_1(t)$ удовлетворяет начальным условиям (2.4), так как

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{\beta k}}{\Gamma(\beta k+1)}z_0 = z_0$$

Рассмотрим теперь функцию $z_2(t)$, задаваемую формулой (2.7), и покажем, что она удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.3) при нулевых начальных условиях. Имеем

$$(D^{\beta}z_2)(t) = (D^{(\beta)}z_2)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d\psi}{dt} \tag{2.8}$$

где

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma(\beta k+\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\left(\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\beta(k+1)-1}F(s)ds\right)d\tau \tag{2.9}$$

Изучим функцию $\psi(t)$. Для этого рассмотрим интегралы

$$I_k = \int_0^t\int_0^{\tau}(t-\tau)^{-\beta}(\tau-s)^{\beta(k+1)-1}F(s)dsd\tau =$$

$$= \iint\limits_{\Delta_t} (t-\tau)^{-\beta}(\tau - s)^{\beta(k+1)-1} F(s) d\tau ds, \quad \Delta_t = \{(s,\tau) \colon 0 \le s \le \tau \le t\}$$

Последний двойной интеграл абсолютно сходится, что позволяет (в силу теоремы Фубини) изменить порядок интегрирования, используя формулу Дирихле. Тогда

$$I_k = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta k + \beta)}{\Gamma(\beta k + 1)} \int_0^t (t-s)^{\beta k} F(s) ds \tag{2.10}$$

Из равенств (2.9), (2.10) следует, что

$$\psi(t) = \Gamma(1-\beta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\beta k + 1)} \int_0^t (t-s)^{\beta k} F(s) ds$$

Так как функция $F(t)$ измерима и ограничена, то функция $\psi(t)$ почти всюду имеет производную, вычислив которую и подставив результат в выражение (2.8), получаем равенство (2.1) для $\hat{z} = z_2$.

3. Фрактальные игры с интегральным блоком управления. Наряду с конфликтно управляемыми процессами (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) рассмотрим процессы, отличающиеся тем, что блок управления входит в интегральном виде. А именно, в случае производных Римана – Лиувилля рассматривается процесс

$$D^{\beta}\hat{y} = A\hat{y} + \Phi(t), \quad I^{1-\beta}\hat{y}|_{t=0} = \hat{y}_0 \tag{3.1}$$

В случае регуляризованных производных Джрбашяна – Нерсесяна – процесс

$$D^{(\beta)}y = Ay + \Phi(t), \quad y|_{t=0} = y_0 \tag{3.2}$$

Здесь

$$\Phi(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} \varphi(u(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau, \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 < \beta < 1 \tag{3.3}$$

Теорема 3. При выбранных управлениях игроков решение задачи (3.1) определяется формулой

$$\hat{y}(t) = t^{\beta-1} E_{1/\beta}(At^{\beta}; \beta)\hat{y}_0 + y_2(t) \tag{3.4}$$

а решение задачи (3.2) – формулой

$$y(t) = E_{1/\beta}(At^{\beta}; 1)y_0 + y_2(t) \tag{3.5}$$

Здесь

$$\begin{gathered} y_2(t) = \int_0^t \Omega_{22}(t-\tau)\varphi(u(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau \\ \Omega_{22}(t-\tau) = \Gamma(\gamma)(t-\tau)^{\gamma+\beta-1} E_{1/\beta}(A(t-\tau)^{\beta}; \gamma+\beta) \end{gathered} \tag{3.6}$$

Учитывая доказательство теоремы 2, достаточно показать, что функция $y_2(t)$ – решение уравнений (3.1), (3.2) при нулевых начальных условиях.

Таким образом, для игровых задач с ДП Римана – Лиувилля типа (2.1), (2.2) и (3.1) и Джрбашяна – Нерсесяна типа (2.3), (2.4) и (3.2) решение представимо формулами (2.5), (2.6) и (3.4), (3.5.), что является частным случаем представления (1.1), следовательно, для решения каждой из перечисленных игровых задач применим изложенный выше общий метод.

4. Решение фрактальных игр с простой матрицей и шарообразными областями управления. Для иллюстрации метода рассмотрим частные ситуации, когда вычисления можно провести до конца.

В дальнейшем для сокращения записи и универсализации обозначений будем различать описанные выше четыре задачи, присваивая их параметрам значения индексов $i, j = 1, 2$. Таким образом, траектория $z_{11}(t)$ соответствует процессу (2.1) с производной Римана – Лиувилля без интегрального блока управления, а $z_{12}(t)$ – с интегральным блоком управления. В свою очередь, траектория $z_{21}(t)$ соответствует процессу с регуляризованной производной Джрбашяна – Нерсесяна без интегрального блока управления, а $z_{22}(t)$ – с интегральным блоком управления.

Тогда имеем четыре процесса

$$z_{ij}(t) = g_{ij}(t) + \int_0^t \Omega_{ij}(t-\tau)\varphi(u(\tau), \upsilon(\tau))d\tau, \quad i = 1, 2 \tag{4.1}$$

где

$$g_{11}(t) = G_{11}(t)\hat{z}_0, \quad g_{12}(t) = G_{12}(t)\hat{y}_0$$

$$G_{11}(t) = G_{12}(t) = t^{\beta-1}E_{1/\beta}(At^{\beta}; \beta)$$

$$g_{21}(t) = G_{21}(t)z_0, \quad g_{22}(t) = G_{22}(t)y_0 \tag{4.2}$$

$$G_{21}(t) = G_{22}(t) = E_{1/\beta}(At^{\beta}; 1)$$

$$\Omega_{21}(t-\tau) = \Omega_{11}(t-\tau), \quad \Omega_{12}(t-\tau) = \Omega_{22}(t-\tau)$$

Функции $\Omega_{ii}(t-\tau)$ определены последними выражениями в формулах (2.7) и (3.6).

Пусть

$$A = \lambda E, \quad \varphi(u, \upsilon) = u - \upsilon, \quad M^* = \{0\}, \quad U = aS, \quad a > 1, \quad V = S \tag{4.3}$$

где S – единичный шар с центром в нуле, λ – число. Тогда $L = R^n$ и π – оператор тождественного преобразования, который задается единичной матрицей E. Все матричные функции $G_{ij}(t)$ и $\Omega_{ij}(t-\tau)$ имеют вид

$$G_{ij}(t) = \hat{g}_{ij}(t)E, \quad \Omega_{ij}(t-\tau) = w_{ij}(t-\tau)E; \quad i, j = 1, 2$$

где $\hat{g}_{ij}(t)$ и $w_{ij}(t-\tau)$ – скалярные функции. При этом заметим только, что для матрицы $B = \lambda E$ справедливо равенство

$$E_{\rho}(B; \mu) = E_{\rho}(\lambda; \mu)E$$

где $E_{\rho}(\lambda; \mu)$ – обобщенная скалярная функция Миттаг – Леффлера [16]. Тогда

$$W_{ij}(t, \tau, \upsilon) = w_{ij}(t-\tau)(aS - \upsilon), \quad W_{ij}(t, \tau) = |w_{ij}(t-\tau)|(a-1)S$$

Следовательно, условие Понтрягина выполнено при $a \geq 1$.

Положим $\gamma_{ij}(t, \tau) \equiv 0$. Тогда

$$\xi_{ij}(t, g_{ij}(t), \gamma_{ij}(t, \cdot)) = g_{ij}(t) = \hat{g}_{ij}(t) z_{ij}^0, \quad z_{ij}^0 \neq 0$$

Величина

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(t, \tau, \upsilon) &= \sup\{\alpha \geq 0 \colon \alpha \hat{g}_{ij}(t) z_{ij}^0 \in w_{ij}(t-\tau)(aS-\upsilon)\} = \\ &= (\upsilon_0, q)/\|q\|^2 + \sqrt{(\upsilon_0, q)^2/\|q\|^4 + (a_0^2 - \|\upsilon_0\|^2)/\|q\|^2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

является бóльшим корнем квадратного уравнения

$$\|\upsilon_0 - q\alpha\| = a_0$$

относительно α. Здесь

$$\upsilon_0 = w_{ij}(t-\tau)\upsilon, \; q = \hat{g}_{ij}(t) z_{ij}^0, \; a_0 = |w_{ij}(t-\tau)| a$$

Следует заметить, что $\hat{g}_{ij}(t) \neq 0$ вплоть до момента окончания игры. Обращение в нуль этой функции означает возможность закончить игру по первому прямому методу Понтрягина в этот момент [1].

Очевидно,

$$\min_{\|\upsilon\| \leq 1} \alpha_{ij}(t, \tau, \upsilon) = \frac{(a-1)|w_{ij}(t-\tau)|}{\|\hat{g}_{ij}(t) z_{ij}^0\|}$$

причем минимум достигается на элементе

$$\upsilon_{ij}(t, \tau) = -\operatorname{sign}\{\hat{g}_{ij}(t) w_{ij}(t-\tau)\} \frac{z_{ij}^0}{\|z_{ij}^0\|}$$

Тогда время окончания игры является наименьшим корнем уравнения

$$\int_0^t \frac{(a-1)|w_{ij}(t-\tau)|}{|\hat{g}_{ij}(t)| \|z_{ij}^0\|} d\tau = 1$$

так как $w_{ij}(t-\tau)$ – непрерывные функции, и в каждом из случаев задается формулой

$$T_{ij}(z_{ij}^0, 0) = \min\{t \geq 0 \colon \Phi_{ij}(t) \geq \xi_{ij}\}$$

где

$$\Phi_{ij}(t) = \int_0^t \frac{|w_{ij}(t-\tau)|}{|\hat{g}_{ij}(t)|} d\tau, \quad \xi_{ij} = \frac{\|z_{ij}^0\|}{a-1} \tag{4.5}$$

Функции $\Phi_{ij}(t)$ приобретают вид

$$\Phi_{i1}(t) = \int_0^t \frac{|G_{11}(\tau)|}{|G_{i1}(t)|} d\tau, \quad \Phi_{i2}(t) = \int_0^t \frac{|\Omega_{12}(\tau)|}{|G_{i1}(t)|} d\tau; \quad i = 1, 2 \tag{4.6}$$

Для проверки конечности времени $T_{ij}(z_{ij}^0, 0)$ окончания игры из заданного начального состояния z_{ij}^0 в дальнейшем существенную роль будут играть асимптотические представления обобщенной скалярной функции Миттаг-Леффлера. Используем известные формулы ([16], с. 134), дающие такое представление для функции $E_\rho(x; \mu)$ при вещественном x, $\rho > 1/2$ и любом μ.

Из этих формул следует, что

$$E_\rho(x;\mu) = \chi\rho x^{\rho(1-\mu)}\exp(x^\rho) - \sum_{k=1}^{p}\frac{x^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho^{-1})} + O(|x|^{-(p+1)}) \tag{4.7}$$

где $\chi = 1$ при положительных x, $\chi = 0$ при отрицательных x.

Видно, что в рассматриваемом примере естественно различать два случая: $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

Пусть $\lambda > 0$. Тогда все фигурирующие в формулах для $\Phi_{ij}(t)$ обобщенные функции Миттаг-Леффлера положительны. Воспользуемся этим обстоятельством, а также формулой ([16], с. 120)

$$\int_0^x E_\rho(\lambda x^{1/\beta};\mu)\tau^{\mu-1}d\tau = x^\mu E_\rho(\lambda x^{1/\beta};\mu+1), \quad \mu > 0, \quad \lambda \in R$$

Тогда функции $\Phi_{ij}(t)$ ($i = 1, 2$) приобретают вид

$$\Phi_{i1}(t) = \frac{t^\beta E_{1/\beta}(\lambda t^\beta;\beta+1)}{G_{i1}(t)}, \quad \Phi_{i2}(t) = \Gamma(\gamma)\frac{t^{\beta+\gamma}E_{1/\beta}(\lambda t^\beta;\beta+\gamma+1)}{G_{i1}(t)} \tag{4.8}$$

Положим в формуле (4.7) ($\chi = 1$), $\rho = 1/\beta$, $x = \lambda t^\beta$. Заметим при этом, что поскольку $\beta \in (0, 1)$, то $\rho \in (1, \infty)$, и следовательно, $\rho > 1/2$. Тогда, используя асимптотическое представление

$$E_{1/\beta}(\lambda t^\beta;\mu) = \frac{1}{\beta}(\lambda^{1-\mu/\beta}t)^{1-\mu}\exp(\lambda^{1/\beta}t) + \ldots$$

по формулам (4.8) найдем пределы функций $\Phi_{ij}(t)$ при $t \to \infty$. В результате заключаем, что при $\lambda > 0$ время $T_{ij}(z_{ij}^0, 0)$ конечно, если выполнено соответствующее неравенство:

$$\text{при } i = j = 1 \quad \lambda^{-1/\beta} > \xi_{11}, \quad \text{при } i = 1, j = 2 \quad \Gamma(\gamma)\lambda^{-(\gamma+1)/\beta} > \xi_{12}$$

$$\text{при } i = 2, j = 1 \quad \lambda^{-1} > \xi_{21}, \quad \text{при } i = j = 2 \quad \Gamma(\gamma)\lambda^{-(\beta+\gamma)/\beta} > \xi_{22}$$

Рассмотрим теперь случай $\lambda < 0$. Положим в формуле (4.7) $\chi = 0$, $\rho = 1/\beta$, $x = \lambda t^\beta$. Используя асимптотические представления числителей и знаменателей функций $\Phi_{ij}(t)$, определяемых формулами (4.8) при $\lambda < 0$, заключаем, что

$$\Phi_{ij}(t) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad \forall i, j = 1, 2$$

Таким образом, времена $T_{ij}(z_{ij}^0, 0)$, определяемые формулой (4.5), конечны при любых z_{ij}^0 ($i, j = 1, 2$), т.е. для рассматриваемого процесса при $\lambda < 0$ имеет место полная конфликтная управляемость [1] для всех задач: (2.1), (2.2); (2.3), (2.4); (3.1); (3.2).

Пусть $\lambda = 0$. Тогда, учитывая формулы (4.8) для функции $\Phi_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2$), а также выражение (4.5), получим точные значения для времен окончания рассматриваемых игр

$$T_{11}(z_{11}^0, 0) = \beta\xi_{11}, \quad T_{21}(z_{21}^0, 0) = [\Gamma(\beta+1)\xi_{21}]^{1/\beta}$$

$$T_{12}(z_{12}^0, 0) = \left[\frac{\Gamma(\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\xi_{12}\right]^{1/(\gamma+1)}, \quad T_{22}(z_{22}^0, 0) = \left[\frac{\Gamma(\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\gamma)}\xi_{22}\right]^{1/(\gamma+\beta)}$$

Авторы посвящают статью восьмидесятилетию академика Н.Н. Красовского.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chikrii A.A.* Conflict-Controlled Processes. Dordrecht, etc.: Kluwer, 1997. 403 p.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Понтрягин Л.С.* Избр. научн. труды. Т. 2. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 575 с.
4. *Isaacs R.* Differential Games. New York, etc.: Wiley, 1965. 475 p. = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
5. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
6. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. М.: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
7. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 196 с.
8. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 259 с.
9. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
10. *Chikrii A.A.* Quasilinear controlled processes under conflict. Dynamical Systems. 2 // J. Math. Sci. 1996. V. 80. № 1. P. 1489–1518.
11. *Eidelman S.D., Chikrii A.A.* Game problems for systems with Volterra evolution. Fractal Games // Game Theory and Applications. Huntington. New York: Nova Sci. Publ. Inc., 2001. V. 6. P. 9–44.
12. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
13. *Clarke F.H.* Optimization and Nonsmooth Analysis. New York, etc.: Wiley, 1983 = *Кларк Ф.Н.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
14. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
15. *Chikrii A.A., Eidelman S.D.* Game problems for fractional quasilinear systems // Computers and Mathematics with Applications. 2002. V. 44. № 7. P. 835–851.
16. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.

Киев
e-mail: chik@d165.icyb.kiev.ua

Поступила в редакцию
9.VII.2003