

УДК 62-50

© 2004 г. С. А. Вдовин, А. М. Тарасьев, В. Н. Ушаков

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ИНТЕГРАТОРА БРОКЕТТА

Методами теории оптимального управления [1, 2] решается задача построения множеств достижимости для нелинейной динамической системы, известной как неголономный интегратор Брокетта [3]. Доказывается, что граница множеств достижимости характеризуется точками оптимальных траекторий, построенных для задачи управления с интегральным показателем качества, задающим площадь фигуры, ограничиваемой траекторией движения управляемой системы. Задача заключается в максимизации этой площади. Такая постановка близка к известной в вариационном исчислении задаче Дидоны о построении фигуры максимальной площади с заданным периметром. Предлагается алгоритм построения оптимальных траекторий и исследуются их свойства. В основу алгоритма положены результаты решения частного случая задачи оптимального управления с замкнутой траекторией движения. Для построенных оптимальных траекторий проверены необходимые условия оптимальности принципа максимума Понтрягина. Выведены аналитические формулы для функции цены задачи управления и выполнена проверка необходимых и достаточных условий оптимальности решения с использованием минимаксных неравенств А. И. Субботина для уравнений Гамильтона – Якоби.

Интегратор Брокетта [3] – один из первых классических примеров системы, для которой решение задачи управления требует введения нелинейного (разрывного) закона управления. После подходящей замены переменных эта система описывает поведение многих механических объектов: колесного мобильного робота, асинхронного электродвигателя с большим коэффициентом усиления контурных токов, твердого тела с двумя управляющими параметрами корректировки скорости. Исследованию этой системы посвящены работы многих авторов [4–7]. Были рассмотрены [4] задачи стабилизации системы интегратора Брокетта с помощью разрывных законов управления и предложены экспоненциальные оценки сходимости системы к равновесию. В рамках проксимального анализа доказывалось [5], что в системе интегратора Брокетта не существует непрерывных стратегий стабилизации. Получена [6] внутренняя оценка множества достижимости системы.

Отметим, что задачи управления механическими системами изучались в работах [7, 8], результаты которых используются ниже, при исследовании замкнутых оптимальных траекторий движения объекта.

Задача исследуется с помощью методов теории оптимального управления [1, 2, 9] и теории дифференциальных игр [10–12]. Основу конструкции составляют траектории, выводящие систему на границу множества достижимости [1, 2, 9, 10]. Для этих траекторий выводятся необходимые условия принципа максимума Понтрягина [2]. Параллельно с построением множеств достижимости решается задача аналитического вычисления функции цены. Для аналитических формул функции цены проверяются необходимые и достаточные условия оптимальности в виде дифференциальных неравенств А.И. Субботина [11–15].

1. Постановка задачи 1 построения множества достижимости и анализ свойств множества достижимости. Рассматривается управляемая система – интегратор Брокетта

$$\dot{X}_1 = U_1, \quad \dot{X}_2 = U_2, \quad \dot{X}_3 = X_1 U_2 - X_2 U_1, \quad X(0) = (0, 0, 0) \quad (1.1)$$

$$|U_1| \leq 1, \quad |U_2| \leq 1 \quad (1.2)$$

Здесь $X = (X_1, X_2, X_3)$ – фазовый вектор системы, $U_j = U_j(t)$ ($j = 1, 2$) – управления, $t \in [0, \infty)$ – время.

Требуется найти множества достижимости (МД) $A = A(T)$ системы в момент времени T , $0 \leq t \leq T$, $T \in [0, \infty)$, т.е. определить множество точек $(X_1(T), X_2(T), X_3(T))$, в которые приходит система (1.1) в момент времени T при произвольном выборе измеримых управлений

$$U_j = U_j(t), \quad |U_j(t)| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad j = 1, 2$$

Определение 1. Допустимыми управлениями $U_1(t)$, $U_2(t)$ будем называть измеримые функции, удовлетворяющие ограничениям (1.2).

Определение 2. Допустимой траекторией будем называть траекторию $X(t)$, $t \in [0, T]$, системы (1.1), порожденную допустимым управлением.

Под допустимой траекторией $(X_1(t), X_2(t))$, $t \in [0, T]$, в плоскости X_1, X_2 будем понимать проекцию допустимой траектории $X(t)$ на плоскость X_1, X_2 .

Квадрат с центром в начале координат и стороной, равной 2 (обозначим его символом P , ∂P – граница квадрата P), согласно ограничениям (1.2) представляет собой множество допустимых значений вектора $U_1(t)$, $U_2(t)$.

Свойства траекторий.

Свойство 1. Проекция МД на плоскость X_1, X_2 представляет собой квадрат K с центром в начале координат и стороной $2T$.

Доказательство. Для координаты $X_1(T)$ справедливо соотношение

$$X_1(T) = \int_0^T U_1(t) dt$$

Согласно первому ограничению (1.2) имеем $-T \leq X_1(T) \leq T$. Аналогичное выражение можно записать для $X_2(T)$.

Для построения МД достаточно найти для каждой точки (X_1, X_2) квадрата K множество $\{X_1(T), X_2(T), X_3(T) : X_1(T) = X_1, X_2(T) = X_2\}$, в которые может прийти система в момент времени T .

Определение 3. Вектором результирующего перемещения (обозначим его V_R) будем называть вектор в плоскости X_1, X_2 , соединяющий начало координат $(0, 0)$ с конечным состоянием траектории $(X_1(T), X_2(T))$.

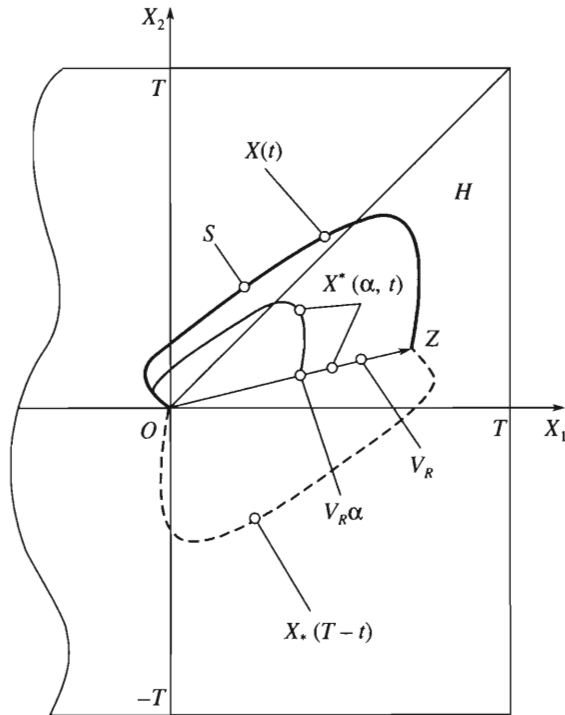
Пусть $S = (X_1(t), X_2(t))$ – допустимая траектория, порожденная допустимым управлением $(U_1(t), U_2(t))$. Дополним S до замкнутой кривой L отрезком ZO , соединяющим точку $(X_1(T), X_2(T))$ с началом координат O , как показано на фиг. 1. Пусть D – область, ограниченная кривой L . Символом $L^+(L^-)$ обозначим кривую L с направлением обхода против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Свойство 2. Для траекторий $X(T)$, $t \in [0, T]$, системы (1.1) справедливы следующие интегральные соотношения:

$$X_3(T) = -2 \int_L X_2 dX_1, \quad X_3(T) = -2 \iint_D dX_2 dX_1$$

Доказательство. Согласно формуле Грина имеем

$$\iint_D dX_2 dX_1 = - \int_{L^+} X_2 dX_1 = \int_{L^-} X_2 dX_1 = \int_S X_2 dX_1 + \int_{ZO} X_2 dX_1 = \int_S X_2 dX_1 - \frac{X_1(T)X_2(T)}{2} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Интегрируя по частям уравнения динамики (1.1), преобразуем выражение для $X_3(T)$ следующим образом:

$$X_3(T) = X_1(T)X_2(T) - 2 \int_0^T X_2(t) dX_1(t) = 2 \iint_D dX_2 dX_1 = -2 \int_L X_2 dX_1 \quad (1.4)$$

Здесь использованы равенства (1.3).

Отметим, что значение $X_3(T)$ определяется с точностью до знака площадью фигуры, ограничиваемой кривой L .

Если вектор V_R – нулевой, то в последнем интеграле (1.4) кривые L и S совпадают.

Рассмотрим следующие симметричные преобразования допустимой траектории S : симметрия S_1, S_2 относительно осей координат X_1, X_2 , симметрия S_3, S_4 относительно биссектрис первого и второго координатного углов, центральная симметрия S_5 относительно середины вектора результирующего перемещения.

Утверждение 1. Симметрии S_1, \dots, S_5 – допустимые траектории на плоскости X_1, X_2 .

Доказательство. Пусть $(U_1(t), U_2(t))$ – допустимое управление. Для построения S_3 в качестве порождающего допустимого управления достаточно взять симметричное управление

$$U_1^*(t) = U_2(t), \quad U_2^*(t) = U_1(t) \quad (1.5)$$

Это можно сделать, так как множества допустимых значений для U_1 и U_2 совпадают. Для построения S_4 достаточно поменять знаки обеих координат управления (1.5). Для построения $S_1(S_2)$ следует поменять знак первой (второй) координаты управления (1.5).

Для построения S_5 следует выбрать управление

$$U_1^*(t) = U_1(T-t), \quad U_2^*(t) = U_2(T-t)$$

При таком отображении точки $X_*(T-t)$ и $X(t)$ симметричны (фиг. 1).

Покажем, что такой допустимый путь S_5 действительно симметричен исходному пути S относительно середины вектора V_R . Для такой симметрии должно выполняться соотношение

$$X_* = V_R/2 + (V_R/2 - X) = V_R - X$$

Оно проверяется по определению допустимого управления $U^*(t)$. Действительно,

$$\begin{aligned} X^*(T-t) &= \int_0^{T-t} U^*(\tau) d\tau = \int_0^{T-t} U(T-\tau) d\tau = \\ &= \int_0^T U(T-\tau) d\tau - \int_t^T U(T-\tau) d\tau = X(T) - X(t) \end{aligned}$$

Следствие. Из утверждения 1 для симметрии S_5 следует формула симметрии для третьей координаты движения: $X_3^*(T) = -X_3(T)$. В силу этой симметрии достаточно строить МД только для положительной (отрицательной) третьей координаты.

Доказательство. Площади фигур, ограниченных симметричными траекториями, одинаковы. По свойству 2 модуль координаты $X_3(T)$ равен удвоенной площади фигуры, ограниченной дополненной траекторией движения. При изменении направления обхода знак координаты $X_3(T)$ меняется на противоположный.

Введем в рассмотрение множество H точек, принадлежащих квадрату K и расположенных не выше биссектрисы первого координатного угла, в первом квадранте (фиг. 1). Зафиксируем точку $Z \in H$. Рассмотрим траектории системы $(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$, для которых конец результирующего вектора V_R в плоскости X_1, X_2 совпадает с Z .

Пусть $M = M(Z)$ – максимальное значение в множестве, состоящем из третьих координат $X_3(T)$ точек $(X_1(T), X_2(T), X_3(T))$ таких траекторий.

Свойство 3. Отрезок $l(Z)$, соединяющий точки $(Z, M(Z))$ и $(Z, 0)$, целиком принадлежит МД $A(T)$.

Доказательство. Пусть $U(t)$ – управление, которое переводит систему из начала координат $(0, 0, 0)$ в точку $(Z, M(Z))$ а $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ – проекция соответствующей траектории на плоскость X_1, X_2 . Построим управление $U^* = U^*(\alpha, t)$, приводящее систему в любую точку отрезка $l(Z)$. Такому управлению соответствуют $V_R = Z, X_3(T) = \alpha M(Z), 0 \leq \alpha \leq 1$. Обозначим $\tilde{t} = t/\alpha, \tilde{T} = T/\alpha$. Пусть

$$U^*(\alpha, t) = \begin{cases} U(\tilde{t}), & 0 \leq \tilde{t} \leq T \\ V_R/(T - \alpha T), & T < \tilde{t} \leq \tilde{T} \end{cases}$$

Тогда проекция соответствующей траектории на плоскость X_1, X_2 определяется соотношением

$$X^*(\alpha, t) = \begin{cases} \alpha X(\tilde{t}), & 0 \leq \tilde{t} \leq T \\ V_R t/T, & T < \tilde{t} \leq \tilde{T} \end{cases}$$

Соответственно, площадь фигуры D^* , ограничиваемой траекторией $X^*(\alpha, t)$ и вектором результирующего перемещения, равна площади фигуры D , умноженной на α (см. фиг. 1). Согласно свойству 2

$$X_3^*(\alpha, T) = -2 \iint_{D^*} dX_2 dX_1 = \alpha \left(-2 \iint_D dX_2 dX_1 \right) = \alpha X_3(T)$$

Предположим, что значения $M(Z)$ построены для всех точек Z множества H . Согласно свойству 3 и следствию утверждения 1 множество точек

$$A(H) = \{(Z, m) : Z \in H, -M(Z) \leq m \leq M(Z)\}$$

содержится в МД A .

Свойство 4. МД A может быть построено на основании свойств симметрии из множества $A(H)$ по следующему алгоритму: сначала по симметрии S_1 из $A(H)$ восстанавливается МД в первом квадранте, затем по симметрии S_2 – во втором квадранте, наконец, по симметрии S_3 – в третьем и четвертом квадрантах.

Таким образом, задача построения МД сводится к задаче поиска управления, переводящего систему из начала координат в точку $(Z, M(Z))$, или, симметрично, в точку $(Z, -M(Z))$, т.е. требуется найти управление $U(t)$, которое обеспечивает максимум (минимум) функционала $X_3(T)$, определенного на соответствующих траекториях $(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ системы. Согласно свойству 2 для минимизации функционала $X_3(T)$ рассматривается следующая задача управления (задача 2):

$$I = \int_0^T X_2 dX_1 \rightarrow \max \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= U_1, \quad \dot{X}_2 = U_2; \quad |U_1| \leq 1, \quad |U_2| \leq 1 \\ X_1(0) &= X_2(0) = 0, \quad (X_1(T), X_2(T)) \in H \end{aligned} \tag{1.7}$$

В этой двумерной задаче управления начальная точка траектории зафиксирована в начале координат O , а правый конец – в произвольной точке $(X_1(T), X_2(T))$ из множества H .

Напомним, что согласно теории оптимального управления [2], любая часть оптимальной траектории также является оптимальной. На основе этого свойства решение задачи 2 можно свести к анализу частного случая задачи 2 с замкнутой траекторией. Назовем этот частный случай задачей 3. Соответствующая система (назовем ее системой A) отличается от системы (1.7) тем, что условие $(X_1(T), X_2(T)) \in H$ заменяется на $X_1(T) = X_2(T) = 0$.

Задача 3 заключается в поиске такого управления, которое переводит систему A из начала координат в начало координат и доставляет максимум функционалу I (1.6).

2. Решение задачи 3. Пусть $U(t) = (U_1(t), U_2(t))$ – допустимое управление, заданное на интервале $[0, T]$, а $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ – соответствующая траектория движения системы A . Обозначим символом $U^*(s) = (U_1^*(s), U_2^*(s))$, $s \in [0, S]$, управление, лежащее на границе квадрата P и порождающее траекторию $X^*(s) = (X_1^*(s), X_2^*(s))$, так что образы траекторий $X(t)$ и $X^*(s)$ совпадают, т.е.

$$\{X(t), 0 \leq t \leq T\} = \{X^*(t), 0 \leq t \leq T\}$$

Утверждение 2. Управление $U^*(s)$, $s \in [0, S]$, можно построить для любого управления $U(t)$, $t \in [0, T]$. При этом $S \leq T$.

Доказательство. Пусть $t \in [0, T]$. Зафиксируем $x \in [0, T]$. Пусть функция $\lambda(x) \geq 1$ выбрана таким образом, что $\lambda(x)U(x) \in \partial P$. Введем новую переменную

$$y = y(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\lambda(\xi)}$$

Отметим, что новое время s определяется соотношением $s = y(t)$. Кроме того, функция $y = y(x)$ – строго возрастающая, т.е. существует обратная функция $x = x(y)$. Выполним замену переменных $x = x(y)$ в определенном интеграле для траектории движения системы А. Имеем

$$X(t) = \int_0^t U(x) dx = \int_0^t U(x)\lambda(x) \frac{dx}{\lambda(x)} = \int_0^s U(x(y))\lambda(x(y)) dy = \int_0^s U^*(y) dy = X^*(s)$$

Таким образом, искомое управление U^* , лежащее на границе квадрата P , определяется соотношением $U^*(y) = U(x(y))\lambda(x(y))$.

Утверждение 3. Задача 3 эквивалентна задаче, в которой управления $U(t) = (U_1(t), U_2(t))$ принадлежат границе квадрата P , т.е.

$$\max\{|U_1(t)|, |U_2(t)|\} = 1$$

Доказательство. Пусть I_1 – оптимальное значение функционала I в задаче 3, в которой $U(t) \in P$, а I_2 – оптимальное значение функционала I для аналогичной задачи, в которой $U(t) \in \partial P$. Ясно, что $I_2 \leq I_1$, так как $\partial P \subset P$.

Покажем, что $I_2 \geq I_1$. Пусть $U(t)$ – оптимальное управление, реализующее максимальное значение I_1 функционала I в задаче 3. Из утверждения 2 следует, что траектория, порожденная управлением $U(t) \in P$, $t \in [0, T]$, может быть порождена управлением $U^*(s) \in \partial P$, $s \in [0, S]$. При этом $S \leq T$. Построим управление $U^*(s)$ на промежутке $(S, T]$ следующим образом:

$$U^*(s) = \begin{cases} U^*(S), & s \in (S, (S+T)/2] \\ -U^*(S), & s \in ((S+T)/2, T] \end{cases}$$

Тогда $X^*(T) = X^*(S)$ и $\int_S^T X_2^* dX_1^* = 0$. Следовательно, по построению управления $U^*(s)$, $s \in [0, T]$, имеем цепочку соотношений

$$I_1 = \int_0^T X_2 dX_1 = \int_0^S X_2^* dX_1^* = \int_0^T X_2^* dX_1^* \leq I_2$$

Окончательно получаем, что $I_1 = I_2$.

Утверждение 4. Задача 3 эквивалентна задаче, в которой управления $U(t) = (U_1(t), U_2(t))$ при почти всех t находятся в вершинах квадрата P :

$$|U_1(t)| = 1, \quad |U_2(t)| = 1$$

Доказательство. Согласно утверждению 3 будем рассматривать эквивалентную задачу, в которой $U(t) \in \partial P$. Пусть I_2 – оптимальное значение функционала I в этой задаче, I_3 – оптимальное значение функционала I для задачи, в которой $U(t)$ лежит в вершинах квадрата. Ясно, что $I_3 \leq I_2$.

Покажем, что $I_3 \geq I_2$. Пусть $U(t)$ – оптимальное управление, реализующее максимальное значение I_2 . Обозначим символом T_1 множество точек $t \in [0, T]$, для которых $U_1(t) = 1$. По определению измеримой функции множество T_1 измеримо. Не ограничивая общности, будем считать, что мера $\mu(T_1)$ множества T_1 положительна. Зададим число $n \geq 1$ и осуществим разбиение отрезка $[0, T]$ с шагом $(0.1)^n T$. Обозначим символом J_n совокупность отрезков этого разбиения, целиком содержащихся в T_1 . Пусть d_n – сумма длин отрезков из совокупности J_n . По определению меры, $d(J_n) \uparrow \mu(T_1)$ при $n \rightarrow \infty$. Начиная с некоторого номера n , совокупность J_n не пуста. Действительно, зафиксируем $\epsilon = \mu(T_1)/2$; тогда по определению предела найдется такое $n(\epsilon)$, что для всех $n \geq n(\epsilon)$ справедливо неравенство $\mu(T_1) - d(J_n) < \mu(T_1)/2$, т.е. $d(J_n) > \mu(T_1)/2 > 0$.

Рассмотрим отрезок $J = [t_1, t_2]$ из совокупности J_n . Выполняются соотношения $U_1(t) = 1, |U_2(t)| \leq 1, t \in J$. Движение системы осуществляется вправо из начальной точки $X(t_1) = (X_1(t_1), X_2(t_1))$ в конечную точку $X(t_2) = (X_1(t_2), X_2(t_2))$. Построим траекторию $X^*(t) = (X_1^*(t), X_2^*(t))$ на отрезке $[t_1, t_2]$, которая имеет те же самые начальные и конечные точки, но порождается управлением

$$U_1(t) = 1, \quad U_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_1, \tau) \\ -1, & t \in [\tau, t_2] \end{cases}$$

причем момент переключения τ определяется соотношением

$$t_1 + (\Delta T + \Delta X_2)/2 = (t_1 + t_2 + X_2(t_2) - X_2(t_1))/2$$

Траектории $X(t), X^*(t)$ изображены на фиг. 2. Для этих траекторий имеем

$$dX_1 = dX_1^* = U_1(t)dt = dt > 0, \quad X_2^*(t) \geq X_2(t), \quad t \in [t_1, t_2]$$

Из этих соотношений следует неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} X_2^*(t) dX_1^*(t) \leq \int_{t_1}^{t_2} X_2(t) dX_1(t)$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в разбиении отрезка $[0, T]$, получаем

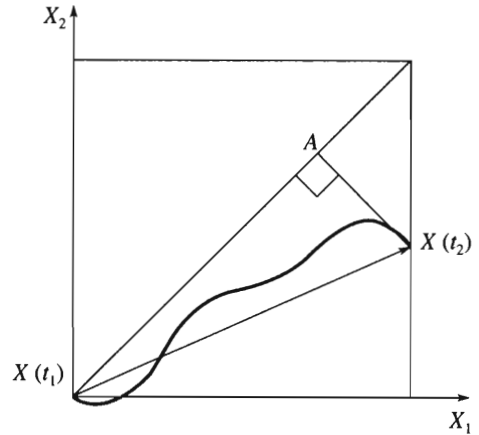
$$\int_{T_1} X_2^*(t) dX_1^*(t) \leq \int_{T_1} X_2(t) dX_1(t)$$

Аналогичные рассуждения можно провести для множества

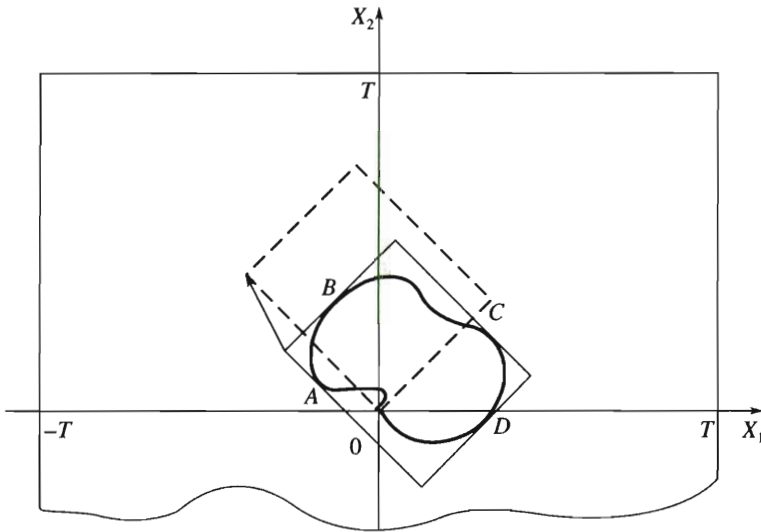
$$T_2 = \{t: t \in [0, T], U_2(t) = -1\} = [0, T] \setminus T_1$$

Суммируя приведенные рассуждения, получаем $I_2 \leq I_3$, откуда следует $I_2 = I_3$.

Обозначим символом Φ фигуру, которая охватывается траекторией $X(t)$ в задаче 3 и имеет максимальную площадь среди всех таких фигур.



Фиг. 2



Фиг. 3

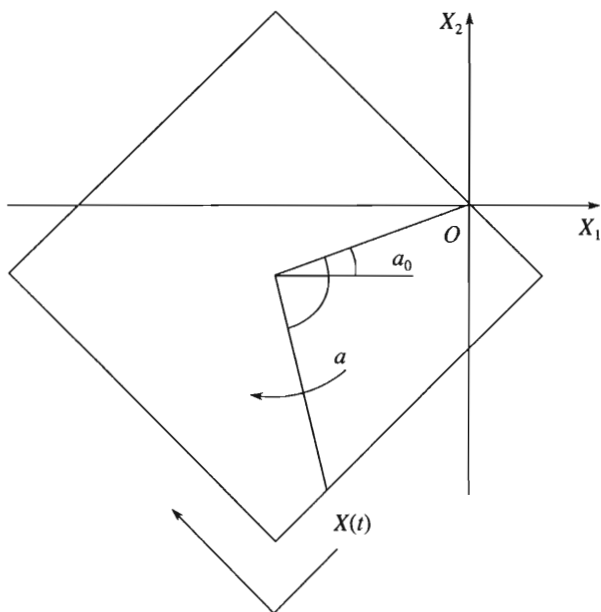
Утверждение 5. Оптимальная траектория задачи 3 является границей прямоугольника с заданным периметром, равным $T\sqrt{2}$.

Доказательство. Покажем, что для любой фигуры Φ , порожденной допустимым управлением $U(t)$, существует прямоугольник Φ^* , порождаемый допустимым управлением $U^*(t)$ и имеющий площадь не меньшую, чем площадь фигуры Φ . На фиг. 3 кривая линия представляет границу фигуры Φ . Прямоугольник Φ^* строится, например, с помощью двух операций: сначала для фигуры Φ конструируется описанный прямоугольник наименьшей площади, со сторонами, параллельными биссектрисам координатных углов; затем он параллельно переносится таким образом, чтобы нижний угол располагался в начале координат.

Обозначим символами A, B, C, D произвольные точки касания разных сторон прямоугольника с фигурой Φ (фиг. 3). Рассмотрим точки касания B и C . Аналогично доказательству утверждения 4 построим допустимое управление $U^*(t)$, переводящее точку B в точку C по границе прямоугольника за время, не большее, чем время движения по исходной траектории. При этом площадь фигуры, описываемой новой траекторией, разве лишь увеличивается. Аналогичные рассуждения справедливы для других комбинаций смежных точек. Таким образом, получаем, что площадь прямоугольника Φ^* не меньше площади фигуры Φ .

Отметим, что среди прямоугольников одинакового периметра наибольшей площадью обладает квадрат. Решением задачи 3 являются квадраты со сторонами, параллельными биссектрисам координатных углов. При этом начало координат может располагаться в любой точке границы квадрата.

Таким образом, задача 3 близка к задаче Дидоны [16]. Напомним, что задача Дидоны – классическая задача вариационного исчисления: требуется линией заданной длины охватить максимальную площадь. Решение этой задачи известно и дается двухпараметрическим семейством окружностей; один параметр задает длину окружности, а второй – положение центра этой окружности на плоскости.



Фиг. 4

По аналогии с решением задачи Дидоны решение задачи 3 также можно описать двухпараметрическим семейством, только не окружностей, а границ квадратов. Параметрическое представление оптимальных траекторий выглядит так:

$$X_1(T, a_0, a(t)) = \frac{T}{2} [\cos^2(a_0 - a) \operatorname{sign}(\cos(a - a_0)) - \cos^2 a_0 \operatorname{sign}(\cos(-a_0))] .$$

$$X_2(T, a_0, a(t)) = \frac{T}{2} [\sin^2(a_0 - a) \operatorname{sign}(\sin(a - a_0)) - \sin^2 a_0 \operatorname{sign}(\sin(-a_0))] .$$

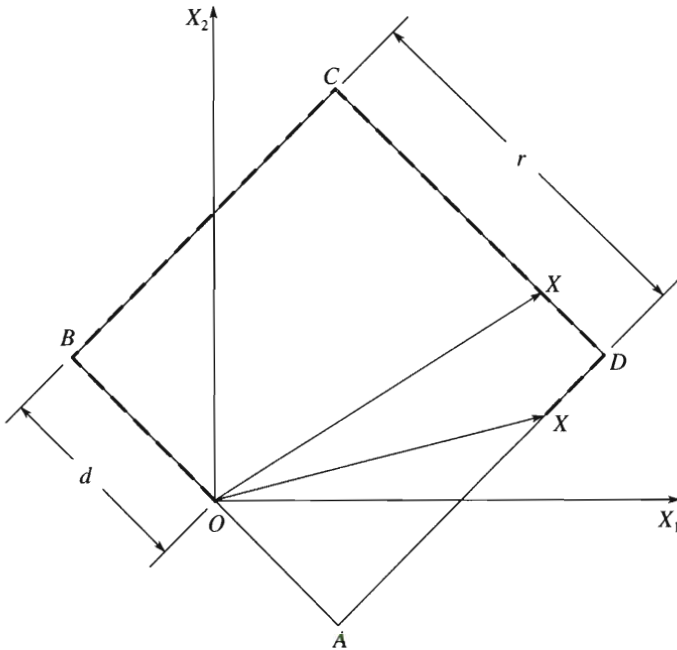
$$a = a(t) \in [0, 2\pi], \quad a_0 \in [0, 2\pi]$$

Здесь T и a_0 – параметры этого двухпараметрического семейства траекторий. При этом время T задает длину траектории, а параметр a_0 определяет положение центра квадрата на плоскости. Параметр t – время движения по траектории. Функция $a(t)$ – угол между радиус-вектором, соединяющим центр квадрата и начало координат, и радиус-вектором, соединяющим центр квадрата и точку траектории $X(T)$ (фиг. 4). Этот параметр в точках дифференцируемости должен удовлетворять дифференциальным равенствам

$$|d \cos^2(a_0 - a(t))/dt| = 1, \quad |d \sin^2(a_0 - a(t))/dt| = 1$$

3. Решение задачи 2. Будем искать траектории, обеспечивающие решение задачи 2, как участки траекторий, полученных в результате решения задачи 3. Зафиксируем точку $X \in H$. Пусть T – время движения от начала координат до точки X в задаче 2, т.е. $X(T) = X$. Необходимо подобрать параметры $T^* \geq T, a_0$, для которых траектория решения задачи 3 проходит через X , и время движения от начала координат до X равно T .

Рассчитаем согласно свойству 2 значение интеграла I как площадь, ограниченную вектором результирующего перемещения и траекторией. Рассмотрим квадрат, который ограничен оптимальной траекторией задачи 3. Этот квадрат имеет стороны,



Фиг. 5

параллельные биссектрисам координатных углов, и его вершины упорядочены по часовой стрелке символами A, B, C, D , начиная с нижней вершины. Напомним, что длина стороны этого квадрата определяется равенством $r = \sqrt{2}T^*/4$. Рассмотрим всевозможные траектории решения задачи 3, идущие по периметру квадрата со стороны r из начала координат O в точку X за время T . Будем считать, что начало координат O находится на стороне AB квадрата $ABCD$.

Отметим, что в этом случае всевозможные расположения таких квадратов описываются двумя параметрами: длиной r стороны квадрата $ABCD$ и расстоянием d от точки O до вершины A .

Кроме того, существуют два варианта размещения вектора результирующего перемещения для этих траекторий. В первом варианте траектория проходит по трем сторонам квадрата и состоит из отрезков OB, BC, CX . Во втором варианте траектория проходит по четырем сторонам квадрата и состоит из отрезков OB, BC, CD, DX (фиг. 5).

Рассмотрим прямоугольный треугольник OXW , гипотенуза которого совпадает с вектором OX , катеты OW и XW лежат ниже гипотенузы и параллельны биссектрисам первого и второго координатных углов.

Утверждение 6. Длины катетов OW и XW треугольника OXW определяются координатами вектора X и даются соотношениями

$$|OW| = \zeta_-, \quad |XW| = \zeta_+; \quad \zeta_{\pm} = (X_1 \pm X_2)/\sqrt{2}$$

Доказательство очевидно.

Параметры r и d должны определяться из двух уравнений, задающих конечную точку X траектории и время T движения по ней. Используя утверждение 6, определим параметры r и d для обоих вариантов размещения вектора результирующего перемещения.

В первом варианте

$$r = \zeta_+, \quad \sqrt{2}T = r + 2d + \zeta_-$$

откуда $d = (T - X_1)/\sqrt{2}$. Кроме того, параметр d должен удовлетворять неравенству $d \leq r - \zeta_-$. Из этих соотношений следует, что решение такого типа существует только для тех точек треугольника H , которые удовлетворяют неравенству $X_2 \geq (T - X_1)/2$.

В первом варианте площадь фигуры, ограниченной вектором результирующего перемещения и траекторией движения системы, равна площади четырехугольника $OBСХ$ и вычисляется по формуле

$$I_1 = rd + r\zeta_-/2 = (\sqrt{2}T - \zeta_+)\zeta_+/2 \tag{3.1}$$

Аналогично, для второго варианта параметры r и d должны определяться из двух уравнений, задающих конечную точку X траектории и время T движения по ней. Имеем

$$\sqrt{2}T = 4r - (\zeta_- + \zeta_+), \quad d = r - \zeta_- \Rightarrow r = (T + X_1)/(2\sqrt{2}), \quad d = T/(2\sqrt{2}) + \zeta_+$$

Кроме того, параметр r должен удовлетворять неравенству $r \geq \zeta_+$. Из этих соотношений следует, что решение такого типа существует только для точек треугольника H , которые удовлетворяют неравенству $X_2 \leq (T - X_1)/2$.

Во втором варианте площадь фигуры, ограниченной вектором результирующего перемещения и траекторией движения системы, равна площади пятиугольника $OB-CDX$ и вычисляется по формуле

$$I_2 = r^2 - \zeta_- \zeta_+ / 2 = (T^2 + 2TX_1 - X_1^2 + 2X_2^2)/8 \tag{3.2}$$

Решение задачи 2 зависит от координат $(X_1(T), X_2(T)) = (X_1, X_2) \in H$ правого конца траектории системы и может быть представлено в виде

$$I(T, X_1, X_2) = \begin{cases} I_1(T, X_1, X_2), & X_2 > (T - X_1)/2 \\ I_2(T, X_1, X_2), & X_2 \leq (T - X_1)/2 \end{cases} \tag{3.3}$$

Следовательно, по свойству 2, верхняя граница множества достижимости в треугольнике H является графиком функции

$$X_3(T, X_1, X_2) = 2I(T, X_1, X_2) \tag{3.4}$$

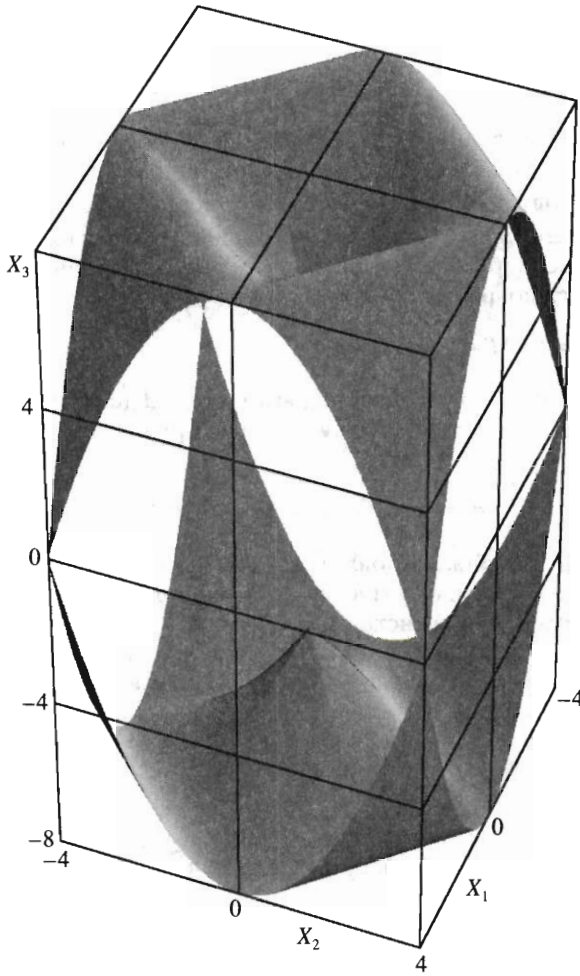
Функция $I(T, X_1, X_2)$ определена формулами (3.1)–(3.3).

С использованием свойства 5 построены границы множества достижимости для $T = 4$ (фиг. 6).

4. Проверка необходимых условий оптимальности траекторий. Проверим, что траектории, полученные в результате решения задачи 3, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина [2] для задачи 1. Перепишем задачу 1 для нижней границы области достижимости в виде

$$I = \int_0^T (X_1 U_2 - X_2 U_1) dt \rightarrow \min \tag{4.1}$$

$$\dot{X}_1 = U_1, \quad \dot{X}_2 = U_2; \quad |U_1| \leq 1, \quad |U_2| \leq 1; \quad X_1(0) = X_1(T) = X_2(0) = X_2(T) = 0$$



Фиг. 6

Рассмотрим для вспомогательных сопряженных переменных ψ_i систему уравнений принципа максимума

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{\alpha=0}^2 \frac{\partial f^\alpha(X, U)}{\partial X_i} \psi_\alpha$$

Учитывая, что выполнены соотношения

$$f^1(X, U) = U_1, \quad f^2(X, U) = U_2, \quad f^0(X, U) = X_1 U_2 - X_2 U_1$$

имеем

$$\dot{\psi}_1 = -U_2 \psi_0, \quad \dot{\psi}_2 = U_1 \psi_0, \quad \dot{\psi}_0 = 0 \quad (4.2)$$

Интегрируя эту систему, получаем

$$\psi_1 = -(X_2 + c_1)c, \quad \psi_2 = (X_1 + c_2)c, \quad \psi_0 = c \quad (4.3)$$

Согласно условиям принципа максимума для задачи с закрепленным временем, следует выбрать отрицательное значение постоянной c .

Запишем гамильтониан системы (4.1)

$$H(\psi, X, U) = \sum_{\alpha=0}^2 f^\alpha(X, U)\psi_\alpha = \quad (4.4)$$

$$= (X_1 U_2 - X_2 U_1)c - U_1(X_2 + c_1)c + U_2(X_1 + c_2)c$$

Для выполнения принципа максимума необходимо обеспечить условие

$$H(\psi, X, U) = \max_{V \in P} H(\psi, X, V), \quad U = (U_1, U_2), \quad V = (V_1, V_2)$$

которое трансформируется в равенство

$$U_2(2X_1 + c_2) - U_1(2X_2 + c_1) = |2X_2 + c_1| + |2X_1 + c_2| \quad (4.5)$$

Проверим, что это соотношение выполняется для оптимальных траекторий задачи 3. Действительно, оптимальная траектория представляет собой границу квадрата, пусть (c_{k1}, c_{k2}) – координаты его центра. Ясно, что для оптимальных траекторий справедливы соотношения

$$U_2(X_1 - c_{k1}) - U_1(X_2 - c_{k2}) = |X_1 - c_{k1}| + |X_2 - c_{k2}|$$

Далее, выбирая параметры $c_1 = -2c_{k1}$, $c_2 = -2c_{k2}$, получаем требуемое соотношение (4.5).

5. Проверка достаточных условий оптимальности траекторий. Из решения задачи 2 будем синтезировать функцию оптимального результата (функцию цены). Для функции цены осуществим проверку необходимых и достаточных условий в виде дифференциальных неравенств [11], которым должно удовлетворять обобщенное (минимаксное, вязкостное) решение уравнения Гамильтона – Якоби (ГЯ).

Рассмотрим задачу, двойственную задаче 2:

$$I = \int_{T_0}^T (X_1 U_2 - X_2 U_1) \rightarrow \max \quad (5.1)$$

$$\dot{X}_1 = U_1, \quad \dot{X}_2 = U_2; \quad |U_1| \leq 1, \quad |U_2| \leq 1$$

$$X_1(T_0) = X_1, \quad X_2(T_0) = X_2, \quad X_1(T) = X_2(T) = 0; \quad 0 \leq T_0 \leq T$$

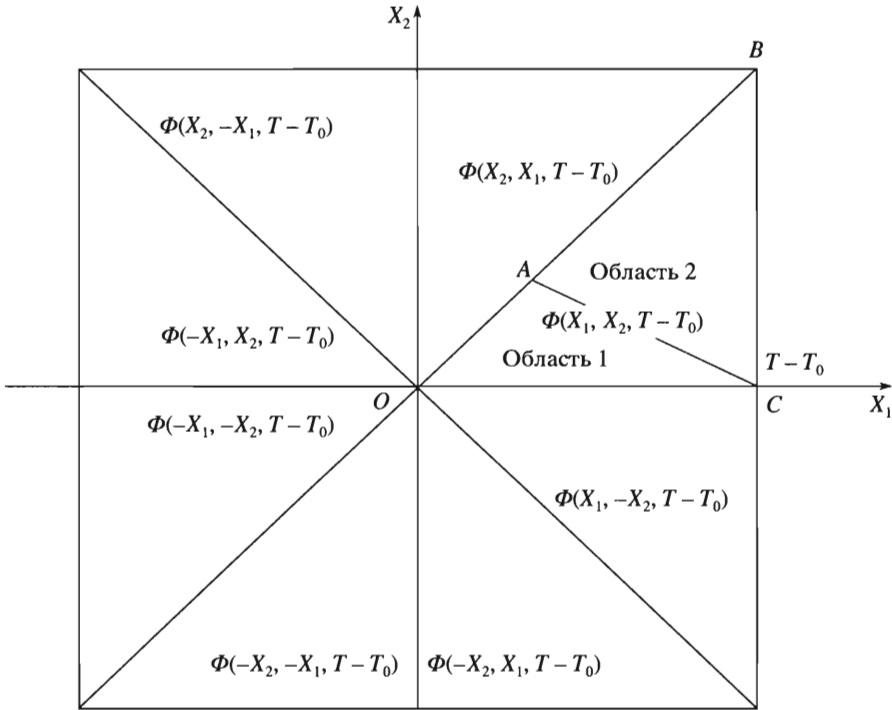
В этой двумерной задаче управления начальная точка траектории зафиксирована в произвольной точке плоскости (X_1, X_2) , а правый конец зафиксирован в начале координат $(0, 0)$. Решение этой задачи получается из решения задачи 2.

Составим функцию цены для задачи (5.1) из функции (3.4). Отметим, что она принимает конечные значения в области управляемости системы (5.1), которая представляет собой конус в пространстве переменных X_1, X_2, T , заданный соотношениями $|X_1| \leq T - T_0, |X_2| \leq T - T_0$.

Вне конуса управляемости значения функции цены следует положить равными минус бесконечности, так как не может быть решена задача перевода траектории системы (5.1) из точки (X_1, X_2) в точку $(0, 0)$ за время $T - T_0$.

Конус управляемости разбивается на 16 областей, в каждой из которых найдена аналитическая формула для функции цены. Приведем выражения для функции цены $W(X_1, X_2, T - T_0)$ в точках области $\{(X_1, X_2, T): 0 \leq X_1 \leq T - T_0, 0 \leq X_2 \leq T - T_0, X_2 \leq X_1\}$, соответствующей треугольнику H . Введем обозначения

$$\xi_j = (T - T_0 - X_j)/2, \quad \varphi = \partial\Phi/\partial X, \quad \varphi_0 = \partial\Phi/\partial T_0, \quad \varphi_j = \partial\Phi/\partial X_j; \quad j = 1, 2$$



Фиг. 7

Имеем

$$\Phi(X_1, X_2, T - T_0) = \begin{cases} (\xi_1 + \xi_2)(X_1 + X_2), & \text{если } X_2 > \xi_1 \\ (\xi_1 + X_1)^2 - (X_1^2 - X_2^2)/2, & \text{если } X_2 \leq \xi_1 \end{cases}$$

Тогда для остальных областей функцию цены W можно определить с помощью симметрий утверждения 1 (см. фиг. 7).

Для соответствующих областей для функции цены W должно выполняться уравнение Гамильтона – Якоби

$$H(X, \varphi) + \varphi_0 = 0$$

где

$$H(x, \varphi) = \max_{U_1, U_2} (U_1\varphi_1 + U_2\varphi_2 + X_1U_2 - X_2U_1) = |\varphi_1 - X_2| + |\varphi_2 + X_1|$$

Для области 1 (фиг. 7) имеем

$$\varphi_1 = \xi_1, \quad \varphi_2 = X_2, \quad \varphi_0 = -\xi_1 - X_1$$

и уравнение ГЯ, очевидно, выполняется. Аналогично проверяется выполнение уравнения ГЯ для области 2.

Рассматриваемые 16 областей склеиваются попарно на 20 поверхностях. Схематично ситуация склейки представлена на фиг. 7 в виде плоской картины, где поверхности склейки представлены отрезками. При этом на 12 поверхностях: OC, AC, AB и им симметричных склейка происходит гладким образом. На четырех поверхностях:

ОА и ей симметричных склейка – негладкая и получается с помощью операции максимума двух функций. Например, на поверхности ОА с помощью операции максимума склеиваются две функции: $\Phi(X_1, X_2, T - T_0)$ и $\Phi(X_2, X_1, T - T_0)$.

На четырех линиях: А и ей симметричных происходит гладкая склейка четырех функций.

На линии, которая соответствует началу координат О, склеиваются 8 функций. При этом четыре пары склеиваются гладким образом и образуют четыре гладких функции, которые затем склеиваются негладким образом с помощью операции максимума.

На границе конуса управляемости функции, принимающие конечное значение, склеиваются с функцией, принимающей значение, равное минус бесконечности. При этом склейка происходит на гранях конуса и на его ребрах.

Проверим, что на поверхностях ОС, АС и АВ функции склеиваются попарно гладким образом.

На поверхности ОС ($X_2 = 0$) для градиентов склеиваемых функций $F_1 = \Phi(X_1, X_2, T - T_0)$ и $F_2 = \Phi(X_1, -X_2, T - T_0)$ имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_1} = \frac{\partial F_2}{\partial X_1} = \xi_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_2} = X_2 \Big|_{OC} = 0 = -X_2 \Big|_{OC} = \frac{\partial F_2}{\partial X_2}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial T_0} = \frac{\partial F_2}{\partial T_0} = -\xi_1 - X_1$$

На поверхности АС ($X_2 = \xi_1$) гладко склеиваются компоненты функции Φ :

$$F_1 = (\xi_1 + \xi_2)(X_1 + X_2), \quad F_2 = (\xi_1 + X_1)^2 - (X_1^2 - X_2^2)/2 \tag{5.2}$$

Рассмотрим далее поверхность АВ, на которой склеиваются функции, построенные с помощью симметрии S_3 . Отметим, что на этой поверхности функция Φ равна $(\xi_1 + \xi_2)(X_1 + X_2)$ и сама обладает свойством симметрии S_3 . Поэтому в окрестности поверхности АВ функция цены описывается значениями гладкой функции Φ , которая, как показано ранее, удовлетворяет уравнению ГЯ.

Проверим, что на поверхности ОА, где негладким образом с помощью операции максимума склеиваются две функции

$$F_1 = (\xi_1 + X_1)^2 - (X_1^2 - X_2^2)/2, \quad F_2 = (\xi_2 + X_2)^2 - (X_2^2 - X_1^2)/2$$

выполняются неравенства для обобщенных градиентов [11] функции цены, заменяющие уравнение ГЯ:

$$H(x, \varphi) + \varphi_0 \leq 0, \quad \text{где } (\varphi, \varphi_0) \in D^- \Phi(T, T_0, X) \tag{5.3}$$

$$H(x, \varphi) + \varphi_0 \geq 0, \quad \text{где } (\varphi, \varphi_0) \in D^+ \Phi(T, T_0, X) \tag{5.4}$$

Множества D^+ и D^- представляют собой супердифференциал и субдифференциал функции Φ соответственно и определяются соотношениями

$$D^+ \Phi(T, T_0, X) = \{p | \partial \Phi_e(T, T_0, X) \geq \langle p, e \rangle \text{ при всех } e\}$$

$$D^- \Phi(T, T_0, X) = \{p | \partial \Phi_e(T, T_0, X) \leq \langle p, e \rangle \text{ при всех } e\}$$

где $\partial \Phi_e(T, T_0, X)$ – производная функции Φ по направлению $e = (e_{T_0}, e_X)$:

$$\partial \Phi_e(T, T_0, X) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\Phi(T, T_0 + \delta e_{T_0}, X + \delta e_X) - \Phi(T, T_0, X)}{\delta}$$

На поверхности OA имеем

$$\partial\Phi_e(T, T_0, X) = \max_{j=1,2} \langle \nabla F_j, e \rangle = (-\xi_1 - X_1)e_{T_0} + \max\{\xi_1 e_1 + X_2 e_2, X_1 e_1 + \xi_1 e_2\}$$

$$\nabla F_i = \left(\frac{\partial F_j}{\partial T_0}, \frac{\partial F_j}{\partial X_1}, \frac{\partial F_j}{\partial X_2} \right), \quad F_j = F_j(T, T_0, X)$$

Субдифференциал дается соотношением

$$\begin{aligned} D^-\Phi(T, T_0, X) &= \text{co}\{\nabla F_1, \nabla F_2\} = \{a\nabla F_1 + (1-a)\nabla F_2: a \in [0, 1]\}_{|X_1 = X_2 = Y} = \\ &= \{(-\eta_+, aY + (1-a)\eta_-, a\eta_- + (1-a)Y): a \in [0, 1], Y \in [0, (T - T_0)/3]\} \\ \eta_{\pm} &= (T - T_0 \pm Y)/2 \end{aligned}$$

Супердифференциал функции Φ на поверхности OA – пустое множество, поэтому неравенство (5.4) выполняется автоматически.

Для проверки неравенства (5.3) вычислим его левую часть на векторах субдифференциала $D^-\Phi(T, T_0, X)$

$$H(x, \varphi) + \varphi_0 = -\eta_+ + |a(T - T_0 - 3Y)/2| + |\eta_+ - a(T - T_0 - 3Y)/2|$$

Ясно, что значения этого выражения неположительны, так как оно тождественно равно нулю при $a \in [0, 1]$, $Y \in [0, (T - T_0)/3]$.

Таким образом, дифференциальные неравенства (5.3) и (5.4) выполнены во всех точках поверхности OA . На линии O ($X_1 = X_2 = 0$) с помощью операции максимума склеиваются 4 гладкие функции. Субдифференциал склеенной функции дается соотношением

$$D^-\Phi(T, T_0, X)|_O = \text{co}\{\nabla F_1, \nabla F_2, \nabla F_3, \nabla F_4\}|_O$$

$$\nabla F_{1,3} = (-\xi_1 - X_1, \pm\xi_1, \pm X_2) = (-\tau, \pm\tau, 0),$$

$$\nabla F_{2,4} = (-\xi_1 - X_1, \pm X_2, \pm\xi_1) = (-\tau, 0, \pm\tau); \quad \tau = (T - T_0)/2$$

Субдифференциал представляет собой квадрат в плоскости X_1, X_2 с центром в начале координат и сторонами, параллельными биссектрисам координатных углов:

$$D^-\Phi(T, T_0, X)|_{X_1 = X_2 = 0} = \{(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2): \varphi_0 = -\tau, |\varphi_1| + |\varphi_2| - \tau \leq 0\} \quad (5.5)$$

Для проверки неравенства (5.3) вычислим его левую часть на векторах субдифференциала $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) \in D^-\Phi(T, T_0, X)$. Имеем

$$H(x, \varphi) + \varphi_0 = |\varphi_1| + |\varphi_2| - \tau$$

Согласно соотношению (5.5) значения гамильтониана неположительны.

Супердифференциал функции Φ на линии O – пустое множество, поэтому неравенство (5.4) выполняется автоматически.

Проверим, что на границе области управляемости – поверхности BC , на которой склеиваются конечные и бесконечные значения функции цены также выполняются дифференциальные неравенства для обобщенных градиентов [11] функции цены, заменяющие уравнение ГЯ.

Вычислим производную по направлению функции цены на поверхности BC

$$\partial\Phi_e(T, T_0, X) = \begin{cases} -\infty, & e_{T_0} + e_{X_1} > 0 \\ \langle \nabla F_1, e \rangle, & e_{T_0} + e_{X_1} \leq 0 \end{cases}$$

(функция F_1 определяется первой формулой (5.2)).

Вычислим супердифференциал функции Φ . По определению имеем

$$D^+ \Phi(T, T_0, X) = \begin{cases} p: -\infty \leq \langle p, e \rangle \text{ при } e_{T_0} + e_{X_1} > 0 \\ p: \langle \nabla F_1, e \rangle \leq \langle p, e \rangle \text{ при } e_{T_0} + e_{X_1} \leq 0 \end{cases}$$

Так как верхнее неравенство системы выполняется для всех векторов p , то супердифференциал определяется только нижним неравенством системы. Это неравенство должно выполняться во всех точках полупространства, задаваемого уравнением $e_{T_0} + e_{X_1} \leq 0$. Следовательно, векторы $\nabla F_1 - p$ перпендикулярны плоскости $e_{T_0} + e_{X_1} = 0$ и сонаправлены с вектором $(1, 1, 0)$. Тогда

$$\nabla F_1 - p = (a, a, 0), \quad a \in [0, \infty]$$

Окончательно получаем следующую формулу для супердифференциала:

$$\begin{aligned} D^+ \Phi(T, T_0, X)|_{BC} &= \{p: p = \nabla F_1 + (-a, -a, 0), a \in [0, \infty]\} = \\ &= \{p: p = (-X_1 - X_2 - a, \xi_1 - X_2/2 - a, \xi_1 - X_2/2), a \in [0, \infty]\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Супердифференциал представляет собой луч с началом в точке ∇F_1 , сонаправленный с вектором $(-1, -1, 0)$. Тогда неравенство (5.4) для векторов супердифференциала должно выглядеть следующим образом:

$$-X_1 - X_2 - a + |2\xi_1 - 2X_2 - a| + |2\xi_2| \geq 0, \quad a \in [0, \infty] \quad (5.7)$$

Видно, что оно выполняется, так как первый модуль раскрывается с отрицательным знаком, а второй – с положительным.

Субдифференциал функции Φ на поверхности BC – пустое множество, поэтому неравенство (5.3) выполняется автоматически.

Проверим, что на ребре конуса управляемости – линии B также выполняются дифференциальные неравенства для обобщенных градиентов функции цены.

Вычислим производную по направлению функции цены на линии B

$$\partial \Phi_e(T, T_0, X) = \begin{cases} -\infty \text{ при } e_{T_0} + e_{X_1} > 0, \quad e_{T_0} + e_{X_2} > 0 \\ \langle \nabla F_1, e \rangle \text{ в противном случае} \end{cases}$$

(функция F_1 определяется первой формулой (5.2)). Для супердифференциала получаем формулу, отличающуюся от (5.6) лишь появлением вектора смещения $(-b, 0, -b)$, определяемого дополнительной степенью свободы b , $b \in [0, \infty]$, т.е. супердифференциал представляет собой выпуклый конус с началом в точке ∇F_1 и образующими векторами $(-1, -1, 0)$, $(-1, 0, -1)$. Тогда неравенство (5.4) для векторов супердифференциала отличается от (5.7) заменой третьего слагаемого в правой части на $-(a+b)$ и заменой последнего слагаемого на $|2\xi_2 - b|$. Оно выполняется по тем же причинам, что и (5.7).

Таким образом, проведена полная проверка дифференциальных неравенств А.И. Субботина для функции цены W , т.е. установлено, что для нее выполнены необходимые и достаточные условия оптимальности, и она является обобщенным решением уравнения ГЯ.

Авторы посвящают статью восьмидесятилетию академика Н.Н. Красовского.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00769) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-791.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. Basel: Birkhäuser, 1994. 322 p.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов, М.: Наука, 1976. 392 с.
3. *Brockett R.W.* Asymptotic stability and feedback stabilization // *Differential Geometric Control Theory* / Eds. Brockett R.W. et al. Boston: Birkhauser, 1983. P. 181–191.
4. *Astolfi A., Rapaport A.* Robust Stabilization of the Angular Velocity of a Rigid Body // *Systems and Control Letters*. 1998. Vol. 34. P. 257–264.
5. *Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J.* Proximal analysis and feedback construction. // *Тр. ин-та матем. и мех. УрО РАН*. 2000. Т. 6. № 1. С. 91–109.
6. *Никольский М.С.* Об оценке изнутри множества достижимости нелинейного интегратора Р. Брокитта // *Дифференциальные уравнения*, 2000. Т. 96, № 11. С. 1501–1505.
7. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
8. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы: Динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 363 с.
9. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление (линейная теория). М.: Высш. шк., 2001. 238 с.
10. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
11. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
12. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
13. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
14. *Субботина Н.Н.* Метод характеристик Коши и обобщенные решения уравнений Гамильтона – Якоби – Беллмана // *Докл. АН СССР*. 1991. Т. 320. № 3. С. 556–561.
15. *Субботин А.И., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.* Обобщенные характеристики уравнений Гамильтона – Якоби // *Изв. АН. Техн. кибернетика*. 1993. № 1. С. 190–197.
16. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1976. 255 с.