УДК 517.977.8

© 2004 г. Г. Е. Иванов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМИ ШТРАФАМИ

Рассматриваются антагонистические линейные дифференциальные игры (ДИ) на фиксированном отрезке времени. Функционал качества исследуемых ДИ состоит из терминального слагаемого и интегральных штрафов на управления игроков. Терминальное слагаемое является квадратичной формой относительно значения фазового вектора в конечный момент времени. Графики функций штрафов представляют собой половины поверхностей эллипсоидов. Для ДИ рассматриваемого класса доказана теорема о существовании седловой точки в классе программных стратегий. Получены явные выражения оптимальных программных стратегий через вектор сопряженных переменных. Приведены эффективные алгоритмы вычисления вектора сопряженных переменных и доказана сходимость этих алгоритмов. Построена регулярная приближенно оптимальная стратегия для ДИ с чисто геометрическими ограничениями на управления преследователя. Рассмотрен пример дифференциальной игры в четырехмерном пространстве.

Анализ дифференциальных игр, учитывающих геометрические ограничения, накладываемые на управления игроков, – технически весьма сложная задача. В общем случае алгоритмы решения этой задачи крайне неэффективны [1, 2]. Данная работа продолжает начатое рассмотрение [3] эффективных алгоритмов построения гарантированных стратегий игроков в случае, когда множества допустимых управлений – эллипсоиды. В отличие от работы [3], где рассматривались гарантированные, но в общем случае не оптимальные стратегии, в настоящей работе приведены алгоритмы построения оптимальных гарантированных стратегий.

1. Теорема о седловой точке. Рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_u(t)u(t) + B_\upsilon(t)\upsilon(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

на отрезке времени $t \in [0; \vartheta]$ с функционалом качества

$$J = \frac{1}{2}x^T(\vartheta)Fx(\vartheta) + \int_0^\vartheta(-\beta_u(t, u(t)) + \beta_\upsilon(t, \upsilon(t)))dt \tag{1.2}$$

$$\beta_u(t, u) = \gamma_u(t)\sqrt{1 - u^TG_u(t)u}, \quad \beta_\upsilon(t, \upsilon) = \gamma_\upsilon(t)\sqrt{1 - \upsilon^TG_\upsilon(t)\upsilon} \tag{1.3}$$

Здесь $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $\upsilon(t) \in \mathbb{R}^q$ – управления игроков, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы. Заданы:

1) симметрическая матрица $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$;

2) кусочно-непрерывные матрично-значные функции A: $[0; \vartheta] \to \mathbb{R}^{n \times n}$, B_u: $[0; \vartheta] \to \mathbb{R}^{n \times p}$, B_υ: $[0; \vartheta] \to \mathbb{R}^{n \times q}$, G_u: $[0; \vartheta] \to \mathbb{R}^{p \times p}$, G_υ: $[0; \vartheta] \to \mathbb{R}^{q \times q}$, причем для любого $t \in [0; \vartheta]$ матрицы $G_u(t)$, $G_\upsilon(t)$ симметричны и положительно определены;

3) кусочно-непрерывные функции γ_u: $[0; \vartheta] \to \mathbb{R}$, γ_υ: $[0; \vartheta] \to \mathbb{R}$ с положительными значениями.

Управления игроков подчиняются геометрическим ограничениям

$$u^T(t)G_u(t)u(t) \le 1, \quad \upsilon^T(t)G_\upsilon(t)\upsilon(t) \le 1, \quad t \in [0; \vartheta]$$

Игроки знают параметры игры: ϑ, x_0, A, B_u, B_υ, F, G_u, G_υ, γ_u, γ_υ. В каждый момент времени t игрокам известно текущее значение фазового вектора $x(t)$. Цель игрока u – минимизировать, цель игрока υ – максимизировать функционал J.

Поскольку графики функций $u \mapsto \beta_u(t, u)$ и $\upsilon \mapsto \beta_\upsilon(t, \upsilon)$ лежат на поверхностях эллипсоидов, то функции β_u и β_υ будем называть эллипсоидальными штрафами.

Через $\mathbb{R}^s$ обозначено пространство s-мерных векторов-столбцов, через $\mathbb{R}^{m\times n}$ обозначено пространство матриц размера $m \times n$. Если $x \in \mathbb{R}^n$, то через $|x|$ будем обозначать евклидову норму вектора x: $|x| = \sqrt{x^T x}$. Операторную норму матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ будем обозначать через $\|A\|$: $\|A\| = \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n:\, |x| = 1} |Ax|$; L_s^2 – пространство квадратично интегрируемых (в смысле интеграла Лебега) функций φ: $[0; \vartheta] \longrightarrow \mathbb{R}^s$; U – множество допустимых программных стратегий игрока u:

$$U = \{u \in L_p^2\colon u^T(t)G_u(t)u(t) \le 1 \text{ почти всюду на } [0; \vartheta]\} \tag{1.4}$$

Аналогично через V обозначим множество допустимых программных стратегий игрока υ.

Для любых $u \in U$, $\upsilon \in V$ через $J(u, \upsilon)$ обозначим значение функционала качества игры (1.1)–(1.3), соответствующее программным управлениям u, υ.

Приведем квадратичную функцию x^TFx к каноническому виду. Получим существование матриц $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $F_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$, таких, что $F = S^TF_1S$, где

$$F_1 = \begin{Vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_s \end{Vmatrix}, \quad r + s = m \tag{1.5}$$

Здесь m – ранг матрицы F, E_k – единичная матрица $k \times k$.

Пусть матрично-значная функция Φ: $[0; \vartheta] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ – решение задачи Коши

$$\dot\Phi(t) = -\Phi(t)A(t), \quad \Phi(\vartheta) = S \tag{1.6}$$

В частности, если $A(t) = A$ – постоянная матрица, то $\Phi(t) = Se^{A(\vartheta - t)}$.

Заменяя фазовый вектор $x(t)$ на вектор $z(t) = \Phi(t)x(t)$, сведем дифференциальную игру (1.1)–(1.3) к дифференциальной игре с простой динамикой

$$\dot z(t) = \tilde B_u(t)u(t) + \tilde B_\upsilon(t)\upsilon(t), \quad z(0) = z_0 \tag{1.7}$$

где

$$\tilde B_u(t) = \Phi(t)B_u(t), \quad \tilde B_\upsilon(t) = \Phi(t)B_\upsilon(t), \quad z_0 = \Phi(0)x_0$$

и функционалом качества

$$J = \frac{z^T(\vartheta)F_1z(\vartheta)}{2} + \int_0^\vartheta (-\beta_u(t, u(t)) + \beta_\upsilon(t, \upsilon(t)))dt \tag{1.8}$$

Определим матрицы

$$P_u(t) = \Phi(t)B_u(t)G_u^{-1}(t)B_u^T(t)\Phi^T(t), \quad \bar P_u = \int_0^\vartheta \frac{1}{\gamma_u(t)}P_u(t)dt \tag{1.9}$$

и аналогично – матрицы $P_\upsilon(t)$, $\bar{P}_\upsilon$. Для любого $u \in U$ определим m-мерный вектор-столбец

$$\mathcal{B}(u) = \int_0^\vartheta \tilde{B}_u(t)u(t)dt$$

Лемма 1.1. Пусть матрица $\bar{P}_u + \bar{P}_u F_1 \bar{P}_u$ неотрицательно определена. Тогда для любой функции $u \in L_p^2$ справедливо неравенство

$$\int_0^\vartheta \gamma_u(t)u^T(t)G_u(t)u(t)dt + \mathcal{B}^T(u)F_1\mathcal{B}(u) \ge 0$$

Доказательство. Пусть задана функция $u \in L_p^2$. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\bar{u} \mapsto \int_0^\vartheta \gamma_u(t)\bar{u}^T(t)G_u(t)\bar{u}(t)dt$$

по всем $\bar{u} \in L_p^2$, таким, что $\mathcal{B}(\bar{u}) = \mathcal{B}(u)$. В силу положительной определенности матрицы $\gamma_u(t)G_u(t)$ и непустоты множества $\{\bar{u} \in L_p^2 : \mathcal{B}(\bar{u}) = \mathcal{B}(u)\}$ указанная задача имеет некоторое решение u_0. Используя метод множителей Лагранжа, получаем существование вектора $\lambda \in \mathbb{R}^m$, такого, что функция u_0 – стационарная точка функционала

$$\bar{u} \mapsto \int_0^\vartheta \gamma_u(t)\bar{u}^T(t)G_u(t)\bar{u}(t)dt - 2\lambda^T(\mathcal{B}(\bar{u}) - \mathcal{B}(u))$$

т.е.

$$\gamma_u(t)G_u(t)u_0(t) - \tilde{B}_u^T(t)\lambda = 0$$

Следовательно,

$$u_0(t) = \frac{1}{\gamma_u(t)}G_u^{-1}(t)\tilde{B}_u^T(t)\lambda$$

Итак,

$$\int_0^\vartheta \gamma_u(t)u^T(t)G_u(t)u(t)dt \ge \int_0^\vartheta \gamma_u(t)u_0^T(t)G_u(t)u_0(t)dt =$$

$$= \lambda^T\left(\int_0^\vartheta \frac{1}{\gamma_u(t)}\tilde{B}_u(t)G_u^{-1}(t)\tilde{B}_u^T(t)dt\right)\lambda = \lambda^T\bar{P}_u\lambda$$

где вектор λ удовлетворяет условию

$$\bar{P}_u\lambda = \left(\int_0^\vartheta \frac{1}{\gamma_u(t)}\tilde{B}_u(t)G_u^{-1}(t)\tilde{B}_u^T(t)dt\right)\lambda = \int_0^\vartheta \tilde{B}_u(t)u_0(t)dt = \mathcal{B}(u)$$

Поэтому

$$\int_0^\vartheta \gamma_u(t)u^T(t)G_u(t)u(t)dt + \mathcal{B}^T(u)F_1\mathcal{B}(u) \ge$$

$$\ge \lambda^T\bar{P}_u\lambda + \lambda^T\bar{P}_uF_1\bar{P}_u\lambda = \lambda^T(\bar{P}_u + \bar{P}_uF_1\bar{P}_u)\lambda \ge 0$$

в силу неотрицательной определенности матрицы $\bar{P}_u + \bar{P}_u F_1 \bar{P}_u$.

Лемма 1.2. Пусть матрица $\bar{P}_u + \bar{P}_u F_1 \bar{P}_u$ неотрицательно определена. Тогда для любой функции $\upsilon_0 \in L_q^2$ функционал $u \mapsto J(u, \upsilon_0)$ является выпуклым на множестве допустимых программных стратегий U.

Доказательство. Пусть заданы произвольные $u_1, u_2 \in U, \lambda \in [0; 1]$. Обозначим

$$u_0 = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, \quad \Delta u = u_2 - u_1$$

$$z_i(t) = z_0 + \int_0^t (\tilde{B}_u(\tau)u_i(\tau) + \tilde{B}_\upsilon(\tau)\upsilon_0(\tau))d\tau, \quad i \in \{1, 2\}$$

$$z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2, \quad \Delta z = z_2 - z_1$$

$$\delta J = \lambda J(u_1, \upsilon_0) + (1-\lambda)J(u_2, \upsilon_0) - J(u_0, \upsilon_0)$$

Требуется доказать, что $\delta J \geq 0$.

Заметим, что

$$u_1 = u_0 - (1-\lambda)\Delta u, \quad u_2 = u_0 + \lambda\Delta u, \quad z_1 = z - (1-\lambda)\Delta z, \quad z_2 = z + \lambda\Delta z$$

$$\Delta z(t) = \int_0^t \tilde{B}_u(\tau)\Delta u(\tau)d\tau, \quad \delta J = \delta_1 J + \delta_2 J$$

где

$$\delta_1 J = \frac{1}{2}(\lambda z_1^T(\vartheta)F_1 z_1(\vartheta) + (1-\lambda)z_2^T(\vartheta)F_1 z_2(\vartheta) - z^T(\vartheta)F_1 z(\vartheta))$$

$$\delta_2 J = \int_0^\vartheta (\beta_u(t, u_0(t)) - \lambda\beta_u(t, u_1(t)) - (1-\lambda)\beta_u(t, u_2(t)))dt$$

Упростим выражение $\delta_1 J$:

$$\begin{aligned}\delta_1 J &= \frac{1}{2}(\lambda(z(\vartheta) - (1-\lambda)\Delta z(\vartheta))^T F_1(z(\vartheta) - (1-\lambda)\Delta z(\vartheta)) + \\ &+ (1-\lambda)(z(\vartheta) + \lambda\Delta z(\vartheta))^T F_1(z(\vartheta) + \lambda\Delta z(\vartheta)) - z^T(\vartheta)F_1 z(\vartheta)) = \\ &= \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}(\Delta z(\vartheta))^T F_1 \Delta z(\vartheta)\end{aligned} \tag{1.10}$$

Покажем, что для любого $t \in [0; \vartheta]$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}&\beta_u(t, u_0(t)) - \lambda\beta_u(t, u_1(t)) - (1-\lambda)\beta_u(t, u_2(t)) \geq \\ &\geq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\gamma_u(t)(\Delta u(t))^T G_u(t)\Delta u(t)\end{aligned} \tag{1.11}$$

Действительно, зафиксируем $t \in [0; \vartheta]$ и обозначим

$$\bar{u}_1 = u_1(t), \quad \bar{u}_2 = u_2(t), \quad \bar{u}_0 = u_0(t), \quad \overline{\Delta u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1$$

$$\varphi(\tau) = \beta_u(t, \bar{u}_0 + \tau\overline{\Delta u}), \text{ где } \tau \in [-(1-\lambda); \lambda]$$

Тогда

$$\beta_u(t, u_0(t)) - \lambda\beta_u(t, u_1(t)) - (1-\lambda)\beta_u(t, u_2(t)) = \varphi(0) - \lambda\varphi(-(1-\lambda)) - (1-\lambda)\varphi(\lambda)$$

Функция φ непрерывна на отрезке $[-(1-\lambda); \lambda]$ и бесконечно дифференцируема на интервале $(-(1-\lambda); \lambda)$. Поэтому, используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем существование чисел $\xi_1, \xi_2 \in (-(1-\lambda); \lambda)$, таких, что

$$\varphi(0)-\lambda\varphi(-(1-\lambda))-(1-\lambda)\varphi(\lambda) =$$

$$= \varphi(0)-\lambda\left(\varphi(0)-(1-\lambda)\varphi'(0)+\frac{(1-\lambda)^2}{2}\varphi''(\xi_1)\right)-$$

$$-(1-\lambda)\left(\varphi(0)+\lambda\varphi'(0)+\frac{\lambda^2}{2}\varphi''(\xi_2)\right) =$$

$$= -\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}((1-\lambda)\varphi''(\xi_1)+\lambda\varphi''(\xi_2))$$

Так как

$$\varphi(\tau) = \beta_u(t, \bar{u}_0+\tau\overline{\Delta u}) = \gamma_u(t)\sqrt{1-(\bar{u}_0+\tau\overline{\Delta u})^T G_u(t)(\bar{u}_0+\tau\overline{\Delta u})}$$

то

$$\varphi''(\tau) = -\frac{\gamma_u^2(t)(\overline{\Delta u})^T G_u(t)\overline{\Delta u}}{\beta_u(t, \bar{u}_0+\tau\overline{\Delta u})}-\frac{\gamma_u^4(t)((\overline{\Delta u})^T G_u(t)(\bar{u}_0+\tau\overline{\Delta u}))^2}{\beta_u^3(t, \bar{u}_0+\tau\overline{\Delta u})} \le -\gamma_u(t)(\overline{\Delta u})^T G_u(t)\overline{\Delta u}$$

Следовательно,

$$\varphi(0)-\lambda\varphi(-(1-\lambda))-(1-\lambda)\varphi(\lambda) \ge \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\gamma_u(t)(\overline{\Delta u})^T G_u(t)\overline{\Delta u}$$

т.е. выполнено неравенство (1.11).

Из условия (1.11) следует, что

$$\delta_2 J \ge \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^{\vartheta}\gamma_u(t)\Delta u(t))^T G_u(t)\Delta u(t)dt$$

Поэтому, согласно равенству (1.10),

$$\delta J \ge \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left(\int_0^{\vartheta}\gamma_u(t)(\Delta u(t))^T G_u(t)\Delta u(t)dt+(\Delta z(\vartheta))^T F_1\Delta z(\vartheta)\right)$$

Отсюда, учитывая, что $\Delta z(\vartheta) = \mathcal{B}(\Delta u)$, в силу леммы 1.1 получаем доказываемое неравенство $\delta J \ge 0$.

Лемма 1.3. Множества допустимых управлений U, V – выпуклые компакты относительно слабой топологии пространств L_p^2, L_q^2 соответственно.

Доказательство. Выпуклость множеств U, V следует из положительной определенности матриц $G_u(t)$, $G_\upsilon(t)$ и формулы (1.4). Покажем компактность множества U относительно слабой топологии пространства L_p^2. Компактность V относительно слабой топологии пространства L_q^2 проверяется аналогично.

Так как матрица $G_u(t)$ кусочно-непрерывно зависит от t и положительно определена при $t \in [0; \vartheta]$, то существует число $\varepsilon > 0$, такое, что $u^T G_u(t)u \ge \varepsilon u^T u$ для любых $t \in [0; \vartheta]$, $u \in \mathbb{R}^p$. Следовательно, для любой функции $u \in U$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{L_p^2}^2 \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\vartheta} u^T G_u(t)udt \le \frac{\vartheta}{\varepsilon} < +\infty$$

Поэтому множество U ограничено по норме пространства L_p^2. Отсюда следует [4] предкомпактность множества U в смысле слабой топологии пространства L_p^2.

Легко видеть, что множество допустимых программных стратегий U замкнуто в смысле сильной топологии пространства L_p^2. Отсюда и из выпуклости множества U следует [5] замкнутость U в смысле слабой топологии пространства L_p^2. Из предкомпактности и замкнутости множества U получаем компактность этого множества.

Лемма 1.4. Для любой функции $v_0 \in L_q^2$ функционал $u \mapsto J(u, v_0)$ непрерывен на множестве U в смысле сильной топологии пространства L_p^2.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}$ – последовательность элементов множества U, сильно в L_p^2 сходящаяся к элементу $\bar{u} \in U$. Поскольку $\mathcal{B}(u_n) \to \mathcal{B}(\bar{u})$ при $n \to \infty$, то терминальная часть функционала качества сходится. Поэтому достаточно доказать сходимость интегральной части функционала, т.е., что при $n \to \infty$

$$\int_0^{\vartheta} a_n(t)dt \to \int_0^{\vartheta} \bar{a}(t)dt \tag{1.12}$$

где

$$a_n(t) = \gamma_u(t)\sqrt{1 - u_n^T(t)G_u(t)u_n(t)}, \quad \bar{a}(t) = \gamma_u(t)\sqrt{1 - \bar{u}^T(t)G_u(t)\bar{u}(t)}$$

Обозначим

$$\Delta_n = \int_0^{\vartheta}|a_n(t) - \bar{a}(t)|dt, \quad \Delta_n^{(2)} = \int_0^{\vartheta}|a_n^2(t) - \bar{a}^2(t)|dt$$

Из сходимости $\{u_n\}$ к $\bar{u}$ и ограниченности функций $\gamma_u(t)$, $G_u(t)$ следует, что $\Delta_n^{(2)} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из неравенства $|a_n(t) - \bar{a}(t)| \le \sqrt{|a_n^2(t) - \bar{a}^2(t)|}$, которое справедливо для неотрицательных чисел $a_n(t)$, $\bar{a}(t)$, следует, что

$$\Delta_n \le \int_0^{\vartheta}\sqrt{|a_n^2(t) - \bar{a}^2(t)|}dt \le \sqrt{\vartheta\Delta_n^{(2)}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

т.е. выполнено условие (1.12).

Лемма 1.5. Пусть матрица $\bar{P}_u + \bar{P}_u F_1 \bar{P}_u$ неотрицательно определена. Тогда для любой функции $v_0 \in L_q^2$ функционал $u \mapsto J(u, v_0)$ полунепрерывен снизу на множестве U в смысле слабой топологии пространства L_p^2.

Доказательство. Пусть $\{u_i\}$ – последовательность элементов множества U, слабо в L_p^2 сходящаяся к элементу $\bar{u} \in L_p^2$. Требуется доказать, что

$$J(\bar{u}, v_0) \le \varliminf_{i \to \infty} J(u_i, v_0)$$

Из слабой сходимости $\{u_i\}$ к $\bar{u}$ следует [5] существование последовательности $\{\tilde{u}_n\}$, сильно сходящейся к $\bar{u}$ и такой, что каждый элемент $\{\tilde{u}_n\}$ – выпуклая комбинацией конечного числа элементов $\{u_i\}$. Из леммы 1.4 следует, что $J(\tilde{u}_n, \upsilon_0) \to J(\bar{u}, \upsilon_0)$ при $n \to \infty$.

Согласно лемме 1.2, функционал $u \mapsto J(u, \upsilon_0)$ является выпуклым. Поэтому

$$J(\bar{u}, \upsilon_0) = \lim_{n\to\infty} J(\tilde{u}_n, \upsilon_0) \le \varliminf_{i\to\infty} J(u_i, \upsilon_0)$$

Теорема 1.1. Пусть матрицы $\bar{P}_u + \bar{P}_u F_1 \bar{P}_u$ и $\bar{P}_\upsilon - \bar{P}_\upsilon F_1 \bar{P}_\upsilon$ неотрицательно определены. Тогда для дифференциальной игры (1.1)–(1.3) существует седловая точка в классе программных стратегий:

$$\exists \hat{u} \in U, \quad \hat{\upsilon} \in V: \forall u \in U, \quad \upsilon \in V \quad J(\hat{u}, \upsilon) \le J(\hat{u}, \hat{\upsilon}) \le J(u, \hat{\upsilon})$$

Доказательство. Из лемм 1.1, 1.5 следует выпуклость и полунепрерывность снизу функционала $u \mapsto J(u, \upsilon)$ на множестве U при любом $\upsilon \in V$. Аналогично получаем вогнутость и полунепрерывность сверху функционала $\upsilon \mapsto J(u, \upsilon)$ на множестве V при любом $u \in U$. В силу леммы 1.3 множества U и V – выпуклые компакты. Здесь полунепрерывность и компактность понимаются в смысле слабой топологии пространств L_p^2, L_q^2 соответственно. В силу теоремы Неймана [6] получаем требуемое утверждение.

Используя матрично-значные функции $P_u(t)$, $P_\upsilon(t)$, которые были введены формулой (1.9), для любых $t \in [0; \vartheta]$, $\psi \in \mathbb{R}^m$ определим скалярные функции

$$\sigma_u(t, \psi) = \sqrt{\gamma_u^2(t) + \psi^T P_u(t)\psi}, \quad \sigma_\upsilon(t, \psi) = \sqrt{\gamma_\upsilon^2(t) + \psi^T P_\upsilon(t)\psi} \tag{1.13}$$

и вектор-функцию

$$M(\psi) = F_1 z_0 - F_1 \int_0^\vartheta \frac{P_u(t)\psi}{\sigma_u(t, \psi)} dt + F_1 \int_0^\vartheta \frac{P_\upsilon(t)\psi}{\sigma_\upsilon(t, \psi)} dt \tag{1.14}$$

Теорема 1.2. Пусть матрицы $\bar{P}_u + \bar{P}_u F_1 \bar{P}_u$ и $\bar{P}_\upsilon - \bar{P}_\upsilon F_1 \bar{P}_\upsilon$ неотрицательно определены. Пусть вектор ψ – решение уравнения $\psi = M(\psi)$. Тогда оптимальные программные стратегии игроков определяются формулами

$$\hat{u}(t) = -\frac{G_u^{-1}(t) B_u^T(t) \Phi^T(t) \psi}{\sigma_u(t, \psi)}, \quad \hat{\upsilon}(t) = \frac{G_\upsilon^{-1}(t) B_\upsilon^T(t) \Phi^T(t) \psi}{\sigma_\upsilon(t, \psi)} \tag{1.15}$$

Функция цены игры (оптимальный гарантированный результат) определяется формулой

$$J(\hat{u}, \hat{\upsilon}) = \psi^T z_0 - \frac{1}{2}\psi^T F_1 \psi - \int_0^\vartheta (\sigma_u(t, \psi) - \sigma_\upsilon(t, \psi)) dt \tag{1.16}$$

Доказательство. Пусть функции $\hat{u}(t)$, $\hat{\upsilon}(t)$ определены формулами (1.15). Покажем, что $\hat{u}(t)$ и $\hat{\upsilon}(t)$ – оптимальные программные стратегии игроков.

Из формул (1.9), (1.15) следует, что

$$\hat{u}^T(t) G_u(t) \hat{u}(t) = \frac{\psi^T \tilde{B}_u(t) G_u^{-1}(t) \tilde{B}_u^T(t) \psi}{\sigma_u^2(t, \psi)} = \frac{\psi^T P_u(t) \psi}{\sigma_u^2(t, \psi)}$$

Поэтому, согласно равенству (1.13)

$$\sqrt{1-\hat{u}^T(t)G_u(t)\hat{u}(t)} = \frac{\gamma_u(t)}{\sigma_u(t,\psi)} \tag{1.17}$$

Для любого вектора $u \in \mathbb{R}^p$, такого, что $u^T G_u(t)u < 1$, вектор-столбец частных производных функции $\beta_u(t, u)$, определенной первым равенством (1.3), по компонентам вектора u равен

$$\frac{\partial\beta_u(t,u)}{\partial u} = -\frac{\gamma_u(t)G_u(t)u}{\sqrt{1-u^T G_u(t)u}}$$

Отсюда и из формул (1.5), (1.17) следует

$$\frac{\partial\beta_u(t,\hat{u}(t))}{\partial u} = \tilde{B}_u^T(t)\psi \tag{1.18}$$

Пусть $\Delta u \in L_p^2$. Обозначим

$$\hat{z}(t) = z_0 + \int_0^t (\tilde{B}_u(\tau)\hat{u}(\tau) + \tilde{B}_\upsilon(\tau)\hat{\upsilon}(\tau))d\tau, \quad \Delta z(t) = \int_0^t \tilde{B}_u(\tau)\Delta u(\tau)d\tau \tag{1.19}$$

Из формулы (1.8) следует, что при $\tau \to 0$

$$J(\hat{u}+\tau\Delta u, \hat{\upsilon}) - J(\hat{u}, \hat{\upsilon}) =$$

$$= \tau\left(\hat{z}^T(\vartheta)F_1\Delta z(\vartheta) - \int_0^\vartheta \left(\frac{\partial\beta_u(t,\hat{u}(t))}{\partial u}\right)^T \Delta u(t)dt\right) + o(\tau)$$

Поэтому первая вариация функционала $u \mapsto J(u, \hat{\upsilon})$ в точке $\hat{u}$ равна

$$\delta_u J(\Delta u) = \left(\hat{z}^T(\vartheta)F_1\int_0^\vartheta \tilde{B}_u(t)\Delta u(t)dt\right) - \int_0^\vartheta \left(\frac{\partial\beta_u(t,\hat{u}(t))}{\partial u}\right)^T \Delta u(t)dt$$

Отсюда и из формулы (1.18) следует, что

$$\delta_u J(\Delta u) = \int_0^\vartheta (\hat{z}^T(\vartheta)F_1 - \psi^T)\tilde{B}_u(t)\Delta u(t)dt \tag{1.20}$$

Из формул (1.9), (1.15) получаем равенство

$$\tilde{B}_u(t)\hat{u}(t) = -\frac{P_u(t)\psi}{\sigma_u(t,\psi)} \tag{1.21}$$

Отсюда и из формул (1.14), (1.19) следует, что $\psi = M(\psi) = F_1\hat{z}(\vartheta)$. Поэтому, согласно равенству (1.20), получаем, что первая вариация функционала $u \mapsto J(u, \hat{\upsilon})$ в точке $\hat{u}$ равна нулю. Учитывая выпуклость функционала $u \mapsto J(u, \hat{\upsilon})$, доказанную в лемме 1.2, получаем неравенство $J(\hat{u}, \hat{\upsilon}) \le J(u, \hat{\upsilon})$ для любой функции $u \in U$.

Аналогично, для любой функции $\upsilon \in V$ справедливо неравенство $J(\hat{u}, \upsilon) \le J(\hat{u}, \hat{\upsilon})$. Следовательно, пара программных стратегий $\hat{u}$, $\hat{\upsilon}$ составляет седловую точку дифференциальной игры, т.е. является парой оптимальных стратегий игроков.

Так как $\psi = F_1\hat{z}(\vartheta)$ и $F_1F_1 = E_m$, то $\hat{z}(\vartheta) = F_1\psi$. Следовательно, $\hat{z}^T(\vartheta)F_1\hat{z}(\vartheta) = \psi^T F_1\psi$. Потому в силу равенства (1.8) имеем

$$J(\hat{u}, \hat{v}) + \frac{1}{2}\psi^T F_1\psi = \psi^T\hat{z}(\vartheta) + \int_0^\vartheta(-\beta_u(t, \hat{u}(t)) + \beta_v(t, \hat{v}(t)))dt \tag{1.22}$$

Из равенства (1.17) следует, что

$$\beta_u(t, \hat{u}(t)) = \frac{\gamma_u^2(t)}{\sigma_u(t, \psi)}$$

Поэтому в силу формул (1.19), (1.21), (1.22) получаем

$$J(\hat{u}, \hat{v}) + \frac{1}{2}\psi^T F_1\psi =$$

$$= \psi^T z_0 + \int_0^\vartheta(\psi^T(\tilde{B}_u(t)\hat{u}(t) + \tilde{B}_v(t)\hat{v}(t)) - \beta_u(t, \hat{u}(t)) + \beta_v(t, \hat{v}(t)))dt =$$

$$= \psi^T z_0 + \int_0^\vartheta\left(-\frac{\psi^T P_u(t)\psi}{\sigma_u(t, \psi)} + \frac{\psi^T P_v(t)\psi}{\sigma_v(t, \psi)} - \frac{\gamma_u^2(t)}{\sigma_u(t, \psi)} + \frac{\gamma_v^2(t)}{\sigma_v(t, \psi)}\right)dt$$

Отсюда и из соотношений (1.13) получаем равенство (1.16).

Замечание 1.1. Из теоремы 1.2 следует, что оптимальные стратегии игроков явно выражаются через вектор сопряженных переменных ψ. Поэтому для определения оптимальных стратегий достаточно вычислить вектор ψ, решив уравнение $\psi = M(\psi)$. Вектор ψ имеет тот же смысл, что и вектор сопряженных переменных принципа максимума Л.С. Понтрягина. В данном случае вектор ψ не зависит от времени, так как дифференциальная игра имеет простую динамику (1.7).

В следующих двух разделах будут рассмотрены методы решения уравнения $\psi = M(\psi)$ и исследована сходимость этих методов. Из полученных результатов следует существование решения уравнения $\psi = M(\psi)$.

2. Вычисление вектора сопряженных переменных методом простой итерации. Используя функцию $\sigma_u(t, \psi)$, введенную формулой (1.13), определим функцию

$$\varrho_u(\psi) = \int_0^\vartheta\sigma_u(t, \psi)dt \tag{2.1}$$

Через $D_u(\psi)$ обозначим градиент функции $\varrho_u(\psi)$:

$$D_u(\psi) = \int_0^\vartheta\frac{P_u(t)\psi}{\sigma_u(t, \psi)}dt \tag{2.2}$$

Аналогично определим функцию $\varrho_v(\psi)$, через $D_v(\psi)$ обозначим ее градиент.

Из формулы (1.14) следует, что для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство

$$M(\psi) = F_1(z_0 - D_u(\psi) + D_v(\psi)) \tag{2.3}$$

Обозначим через $H_u(\psi)$, $H_\upsilon(\psi)$ матрицы вторых производных (матрицы Гессе) функций $\varrho_u(\psi)$, $\varrho_\upsilon(\psi)$:

$$H_u(\psi) = \int_0^\vartheta \frac{P_u(t)}{\sigma_u(t, \psi)}dt - \int_0^\vartheta \frac{P_u(t)\psi\psi^T P_u(t)}{\sigma_u^3(t, \psi)}dt \tag{2.4}$$

для $H_\upsilon(\psi)$ справедлива аналогичная формула.

Лемма 2.1. Для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^m$ матрицы $H_u(\psi)$, $H_\upsilon(\psi)$, $\bar{P}_u - H_u(\psi)$, $\bar{P}_\upsilon - H_\upsilon(\psi)$ неотрицательно определены.

Доказательство. Покажем, что для любого вектора $y \in \mathbb{R}^m$ справедливы неравенства

$$0 \le y^T H_u(\psi) y \le y^T \bar{P}_u y \tag{2.5}$$

Действительно, согласно равенствам (1.13) и (2.4)

$$y^T H_u(\psi) y = \int_0^\vartheta \frac{(y^T P_u(t) y)(\gamma_u^2(t) + \psi^T P_u(t)\psi) - (y^T P_u(t)\psi)^2}{\sigma_u^3(t, \psi)}dt \le$$

$$\le \int_0^\vartheta \frac{y^T P_u(t) y}{\gamma_u(t)}dt = y^T \bar{P}_u y$$

Кроме того, из неравенства Коши – Буняковского

$$(y^T P_u(t) y)(\psi^T P_u(t)\psi) \ge (y^T P_u(t)\psi)^2$$

получаем неравенство $0 \le y^T H_u(\psi) y$. Тем самым условие (2.5) доказано. Из этого условия следует неотрицательная определенность матриц $H_u(\psi)$ и $\bar{P}_u - H_u(\psi)$. Неотрицательная определенность матриц $H_\upsilon(\psi)$ и $\bar{P}_\upsilon - H_\upsilon(\psi)$ доказывается аналогично.

Обозначим

$$\alpha = \|\bar{P}_u\| + \|\bar{P}_\upsilon\|.$$

Лемма 2.2. Пусть выполнено неравенство

$$\alpha < 1 \tag{2.6}$$

Тогда отображение $\psi \mapsto M(\psi)$ (см. (1.14)) является сжимающим с коэффициентом α.

Доказательство. Воспользуемся леммой 2.1. Поскольку матрицы $\bar{P}_u$ и $H_u(\psi)$ симметричны и неотрицательно определены, то

$$\|\bar{P}_u\| = \max_{y \in \mathbb{R}^m:\, |y| = 1} y^T \bar{P}_u y, \quad \|H_u(\psi)\| = \max_{y \in \mathbb{R}^m:\, |y| = 1} y^T H_u(\psi) y$$

Отсюда и из неотрицательной определенности матрицы $\bar{P}_u - H_u(\psi)$ следует неравенство $\|H_u(\psi)\| \le \|\bar{P}_u\|$. Аналогично, $\|H_\upsilon(\psi)\| \le \|\bar{P}_\upsilon\|$.

Поскольку матрица Якоби отображения $\psi \mapsto M(\psi)$ равна $D_M(\psi) = -F_1 H_u(\psi) + F_1 H_\upsilon(\psi)$, $\|F_1\| = 1$, то согласно условию (2.6),

$$\|D_M(\psi)\| \le \|H_u(\psi)\| + \|H_\upsilon(\psi)\| \le \alpha < 1$$

Поэтому отображение $\psi \mapsto M(\psi)$ является сжимающим с коэффициентом α.

Из леммы 2.2 следует

Теорема 2.1. Если выполнено условие (2.6), то уравнение $\psi = M(\psi)$ имеет единственное решение $\psi \in \mathbb{R}^m$. Это решение можно найти методом простой итерации:

$$\psi_{k+1} = M(\psi_k), \quad \psi = \lim_{k \to \infty} \psi_k \tag{2.7}$$

При этом метод простой итерации сходится для любого начального приближения $\psi_0 \in \mathbb{R}^m$ с линейной скоростью:

$$|\psi_k - \psi| \le \alpha^k |\psi_0 - \psi| \tag{2.8}$$

3. Вычисление вектора сопряженных переменных методом Ньютона. Из соотношений (2.3), $F_1 F_1 = E_m$ следует, что уравнение $\psi = M(\psi)$ эквивалентно уравнению $D(\psi) = z_0$, где

$$D(\psi) = F_1\psi + D_u(\psi) - D_\upsilon(\psi) \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Поскольку значения вектор-функций $D_u(\psi)$, $D_\upsilon(\psi)$ равны градиентам скалярных функций $\varrho_u(\psi)$, $\varrho_\upsilon(\psi)$, то значение вектор-функции $D(\psi)$ равно градиенту скалярной функции

$$\varrho(\psi) = \frac{1}{2}\psi^T F_1 \psi + \varrho_u(\psi) - \varrho_\upsilon(\psi) \tag{3.2}$$

Поэтому уравнение $D(\psi) = z_0$ эквивалентно тому, что вектор сопряженных переменных ψ – стационарная точка функции $\psi \mapsto \varrho(\psi) - \psi^T z_0$.

Через $H(\psi)$ обозначим матрицу вторых производных (матрицу Гессе) функции $\varrho(\psi)$. Поскольку матрицы вторых производных функций $\varrho_u(\psi)$, $\varrho_\upsilon(\psi)$ равны $H_u(\psi)$, $H_\upsilon(\psi)$ соответственно, то

$$H(\psi) = F_1 + H_u(\psi) - H_\upsilon(\psi) \tag{3.3}$$

Разобьем матрицы $\bar{P}_u$ и $\bar{P}_\upsilon$ на блоки:

$$\bar{P}_u = \begin{Vmatrix} P^u_{11} & P^u_{12} \\ (P^u_{12})^T & P^u_{22} \end{Vmatrix}, \quad \bar{P}_\upsilon = \begin{Vmatrix} P^\upsilon_{11} & P^\upsilon_{12} \\ (P^\upsilon_{12})^T & P^\upsilon_{22} \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

где $P^u_{11}, P^\upsilon_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $P^u_{12}, P^\upsilon_{12} \in \mathbb{R}^{r\times s}$, $P^u_{22}, P^\upsilon_{22} \in \mathbb{R}^{s\times s}$, числа r и s определены формулой (1.5).

Лемма 3.1. Пусть

$$\|P^u_{22}\| < 1, \quad \|P^\upsilon_{11}\| < 1 \tag{3.5}$$

Тогда функция $\varrho(\psi)$ выпукла по ψ_1 и вогнута по ψ_2, где

$$\psi = \begin{Vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Vmatrix}, \quad \psi_1 \in \mathbb{R}^r, \quad \psi_2 \in \mathbb{R}^s$$

Доказательство. Разобьем матрицы $H(\psi)$, $H_u(\psi)$, $H_\upsilon(\psi)$ на блоки:

$$H(\psi) = \begin{Vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H^T_{12} & H_{22} \end{Vmatrix}$$

$$H_u(\psi) = \begin{Vmatrix} H_{11}^u & H_{12}^u \\ (H_{12}^u)^T & H_{22}^u \end{Vmatrix}, \quad H_v(\psi) = \begin{Vmatrix} H_{11}^v & H_{12}^v \\ (H_{12}^v)^T & H_{22}^v \end{Vmatrix}$$

$$H_{11}, H_{11}^u, H_{11}^v \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad H_{12}, H_{12}^u, H_{12}^v \in \mathbb{R}^{r \times s}, \quad H_{22}, H_{22}^u, H_{22}^v \in \mathbb{R}^{s \times s}$$

В силу леммы 2.1 матрицы H_{11}^u, H_{22}^v, $P_{11}^v - H_{11}^v$, $P_{22}^u - H_{22}^u$ неотрицательно определены. Отсюда, из формулы (3.3) и из неравенства $\|P_{11}^v\| < 1$ следует, что матрица вторых производных функции ρ по компонентам вектора ψ_1, равная

$$H_{11} = E_r + H_{11}^u - H_{11}^v = (E_r - P_{11}^v) + (P_{11}^v - H_{11}^v) + H_{11}^u$$

положительно определена. Следовательно, функция ρ выпукла по ψ_1. Аналогично функция ρ вогнута по ψ_2.

Замечание 3.2. Из леммы 3.1 и замечания 3.1 следует, что вектор сопряженных переменных ψ – это седловая точка функции $\psi \mapsto \rho(\psi) - \psi^T z_0$.

Далее будет показано, что при условиях (3.5) матрица $H(\psi)$ невырождена. При этих же условиях будет получена оценка нормы матрицы, обратной к $H(\psi)$, которая нужна для обоснования сходимости алгоритма вычисления вектора сопряженных переменных ψ. Для этого нам понадобится следующая лемма, относящаяся к линейной алгебре.

Лемма 3.2. Пусть заданы число $\mu > 0$ и матрица

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{Vmatrix}$$

где $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{r \times s}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{s \times s}$. Пусть матрица A симметрична, матрица $B = A_{11} - \mu E_r$ неотрицательно определена, матрица $C = A_{22} + \mu E_s$ неположительно определена. Тогда матрица A невырождена и $\|A^{-1}\| \le 1/\mu$.

Доказательство. Пусть задан произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^{r+s}$. Разобъем его на два вектора:

$$x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}, \text{ где } x_1 \in \mathbb{R}^r, \quad x_2 \in \mathbb{R}^s$$

Тогда

$$Ax = y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix}, \text{ где } y_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \quad y_2 = A_{12}^T x_1 + A_{22}x_2$$

Поскольку $A_{11} = B + \mu E_r$, $A_{22} = C - \mu E_s$, то

$$y_1 = Bx_1 + A_{12}x_2 + \mu x_1, \quad y_2 = A_{12}^T x_1 + Cx_2 - \mu x_2$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &|Ax|^2 = |y|^2 = |y_1|^2 + |y_2|^2 = \\ &= |Bx_1 + A_{12}x_2|^2 + 2\mu x_1^T(Bx_1 + A_{12}x_2) + \mu^2|x_1|^2 + \\ &+ |A_{12}^T x_1 + Cx_2|^2 - 2\mu x_2^T(A_{12}^T x_1 + Cx_2) + \mu^2|x_2|^2 \ge \\ &\ge 2\mu(x_1^T(Bx_1 + A_{12}x_2) - x_2^T(A_{12}^T x_1 + Cx_2)) + \mu^2|x|^2 = \\ &= 2\mu(x_1^T Bx_1 - x_2^T Cx_2) + \mu^2|x|^2 \ge \mu^2|x|^2 \end{aligned}$$

Поэтому $|Ax| \ge \mu|x|$. Отсюда следует невырожденность матрицы A и неравенство $\|A^{-1}\| \le 1/\mu$.

Пусть матрицы P_{11}^{υ} и P_{22}^{u} определены формулой (3.4). Определим число

$$\mu = \min\{1 - \|P_{22}^{u}\|, 1 - \|P_{11}^{\upsilon}\|\} \tag{3.6}$$

Лемма 3.3. Пусть выполнено условие (3.5). Тогда для любого $\psi \in \mathbb{R}^m$ матрица $H(\psi)$ невырождена и

$$\|H^{-1}(\psi)\| \le 1/\mu$$

Доказательство. В силу леммы 2.1 матрицы H_{11}^{u}, H_{22}^{υ}, $P_{11}^{\upsilon} - H_{11}^{\upsilon}$, $P_{22}^{u} - H_{22}^{u}$ неотрицательно определены. Из условия $\|P_{11}^{\upsilon}\| \le 1 - \mu$ следует, что матрица $(1-\mu)E_r - P_{11}^{\upsilon}$ неотрицательно определена. Поэтому матрица

$$H_{11} - \mu E_r = (1-\mu)E_r + H_{11}^{u} - H_{11}^{\upsilon} = ((1-\mu)E_r - P_{11}^{\upsilon}) + (P_{11}^{\upsilon} - H_{11}^{\upsilon}) + H_{11}^{u}$$

неотрицательно определена. Аналогично, матрица $H_{22} + \mu E_s$ неположительно определена. Применяя лемму 3.2, получаем требуемое утверждение.

Лемма 3.4. Отображение $\psi \mapsto H(\psi)$ удовлетворяет условию Липшица с константой

$$L_H = L_H^{u} + L_H^{\upsilon}; \quad L_H^{u} = 2\int_0^{\vartheta} \frac{\|P_u(t)\|^{3/2}}{\gamma_u^2(t)}, \quad L_H^{\upsilon} = 2\int_0^{\vartheta} \frac{\|P_{\upsilon}(t)\|^{3/2}}{\gamma_{\upsilon}^2(t)} \tag{3.7}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные векторы y, $\Delta\psi \in \mathbb{R}^m$. Из формулы (2.4) следует, что

$$y^T H_u(\psi) y = \int_0^{\vartheta} \frac{y^T P_u(t) y}{\sigma_u(t,\psi)} dt - \int_0^{\vartheta} \frac{(y^T P_u(t)\psi)^2}{\sigma_u^3(t,\psi)} dt$$

Используя формулу (1.13), вычислим производную

$$d_1 = \frac{d}{dt} y^T H_u(\psi + t\Delta\psi) y$$

в точке $t = 0$:

$$d_1 = -\int_0^{\vartheta} \frac{(y^T P_u(t) y)(\psi^T P_u(t)\Delta\psi)}{\sigma_u^3(t,\psi)} dt -$$

$$-\int_0^{\vartheta} \frac{2(y^T P_u(t)\psi)(y^T P_u(t)\Delta\psi)}{\sigma_u^3(t,\psi)} dt + \int_0^{\vartheta} \frac{3(y^T P_u(t)\psi)^2(\psi^T P_u(t)\Delta\psi)}{\sigma_u^5(t,\psi)} dt$$

В силу неравенства Коши – Буняковского справедливы неравенства

$$|d_1| \le \int_0^{\vartheta} \frac{3(y^T P_u(t) y)\sqrt{\Delta\psi^T P_u(t)\Delta\psi}\sqrt{\psi^T P_u(t)\psi}}{\sigma_u^3(t,\psi)} dt +$$

$$+\int_0^{\vartheta} \frac{3(y^T P_u(t) y)\sqrt{\Delta\psi^T P_u(t)\Delta\psi}(\psi^T P_u(t)\psi)^{3/2}}{\sigma_u^5(t,\psi)} dt \le$$

$$\le 3C\int_0^{\vartheta} \frac{(y^T P_u(t) y)\sqrt{\Delta\psi^T P_u(t)\Delta\psi}}{\gamma_u^2(t)} dt \le 3C\left(\int_0^{\vartheta} \frac{\|P_u(t)\|^{3/2}}{\gamma_u^2(t)} dt\right)|y|^2|\Delta\psi|$$

где

$$C = \max_{x \in \mathbb{R}}\left(\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}\right) = 4 \cdot 5^{-5/4} < \frac{2}{3}$$

Следовательно, отображение $\psi \mapsto H_u(\psi)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_H^u.

Аналогично, отображение $\psi \mapsto H_\upsilon(\psi)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_H^υ.

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие (3.5). Пусть задан вектор $\psi_0 \in \mathbb{R}^m$. Пусть последовательность $\{\psi_k\}$ определяется методом Ньютона

$$\psi_{k+1} = \psi_k + (H(\psi_k))^{-1}(z_0 - D(\psi_k)) \tag{3.8}$$

Погрешностью решения уравнения $D(\psi) = z_0$ на шаге k метода (3.8) будем называть число

$$\delta_k = \frac{L_H}{2\mu^2}|D(\psi_k) - z_0|$$

где числа μ, L_H определяются формулами (3.6), (3.7) соответственно. Пусть погрешность начального приближения меньше 1:

$$\delta_0 < 1 \tag{3.9}$$

Тогда метод Ньютона (3.8) сходится к решению уравнения $D(\psi) = z_0$ с квадратичной скоростью:

$$\delta_{k+1} \le \delta_k^2 \tag{3.10}$$

Доказательство. Поскольку, согласно лемме 3.4, матричная функция $H(\psi)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_H, то из формулы Тейлора следует, что

$$|D(\psi_{k+1}) - D(\psi_k) - H(\psi_k)(\psi_{k+1} - \psi_k)| \le \frac{1}{2}L_H|\psi_{k+1} - \psi_k|^2.$$

Из формулы (3.8) получаем: $D(\psi_k) + H(\psi_k)(\psi_{k+1} - \psi_k) = z_0$. Поэтому

$$|D(\psi_{k+1}) - z_0| \le \frac{1}{2}L_H|\psi_{k+1} - \psi_k|^2 \tag{3.11}$$

Так как в силу леммы 3.3 $\|H^{-1}(\psi)\| \le 1/\mu$, то в силу равенства (3.8)

$$|\psi_{k+1} - \psi_k| \le |D(\psi_k) - z_0|/\mu$$

Отсюда и из неравенства (3.11) следует соотношение (3.10). Из соотношений (3.9), (3.10) по индукции получаем, что $\delta_k \le \delta_0^{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$. Теорема доказана.

Как известно, если начальное приближение недостаточно точно, метод Ньютона может расходиться. Поэтому получение начального приближения, из которого метод Ньютона сходится, – важная задача. Рассмотрим один из возможных методов получения начального приближения, обеспечивающего сходимость метода Ньютона.

Лемма 3.5. Пусть выполнено условие (3.5). Определим натуральное число N из условия

$$N \geq 2|z_0|L_H/\mu^2 \tag{3.12}$$

Определим

$$z_k = kz_0/N, \quad \psi_1^0 = 0, \quad \psi_{k+1}^0 = \psi_k^0 + (H(\psi_k^0))^{-1}(z_k - D(\psi_k^0)), \quad k \in \{1, \ldots, N\} \tag{3.13}$$

Тогда вектор $\psi_0 = \psi_N^0$ удовлетворяет неравенству (3.9).

Доказательство. Аналогично доказательству неравенства (3.10) по индукции получаем, что при $k \in \{1, \ldots, N\}$ справедливо неравенство

$$|D(\psi_k^0) - z_k| \leq 2|z_0|/N$$

Отсюда и из условия (3.12) получаем доказываемое неравенство (3.9).

Рассмотрим вопрос о взаимной зависимости условия (3.5), обеспечивающего сходимость метода Ньютона, и условия неотрицательной определенности матриц $\bar{P}_u + \bar{P}_u F_1 \bar{P}_u$, $\bar{P}_\upsilon - \bar{P}_\upsilon F_1 \bar{P}_\upsilon$, которое, согласно теореме 1.1, обеспечивает существование седловой точки дифференциальной игры (1.1)–(1.3).

Лемма 3.6. Пусть заданы матрицы

$$F = \left\| \begin{matrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_s \end{matrix} \right\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{matrix} \right\|$$

где $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{r \times s}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{s \times s}$. Пусть матрица A симметрична и неотрицательно определена. Тогда: 1) из неравенства $\|A_{22}\| \leq 1$ следует неотрицательная определенность матрицы $A + AFA$; 2) обратное неверно.

Доказательство. 1. Пусть $\|A_{22}\| \leq 1$. Покажем, что матрица $A + AFA$ неотрицательно определена. Предположим противное: существует вектор $x_0 \in \mathbb{R}^{r+s}$: $x_0^T(A + AFA)x_0 < 0$. Поскольку матрица A симметрична и неотрицательно определена, то существует матрица $S \in \mathbb{R}^{m \times (r+s)}$ (m – ранг матрицы A), такая, что $A = S^TS$. Следовательно, существует вектор $y_0 = Sx_0 \in \mathbb{R}^m$, такой, что $y_0^T(E_m + SFS^T)y_0 < 0$. Поэтому

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m:\, |y| = 1} y^T(E_m + SFS^T)y < 0$$

Пусть минимум достигается на векторе y_1. Тогда существует число λ, такое, что y_1 – стационарная точка функции Лагранжа

$$y \mapsto y^T(E_m + SFS^T)y - \lambda y^Ty$$

т.е.

$$(E_m + SFS^T)y_1 = \lambda y_1 \tag{3.14}$$

Поскольку

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m:\, |y| = 1} y^T(E_m + SFS^T)y = y_1^T(E_m + SFS^T)y_1 = \lambda y_1^Ty_1 < 0$$

то $\lambda < 0$ и $y_1 \neq 0$.

Из уравнения (3.14) следует, что $S^T(E_m + SFS^T)y_1 = \lambda S^T y_1$, следовательно, $(S^T + AFS^T)y_1 = \lambda S^T y_1$, т.е.

$$(E_{r+s} + AF)z = \lambda z \tag{3.15}$$

где $z = S^T y_1 \in \mathbb{R}^{r+s}$. Так как столбцы матрицы S^T линейно независимы и $y_1 \neq 0$, то $z \neq 0$.

Запишем

$$z = \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Vmatrix}, \text{ где } z_1 \in \mathbb{R}^r, \quad r_2 \in \mathbb{R}^s$$

Тогда уравнение (3.15) принимает вид системы

$$z_1 + A_{11}z_1 - A_{12}z_2 - \lambda z_1 = 0$$

$$z_2 + A_{12}^T z_1 - A_{22}z_2 - \lambda z_2 = 0$$

Умножая первое уравнение системы слева на z_1^T, а второе – на z_2^T и складывая, получим уравнение

$$z_1^T(A_{11} + (1-\lambda)E_r)z_1 + z_2^T((1-\lambda)E_s - A_{22})z_2 = 0 \tag{3.16}$$

Так как $\lambda < 0$ и матрица A_{11} неотрицательно определена, то матрица $A_{11} + (1 - \lambda)E_r$ положительно определена. Так как $\lambda < 0$ и $\|A_{22}\| \le 1$, то матрица $(1 - \lambda)E_s - A_{22}$ положительно определена. Поэтому уравнение (3.16) противоречит условию $z \neq 0$.

2. Покажем, что из неотрицательной определенности матрицы $A + AFA$ не следует неравенство $\|A_{22}\| \le 1$. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 5/2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

Тогда матрицы A и

$$A + AFA = \begin{Vmatrix} 19/4 & 3 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$$

положительно определены, а $\|A_{22}\| = 2 > 1$.

Замечание 3.3. Пусть выполнены условия теоремы 3.1: $\|P_{22}^u\| < 1$ и $\|P_{11}^v\| < 1$. Тогда в силу леммы 3.6 матрица $\bar{P}_u + \bar{P}_u F_1 \bar{P}_u$ неотрицательно определена. Аналогично, матрица $\bar{P}_v - \bar{P}_v F_1 \bar{P}_v$ неотрицательно определена. Отсюда в силу теорем 1.1 и 1.2 получаем существование седловой точки дифференциальной игры и справедливость формул (1.15), (1.16) для оптимальных стратегий и гарантированного результата.

4. Дифференциальная игра с чисто геометрическими ограничениями на управление преследователя. В этом разделе будем рассматривать дифференциальную игру (ДИ) (1.1)–(1.3), такую, что терминальное слагаемое $x^T(\vartheta)Fx(\vartheta)/2$ функционала качества – выпуклая функция, т.е. матрица F неотрицательно определена. В этом случае игрок u, минимизирующий функционал качества, будет стремиться уменьшить длину фазового вектора. Игрок v будет стремиться увеличить длину фазового вектора. В этом смысле игрока u будем называть преследователем, а игрока v – убегающим.

Будем рассматривать ДИ, для которой $\gamma_u(t) = 0$. Такую ДИ обозначим через ДИ$_0$ и будем называть ДИ с чисто геометрическими ограничениями управления преследователя.

ДИ, для которой $\gamma_u(t) = \varepsilon \geq 0$, обозначим через ДИ$_\varepsilon$. Для любых допустимых программных управлений $u \in U$, $\upsilon \in V$ значение функционала качества в ДИ$_\varepsilon$ будем обозначать через $J_\varepsilon(u, \upsilon)$.

Оптимальную программную стратегию преследователя в ДИ$_\varepsilon$ будем обозначать через $\hat{u}_\varepsilon$ и называть ε-стратегией преследователя для ДИ$_0$.

Рассматриваемая ε-стратегия $\hat{u}_\varepsilon$ имеет два преимущества по сравнению с точной оптимальной гарантированной стратегией $\hat{u}_0$. Во-первых, ε-стратегия удовлетворяет условию Липшица как функция времени и параметров игры. Во-вторых, алгоритм, определяющий ε-стратегию, прост и эффективен с вычислительной точки зрения. Следует иметь в виду, что при $\varepsilon \to 0$ константы Липшица ε-стратегии стремятся к бесконечности, а скорость сходимости рассматриваемых алгоритмов падает. Это говорит о том, что параметр ε, характеризующий точность ε-стратегии, следует выбирать не слишком маленьким.

Теорема 4.1. Пусть матрица F неотрицательно определена и $\|\bar{P}_\upsilon\| < 1$. Тогда для ДИ$_0$ существует $(\hat{u}_0, \hat{\upsilon}_0)$ – седловая точка в классе программных стратегий. Значение функционала качества, гарантированного ε-стратегией преследователя не превышает точное значение оптимального гарантированного результата плюс $\varepsilon\vartheta$:

$$J_0(\hat{u}_\varepsilon, \upsilon) \leq J_0(\hat{u}_0, \hat{\upsilon}_0) + \varepsilon\vartheta \quad \forall \upsilon \in V \tag{4.1}$$

причем ε-стратегия преследователя определяется формулой

$$\hat{u}_\varepsilon(t) = -\frac{G_u^{-1}(t)B_u^T(t)\Phi^T(t)\psi}{\sqrt{\varepsilon^2 + \psi^T P_u(t)\psi}}$$

Здесь вектор сопряженных переменных ψ – решение уравнения $D(\psi) = z_0$, где

$$z_0 = \Phi(0)x_0, \quad D(\psi) = \psi + \int_0^\vartheta \frac{P_u(t)\psi}{\sqrt{\varepsilon^2 + \psi^T P_u(t)\psi}}dt - \int_0^\vartheta \frac{P_\upsilon(t)\psi}{\sqrt{\gamma_\upsilon^2(t) + \psi^T P_\upsilon(t)\psi}}dt$$

Доказательство. Поскольку матрица F неотрицательно определена, то для любой стратегии $\upsilon \in V$ функционал $u \mapsto J_0(u, \upsilon)$ является выпуклым на множестве U. Из неотрицательной определенности матриц $\bar{P}_\upsilon$ и $E_m - \bar{P}_\upsilon$ следует неотрицательная определенность матрицы $\bar{P}_\upsilon - \bar{P}_\upsilon F_1 \bar{P}_\upsilon$, где $F_1 = E_m$. Отсюда по аналогии с доказательством леммы 1.2 получаем вогнутость функционала $\upsilon \mapsto J_0(u, \upsilon)$ на множестве V при любой стратегии $u \in U$.

Аналогично доказательству леммы 1.5 можно показать полунепрерывность снизу по u и полунепрерывность сверху по υ функционала $J_0(u, \upsilon)$ в смысле слабой топологии пространств L_p^2, L_q^2 соответственно. Поскольку, согласно лемме 1.3, множества U и V – выпуклые компакты в смысле указанной топологии, то в силу теоремы Неймана получаем существование седловой точки $(\hat{u}_0, \hat{\upsilon}_0)$ функционала J_0.

Из формул (1.2), (1.3) следует, что для любых допустимых программных стратегий $u \in U$, $\upsilon \in V$ справедливы неравенства

$$J_\varepsilon(u, \upsilon) \leq J_0(u, \upsilon) \leq J_\varepsilon(u, \upsilon) + \varepsilon\vartheta$$

Поэтому для любой допустимой программной стратегии $\upsilon \in V$ имеют место неравенства

$$J_0(\hat{u}_\varepsilon, \upsilon) \le J_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, \upsilon) + \varepsilon\vartheta \le J_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, \hat{\upsilon}_\varepsilon) + \varepsilon\vartheta$$

Отсюда и из соотношений

$$J_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, \hat{\upsilon}_\varepsilon) = \min_{u \in U}\max_{\upsilon \in V} J_\varepsilon(u, \upsilon) \le \min_{u \in U}\max_{\upsilon \in V} J_0(u, \upsilon) = J_0(\hat{u}_0, \hat{\upsilon}_0)$$

следует неравенство (4.1). Выражение для ε-стратегии следует из формулы (1.15).

Применяя теорему 3.1 к $ДИ_\varepsilon$, получаем следующую теорему о сходимости метода Ньютона для вычисления вектора ψ, по которому определяется ε-стратегия преследователя.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Пусть последовательность $\{\psi_n\}$ определена формулой (3.8), где начальное приближение $\psi_0 = \psi_N^0$ определяется формулой (3.13), причем

$$N \ge \frac{2|z_0|L_H^\varepsilon}{\mu^2}, \quad \mu = 1 - \|\bar{P}_\upsilon\|, \quad L_H^\varepsilon = 2\int_0^\vartheta\left(\frac{\|P_u(t)\|^{3/2}}{\varepsilon^2} + \frac{\|P_\upsilon(t)\|^{3/2}}{\gamma_\upsilon^2(t)}\right)dt \tag{4.2}$$

Тогда последовательность $\{\psi_n\}$ сходится к решению уравнения $D(\psi) = z_0$ с квадратичной скоростью:

$$|D(\psi_{n+1}) - z_0| \le \frac{L_H^\varepsilon}{2\mu^2}|D(\psi_n) - z_0|^2$$

Замечание 4.1. Поскольку матрица $P_u(t)$ не зависит от $\gamma_u(t)$, то из формулы (1.9) следует, что $\|\bar{P}_u\| \sim 1/\varepsilon$. Поэтому при достаточно малых ε неравенство (2.6) не выполнено и метод простых итераций, описанный в теореме 2.1, может расходиться.

Замечание 4.2. Если матрица F неотрицательно определена и выполнено неравенство $\|\bar{P}_\upsilon\| < 1$, то в силу леммы 3.1 функция $\varrho(\psi)$ выпукла. Поэтому, согласно замечанию 3.1, вектор сопряженных переменных ψ – это точка минимума функции $\psi \mapsto \varrho(\psi) - \psi^T z_0$.

Замечание 4.3. Из формулы (4.2) следует, что $N \sim 1/\varepsilon^2$ при $\varepsilon \to +0$. Поэтому при малых ε число N становится очень большим. В этом случае алгоритм определения начального приближения ψ_0, задаваемый формулой (3.13), может быть весьма трудоемким. Более эффективными могут оказаться известные алгоритмы выпуклой оптимизации, приближенно находящие точку минимума выпуклой функции $\psi \mapsto \varrho(\psi) - \psi^T z_0$. Опыт численных расчетов показывает, что во многих случаях метод Ньютона (3.8) сходится из начального приближения $\psi_0 = 0$. В этих случаях отпадает необходимость выполнять трудоемкий алгоритм (3.13).

5. Дифференциальные игры без геометрических ограничений управления игроков. Рассмотрим теперь предельный случай ДИ (1.1)–(1.3) при

$$G_\upsilon(t) = \varepsilon G_\upsilon^0(t), \quad \gamma_\upsilon(t) = 1/\varepsilon, \quad \varepsilon \to +0 \tag{5.1}$$

где $G_\upsilon^0(t)$ – заданная симметричная, положительно определенная матрица, кусочно непрерывно зависящая от времени t.

Имея в виду предельное соотношение

$$\beta_\upsilon(t, \upsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1 - \upsilon^T G_\upsilon(t)\upsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\upsilon^T G_\upsilon^0(t)\upsilon + o(1) \text{ при } \varepsilon \to +0$$

будем говорить, что предельным случаем ДИ (1.1)–(1.3) при условиях (5.1) является ДИ (1.1), (1.2), где

$$\beta_u(t, u) = \gamma_u(t)\sqrt{1 - u^T G_u(t)u} \quad \beta_\upsilon(t, \upsilon) = -\frac{1}{2}\upsilon^T G_\upsilon^0(t)\upsilon \tag{5.2}$$

Определим матрично-значную функцию

$$P_\upsilon^0(t) = \Phi(t)B_\upsilon(t)(G_\upsilon^0(t))^{-1}B_\upsilon^T(t)\Phi^T(t) \tag{5.3}$$

Тогда в соответствии с обозначениями (1.9):

$$P_u(t) = \Phi(t)B_u(t)G_u^{-1}(t)B_u^T(t)\Phi^T(t)$$

$$\bar{P}_u = \int_0^\vartheta \frac{1}{\gamma_u(t)}P_u(t)dt, \quad \bar{P}_\upsilon = \int_0^\vartheta P_\upsilon^0(t)dt$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теорем 1.1, 1.2, получаем следующую теорему.

Теорема 5.1. Пусть матрицы $\bar{P}_u + \bar{P}_u F_1 \bar{P}_u$ и $\bar{P}_\upsilon - \bar{P}_\upsilon F_1 \bar{P}_\upsilon$ неотрицательно определены. Тогда для ДИ (1.1), (1.2), (5.2) существует седловая точка в классе программных стратегий. Оптимальные программные стратегии игроков определяются формулами

$$\hat{u}(t) = -\frac{G_u^{-1}(t)B_u^T(t)\Phi^T(t)\psi}{\sigma_u(t, \psi)}, \quad \hat{\upsilon}(t) = (G_\upsilon^0(t))^{-1}B_\upsilon^T(t)\Phi^T(t)\psi \tag{5.4}$$

Вектор сопряженных переменных ψ определяется из уравнения $D(\psi) = z_0$, где

$$D(\psi) = F_1\psi + \int_0^\vartheta \frac{P_u(t)\psi}{\sigma_u(t, \psi)}dt - \bar{P}_\upsilon\psi, \quad z_0 = \Phi(0)x_0$$

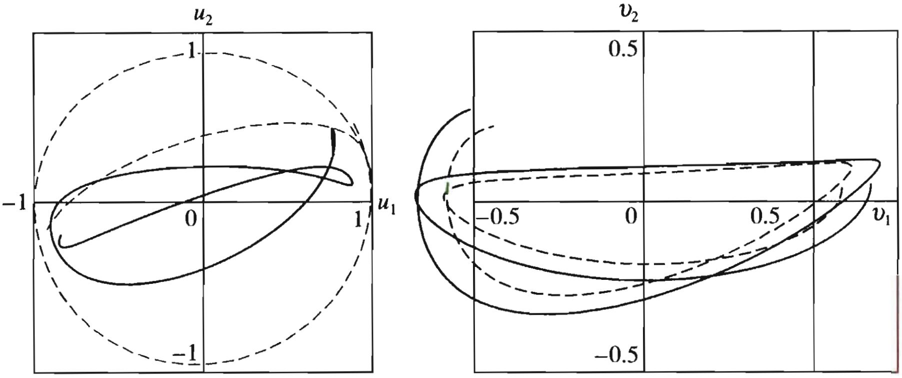
Функция цены ДИ (оптимальный гарантированный результат) определяется формулой

$$J(\hat{u}, \hat{\upsilon}) = \psi^T z_0 - \frac{1}{2}\psi^T F_1\psi - \int_0^\vartheta \sqrt{\sigma_u(t, \psi)}dt \tag{5.5}$$

Решение уравнения $D(\psi) = z_0$ можно находить методом простых итераций или методом Ньютона, подобно тому, как это делалось в теоремах 2.1, 3.1.

Аналогично можно рассмотреть предельный случай ДИ (1.1)–(1.3) при условиях(5.1) с заменой υ на u.

В предельном случае, когда одновременно выполняются условия (5.1) и соответствующие условия для игрока u, ДИ (1.1)–(1.3) превращается в известную линейно-квадратичную ДИ ([1], с. 160).



Фиг. 1

6. Пример дифференциальной игры. В качестве примера рассмотрим две ДИ вида (1.1)–(1.3) с параметрами $n = 4$, $p = q = 2$, $\vartheta = 12$, $F = E_4$, $G_u = G_v = E_2$, $\gamma_v(t) = 16$

$$x_0 = \left\| \begin{matrix} 9 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \end{matrix} \right\|, \quad A(t) = \left\| \begin{matrix} 0.1 & 0.9 & -0.1 & 0.1 \\ -1.0 & -0.2 & 0.2 & -0.3 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 1.5 \\ -0.1 & 0.2 & -1.4 & -0.3 \end{matrix} \right\|$$

$$B_u(t) = \left\| \begin{matrix} 1.0 & 0.2 \\ 0.3 & -0.3 \\ -0.1 & 0.9 \\ 0.5 & -0.2 \end{matrix} \right\|, \quad B_v(t) = \left\| \begin{matrix} 0.7 & 0.1 \\ 1.2 & 0.2 \\ 0.1 & -0.3 \\ -0.3 & 1.1 \end{matrix} \right\|$$

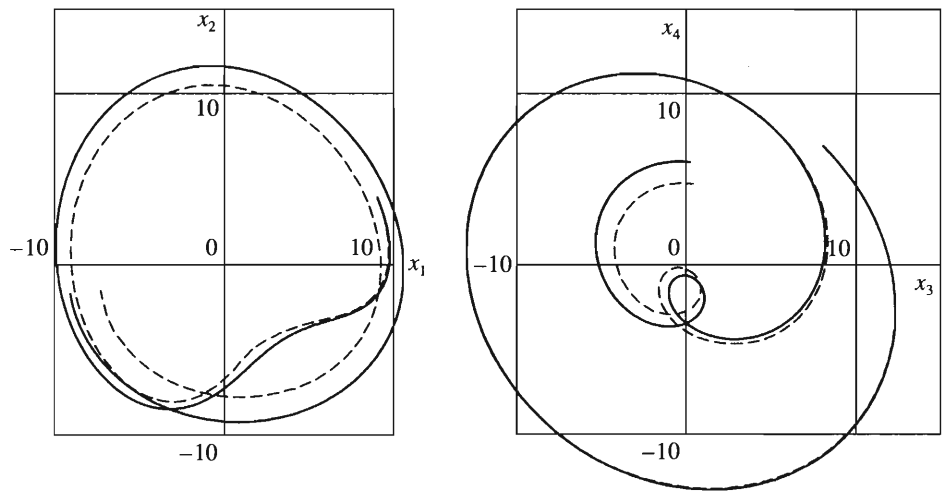
Для первой ДИ $\gamma_u^1(t) = 5$, для второй – $\gamma_u^2(t) = 0.5$.

Численный расчет дает следующие значения векторов сопряженных координат для первой и второй ДИ:

$$\psi^1 = \left\| \begin{matrix} -9.03 \\ -1.65 \\ 0.178 \\ 6.06 \end{matrix} \right\|, \quad \psi^2 = \left\| \begin{matrix} -7.23 \\ -1.44 \\ 0.376 \\ 4.78 \end{matrix} \right\|$$

На фиг. 1 изображены годографы векторов оптимальных управлений для игроков u и v. На фиг. 2 показаны проекции траектории фазового вектора $x(t)$, соответствующей оптимальным управлениям. Графики для первой ДИ показаны сплошными, а для второй – штриховыми линиями.

Приведенные графики наглядно демонстрируют некоторые свойства ДИ с эллипсоидальными штрафами. Рассматриваемые ДИ различаются лишь штрафным коэффициентом, определяющим зависимость функционала качества от управления игрока u. Поскольку штрафной коэффициент во второй ДИ меньше, то оптимальное управление игрока u в этой ДИ больше по абсолютной величине и ближе к границе допустимых значений (см. фиг. 1). В результате в конечный момент времени абсолютное значение фазового вектора во второй ДИ меньше, чем в первой (см. фиг. 2).



Фиг. 2

В рассматриваемых ДИ терминальное слагаемое функционала качества равно квадрату длины фазового вектора. Поэтому производная функционала по фазовому вектору будет уменьшаться при уменьшении абсолютной величины фазового вектора. Так как во второй ДИ в конечный момент времени абсолютное значение фазового вектора меньше, то управление игрока v во второй ДИ меньше влияет на значение терминального слагаемого, чем в первой. Из-за этого во второй ДИ игроку v выгоднее выбирать управление, меньшее по абсолютной величине, чем в первой. Этим игрок v может уменьшить штрафное слагаемое функционала качества. На фиг. 1 видно, что абсолютное значение оптимального управления игрока v во второй ДИ действительно меньше, чем в первой.

Автор посвящает статью восьмидесятилетию академика Н.Н. Красовского.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-14053).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
2. *Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В.* Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр // Мат. сб. 2001. Т. 192. № 10. С. 95–122.
3. *Иванов Г. Е.* Гарантированное управление в дифференциальных играх с эллипсоидальной платой // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 598–607.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. С. 623.
5. *Rudin W.* Functional Analysis. N. Y., etc.: McGraw-Hill, 1973 = *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир. 1975. С. 443.
6. *Нейман Дж.фон.* К теории стратегических игр // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 173–204.

Москва
e-mail: givanov@math.mipt.ru

Поступила в редакцию
30.X.2003